

I. ÉTUDE DANS UN CAS PARTICULIER

I.1.a Afin de déterminer le spectre de A , il convient de déterminer le polynôme caractéristique de A , que l'on note χ_A . Celui-ci s'écrit, pour $X \in \mathbb{K}[X]$,

$$\begin{aligned}\chi_A(X) &= \det(A - XI_3) \\ &= \begin{vmatrix} -X & -1 & -1 \\ -1 & -X & -1 \\ -1 & -1 & -X \end{vmatrix}\end{aligned}$$

$$\chi_A(X) = -X(X^2 - 1) + X - 1 - (1 - X)$$

en développant par rapport à la première colonne, ce qui donne

$$\chi_A(X) = (X - 1)(-X^2 - X + 2)$$

Le polynôme $-X^2 - X + 2$ possède deux racines simples, 1 et -2 , d'où l'expression du polynôme caractéristique

$$\chi_A(X) = -(X - 1)^2(X + 2)$$

ce qui permet de déterminer le spectre de la matrice A :

$$\boxed{\text{Sp}(A) = \{1, -2\}}$$

I.1.b Pour répondre à cette question, il faut dans un premier temps vérifier que les vecteurs $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ et $\mathbf{u}_3$ sont des vecteurs propres de A , puis démontrer que la famille $\mathcal{F}$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Examinons tout d'abord les vecteurs de $\mathcal{F}$

$$A\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{u}_1$$

$$A\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \mathbf{u}_2$$

$$A\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = -2\mathbf{u}_3$$

On en conclut que $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ sont des vecteurs propres de A associés à la valeur propre 1, et que $\mathbf{u}_3$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre -2 .

De plus, on constate que $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$ sont linéairement indépendants, puisque le déterminant d'ordre 2 formé des deux premières lignes de la matrice $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ est non nul. Par conséquent, la famille $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ est libre dans son sous-espace propre associé, tout comme la famille $(\mathbf{u}_3)$. De plus, des sous-espaces propres associés à des valeurs propres différentes sont en somme directe. On en déduit que la famille $\mathcal{F}$ est libre, et comme $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est de dimension 3,

$$\boxed{\mathcal{F} \text{ est une base de } \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \text{ constituée de vecteurs propres de } A.}$$

I.1.c On vient de déterminer une base de $\mathbb{K}^n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ formée de vecteurs propres de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, ce qui permet de dire que

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable.}}$$

I.1.d Considérons les vecteurs $\mathbf{Bu}_1$, $\mathbf{Bu}_2$ et $\mathbf{Bu}_3$

$$\begin{aligned}\mathbf{Bu}_1 &= \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{Bu}_2 &= \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \\ \mathbf{Bu}_3 &= \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Les vecteurs $\mathbf{Bu}_1$ et $\mathbf{u}_1$ sont linéairement indépendants, puisque le déterminant d'ordre 2 formé par les deux premières lignes de la matrice $(\mathbf{Bu}_1, \mathbf{u}_1)$ est non nul, et on vérifie de la même manière que les vecteurs $\mathbf{Bu}_2$ et $\mathbf{u}_2$ sont linéairement indépendants, tout comme les vecteurs $\mathbf{Bu}_3$ et $\mathbf{u}_3$, ce qui veut dire que

Aucun des éléments de $\mathcal{F}$ n'est un vecteur propre commun à A et B.

I.2.a Pour déterminer le spectre de B, on calcule le polynôme caractéristique de B, noté χ_B . Celui-ci s'écrit

$$\begin{aligned}\chi_B(X) &= \det(B - XI_3) \\ &= \begin{vmatrix} 3-X & -3 & -1 \\ 0 & 2-X & 0 \\ 1 & -3 & 1-X \end{vmatrix} \\ \chi_B(X) &= (2-X)((3-X)(1-X) + 1)\end{aligned}$$

en développant par rapport à la deuxième ligne, ce qui donne

$$\chi_B(X) = -(X-2)(X^2 - 4X + 4)$$

Le polynôme $X^2 - 4X + 4$ possède une racine double égale à 2, d'où l'expression du polynôme caractéristique :

$$\chi_B(X) = -(X-2)^3$$

ce qui permet de déterminer le spectre de la matrice B.

