

Le flot de Toda

On note $\mathbf{R}$ l'ensemble des nombres réels, $\mathbf{I}$ la matrice unité d'ordre m et e_j le j -ème vecteur de la base canonique de $\mathbf{R}^m$ dont les composantes sont les δ_{ij} , $i = 1, m$. On rappelle que $\delta_{ij} = 0$ si $j \neq i$ et $\delta_{ij} = 1$ si $j = i$.

On note $(u|v)$ le produit scalaire des vecteurs u et v de $\mathbf{R}$. Les vecteurs de $\mathbf{R}^m$ seront assimilés à des matrices colonnes; ${}^t u$ note le transposé du vecteur u .

L'expression : $i = 1, m$ signifie "pour tout i entier tel que $1 \leq i \leq m$."

1 Tridiagonalisation

Soit u un vecteur unitaire de $\mathbf{R}^m$; la matrice

$$H = I - 2u {}^t u, \quad (1)$$

est la matrice de Householder d'ordre m associée au vecteur u .

Question 1 Montrer que $Hu = -u$ et que $Hv = v$ dès que v est orthogonal à u .

Question 2 Démontrer que H est symétrique et orthogonale.

Question 3 Soit $g \in \mathbf{R}^m$, de composantes γ_i , $1 \leq i \leq m$, un vecteur unitaire non colinéaire à e_1 . On pose $u = (g - e_1) / \sqrt{2(1 - \gamma_1)}$, montrer que u est unitaire et que $Hg = e_1$.

Question 4 En déduire que si x est un vecteur de $\mathbf{R}^m$ non colinéaire à e_1 , il existe un vecteur unitaire u et une matrice de Householder associée H telle que $Hx = \|x\| e_1$.

Soient c un réel, Q une matrice symétrique réelle d'ordre $m - 1$, q_{21} un vecteur de $\mathbf{R}^{m-1}$ et $\widehat{Q} = \left(\begin{array}{c|c} c & {}^t q_{21} \\ \hline q_{21} & Q \end{array} \right)$ une matrice définie par blocs. Si H_1 est une matrice de Householder d'ordre $m - 1$; on pose $\widehat{H}_1 = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \zeta \\ \hline \zeta & H_1 \end{array} \right)$, où ζ note le vecteur nul dans $\mathbf{R}^{m-1}$, ainsi que $\widehat{S} = \widehat{H}_1 \widehat{Q} \widehat{H}_1 = (\widehat{\sigma}_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m}$.

Question 5 Montrer que $\widehat{S}$ est semblable à $\widehat{Q}$ et qu'on peut choisir H_1 de telle sorte que $\widehat{\sigma}_{i1} = \widehat{\sigma}_{1i} = 0$ pour $i = 3, m$.

On dit qu'une matrice $T = (\tau_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq m}$ est tridiagonale si $\tau_{ij} = 0$ dès que $|i - j| > 1$.

Question 6 En déduire un procédé permettant de déterminer une matrice tridiagonale symétrique semblable à $\widehat{Q}$.

2 Matrices de Jacobi

Une matrice tridiagonale symétrique réelle est encore appelée matrice de Jacobi. Soit

$$T_0 = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & b_2 & a_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{m-1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{m-1} & b_m \end{pmatrix} \quad (2)$$

une matrice de Jacobi d'ordre m . On pose $a_0 = a_m = 0$ et on suppose que $a_i \neq 0$, $i = 1, m-1$. On note $\sigma(T_0)$ le spectre de T_0 , c'est-à-dire l'ensemble de ses valeurs propres.

Question 7 Soit $\lambda \in \sigma(T_0)$ et x un vecteur propre associé de composantes ξ_j , $j = 1, m$. En raisonnant par l'absurde, montrer que $\xi_m \neq 0$.

Question 8 Démontrer que les sous-espaces propres de T_0 sont de dimension 1. Quel est le cardinal de $\sigma(T_0)$?