$$\text{Sp}(B) = \{2\}$$

I.2.b On cherche à déterminer les éléments de $\text{Im}_2(B) = \text{Im}(B - 2I_3)$, qui est le sous-espace vectoriel engendré par les colonnes de la matrice

$$B - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

toutes colinéaires au vecteur $\mathbf{u}_4 = {}^t(1, 0, 1)$. On en déduit

$$\text{Im}_2(B) = \text{Vect}(\mathbf{u}_4)$$

La dimension de l'image de l'endomorphisme associé à la matrice $B - 2I_3$ valant 1, le théorème du rang permet d'écrire que la dimension du noyau de cet endomorphisme vaut 2, d'où

$$\dim(E_2(B)) = 2$$

I.2.c Il a été établi à la question I.2.a que l'ordre de multiplicité de la racine 2 du polynôme caractéristique χ_B de B valait 3, et la question I.2.b permet de dire que la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 2 ne vaut que 2. La dimension de $E_2(B)$ étant strictement inférieure à l'ordre de multiplicité de la racine, on en conclut que

B n'est pas diagonalisable.

I.3.a Considérons $X = {}^t(x, y, z)$ un vecteur de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On peut écrire $X \in E_1(A)$ si et seulement si $AX = X$, ce qui peut s'écrire encore

$$AX = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y - z \\ -x - z \\ -x - y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

soit

$$x + y + z = 0$$

De même $X \in E_2(B)$ si et seulement si $BX = 2X$, ce qui s'écrit

$$BX = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x - 3y - z \\ 2y \\ x - 3y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

soit

$$x - 3y - z = 0$$

Cela permet d'écrire que $X \in E_1(A) \cap E_2(B)$ si et seulement si les réels x, y et z vérifient le système linéaire

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - 3y - z = 0 \end{cases}$$

lequel équivaut à

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -4y - 2z = 0 \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} x = y \\ z = -2y \end{cases}$$

L'intersection de $E_1(A)$ et $E_2(B)$ est par conséquent un sous-espace vectoriel de dimension 1 engendré par le vecteur $(1, 1, -2)^\top$, qui correspond au vecteur $\mathbf{u}_5$ de l'énoncé. On en conclut

$$E_1(A) \cap E_2(B) = \text{Vect}(\mathbf{u}_5)$$

I.3.b Notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des vecteurs propres communs à A et B. Si on suppose qu'il existe $\mathbf{e} \in \mathcal{E}$, il vient $\mathbf{e} \in E_2(B)$ puisque 2 est la seule valeur propre de B. De plus, comme $\mathbf{e}$ est également valeur propre de A, deux cas sont possibles : soit $\mathbf{e} \in E_1(A)$, soit $\mathbf{e} \in E_{-2}(A)$ puisque 1 et -2 sont les deux seuls éléments du spectre de A.

D'après la question I.1.b, la dimension de $E_{-2}(A)$ vaut 1, si bien que $E_{-2}(A)$ est engendré par $\mathbf{u}_3$. À ce moment-là, $\mathbf{e}$ serait colinéaire à $\mathbf{u}_3$, ce qui est impossible d'après la question I.1.d, où il a été démontré qu'aucun élément de la famille $\mathcal{F}$, $\mathbf{u}_3$ compris, n'était un vecteur propre commun à A et B. Finalement, la seule possibilité pour $\mathbf{e}$ est d'appartenir à $E_1(A) \cap E_2(B)$ c'est-à-dire à $\text{Vect}(\mathbf{u}_5)$. Par conséquent, $\mathcal{E} \subset E_1(A) \cap E_2(B)$ et l'inclusion inverse est claire.

$$\mathcal{E} = E_1(A) \cap E_2(B)$$

I.4.a Il suffit d'effectuer le calcul

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -4 & 6 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

d'où

$$[A, B] = AB - BA = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -1 \\ -2 & 6 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix} = C$$

I.4.b Calculons le polynôme caractéristique de la matrice C

$$\chi_C(X) = \det(C - XI_3)$$

$$= \begin{vmatrix} -5 - X & 3 & -1 \\ -2 & 6 - X & 2 \\ -5 & 3 & -1 - X \end{vmatrix}$$

$$\chi_C(X) = -3(2(X+1) + 10) - (X-6)((X+5)(X+1) - 5) - 3(-2(X+5) - 2)$$

en développant par rapport à la deuxième colonne. On en déduit

$$\chi_C(X) = -6(X+6) - (X-6)(X^2 + 6X) + 6(X+6) = -X(X-6)(X+6)$$

Ainsi le polynôme caractéristique de la matrice C est scindé à racines simples, ce qui implique que C est diagonalisable et est semblable à une matrice diagonale comportant ses valeurs propres sur la diagonale, par exemple la matrice D. Finalement, on peut écrire

C est semblable à la matrice D.

De plus, deux matrices semblables ayant le même rang, il suffit de déterminer le rang de D pour obtenir le rang de C. Le rang d'une matrice diagonale est égal au nombre de ses éléments diagonaux distincts non nuls, ici 6 et -6. On en déduit que

C est de rang 2.

Lors du calcul du polynôme caractéristique, on peut s'économiser des calculs en développant par rapport à la bonne colonne, que l'on peut déterminer ici en fonction du résultat espéré : en effet, on souhaite démontrer que C est semblable à D, qui a pour éléments diagonaux 0, 6 et -6. Il convient donc de développer par rapport à la colonne (ou la ligne) contenant le terme en $X - 6$, qui devrait rester tel quel jusqu'au bout du calcul, économisant ainsi des développements et des factorisations inutiles.

II. CONDITION NÉCESSAIRE ET CONDITIONS SUFFISANTES

II.1.a Si $\mathbf{e}$ est un vecteur propre commun à A et B , il existe λ et μ appartenant à $\mathbb{K}$ tels que $A\mathbf{e} = \lambda\mathbf{e}$ et $B\mathbf{e} = \mu\mathbf{e}$. Ainsi,

$$(AB)\mathbf{e} = A(B\mathbf{e}) = A(\mu\mathbf{e}) = \mu(A\mathbf{e}) = \mu\lambda\mathbf{e}$$

De la même manière, il vient $(BA)\mathbf{e} = \lambda\mu\mathbf{e}$ de sorte que

$$[A, B]\mathbf{e} = (\mu\lambda - \lambda\mu)\mathbf{e}$$

Puisque $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, il s'agit d'un corps commutatif, d'où $\mu\lambda = \lambda\mu$, ce qui permet de conclure que $[A, B]\mathbf{e} = 0$, puis que

$$\mathbf{e} \in \text{Ker}([A, B])$$

II.1.b La question précédente nous informe que, $\mathbf{e}$ étant un vecteur propre de A et B , il est non nul et par conséquent le noyau de $[A, B]$ contient au moins un élément non nul, ce qui prouve que $\text{Ker}([A, B])$ est de dimension au moins 1. Finalement, le théorème du rang permet d'écrire que la dimension de l'image de $[A, B]$ doit nécessairement être strictement inférieure à n , soit

$$\text{rg}([A, B]) < n$$

II.2 Il s'agit ici de montrer que si $[A, B] = 0_n$, il existe $\lambda \in \text{Sp}(A)$ tel que $E_\lambda(A)$ soit inclus dans $\text{Ker}([A, B])$. Mais ici, comme $[A, B] = 0_n$, le noyau $\text{Ker}([A, B])$ est égal à $\mathbb{C}^n$ tout entier. On est assuré de l'existence d'une valeur propre de A puisque le corps considéré est $\mathbb{C}$. Ainsi, pour tout $\mu \in \text{Sp}(A)$, on a nécessairement $E_\mu(A) \subset \mathbb{C}^n = \text{Ker}([A, B])$. Ainsi,

$$\text{Si } [A, B] = 0_n, A \text{ et } B \text{ vérifient la propriété } \mathcal{H}.$$

II.3.a Écrivons la définition de la linéarité. Pour tous éléments X_1 et X_2 de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et tout scalaire λ ,

$$\psi(\lambda X + Y) = B(\lambda X + Y) = \lambda BX + BY = \lambda\psi(X) + \psi(Y)$$

Ainsi, ψ est une application linéaire. Il suffit désormais de montrer que $\psi(X) = BX$ appartient à $E_\lambda(A)$ pour tout X de $E_\lambda(A)$ pour prouver qu'il s'agit d'un endomorphisme. Soit $X \in E_\lambda(A)$ quelconque. Puisque A et B vérifient la propriété $\mathcal{H}$, il vient $E_\lambda(A) \subset \text{Ker}([A, B])$, ce qui permet d'écrire

$$[A, B]X = (AB)X - (BA)X = 0$$

soit

$$ABX = BAX$$

Mais X est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ donc $AX = \lambda X$ et

$$A(BX) = \lambda(BX)$$

On vient de démontrer que BX est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ , ce qui implique que BX appartient à $E_\lambda(A)$. Ceci prouve que

$$\text{L'application } \psi \text{ définit un endomorphisme de } E_\lambda(A).$$

II.3.b On sait que $E_\lambda(A)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ non réduit à 0. De plus, comme on travaille dans $\mathbb{C}^n$ pour cette partie, le polynôme caractéristique de ψ est

forcément scindé sur $\mathbb{C}$. Par conséquent ψ admet au moins une valeur propre $\mu \in \mathbb{C}$ ainsi qu'un vecteur propre $\mathbf{e}$ non nul associé à μ .

Comme $\psi(X) = BX$, il vient $B\mathbf{e} = \mu\mathbf{e}$. Ainsi $\mathbf{e}$ est un vecteur propre de B . De plus, $\mathbf{e} \in E_\lambda(A)$ par définition de ψ , d'où $\mathbf{e}$ est également un vecteur propre de A . On en conclut que

Il existe au moins un vecteur propre commun à A et B .

II.4 Dans cette question, on se place dans un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E de dimension 1. Si f est un endomorphisme de E , puisque E est de dimension 1, f est une homothétie et on peut écrire pour tout $\mathbf{u} \in E$, avec $\lambda \in \mathbb{C}$

$$f(\mathbf{u}) = \lambda\mathbf{u}$$

Ainsi, tout élément non nul $\mathbf{u}$ de E est vecteur propre de tout endomorphisme f de E . Cela veut dire que pour tout couple d'endomorphismes (ϕ, ψ) de E , $\mathbf{u}$ est à la fois vecteur propre de ϕ et vecteur propre de ψ . Finalement tout élément non nul $\mathbf{u}$ de E est un vecteur propre commun à tout couple d'endomorphismes (ϕ, ψ) de E .

La propriété $\mathcal{P}_1$ est vérifiée.

Pour tout $\mathbf{u}$ de E , ϕ et ψ étant des homothéties, on peut écrire

$$\begin{aligned} [\phi, \psi]\mathbf{u} &= \phi(\psi(\mathbf{u})) - \psi(\phi(\mathbf{u})) \\ &= \phi(\lambda_\psi \mathbf{u}) - \psi(\lambda_\phi \mathbf{u}) \\ [\phi, \psi]\mathbf{u} &= \lambda_\psi \lambda_\phi \mathbf{u} - \lambda_\psi \lambda_\phi \mathbf{u} = 0 \end{aligned}$$

ce qui veut dire que l'on est dans le cas où $\text{rg}([\phi, \psi]) \leq 1$.

II.5.a Comme A et B ne vérifient pas la propriété $\mathcal{H}$, pour tout $\lambda \in \text{Sp}(A)$, il existe $\mathbf{u} \in E_\lambda(A)$ tel que $\mathbf{u} \notin \text{Ker}([A, B])$. On sait que $E_\lambda(A) \subset \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ impliquant $\mathbf{u} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$. De plus, comme ici $C = [A, B]$, $\mathbf{u} \notin \text{Ker}([A, B])$ est équivalent à $C\mathbf{u} \neq 0$. Par suite,

Il existe $\mathbf{u} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ et $C\mathbf{u} \neq 0$.

II.5.b Comme $\text{rg}(C) = 1$, l'image de C est engendrée par un seul vecteur non nul. On sait que $C\mathbf{u} \neq 0$, c'est-à-dire que $\mathbf{u}$ n'est pas dans le noyau de C et est non nul. De plus, par définition, $\mathbf{v} = C\mathbf{u}$ appartient à $\text{Im}(C)$. D'où

$$\text{Im}(C) = \text{Vect}(\mathbf{v}), \text{ avec } \mathbf{v} = C\mathbf{u}$$

II.5.c Soit $X \in \text{Im}(C)$. On sait qu'il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $X = \mu C\mathbf{u}$, ce qui peut aussi s'écrire

$$X = \mu (A\mathbf{B}\mathbf{u} - B\mathbf{A}\mathbf{u})$$

Or, $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$, d'où

$$X = \mu (A(\mathbf{B}\mathbf{u}) - \lambda(\mathbf{B}\mathbf{u}))$$

soit

$$X = \mu (A - \lambda I_n)(\mathbf{B}\mathbf{u})$$

ce qui est équivalent à dire que $X \in \text{Im}_\lambda(A)$. On en conclut

$$\text{Im}(C) \subset \text{Im}_\lambda(A)$$

II.5.d Il a été vu à la question précédente que $\text{Im}(C) \subset \text{Im}_\lambda(A)$ et on sait que $\dim(\text{Im}(C)) = \text{rg}(C) = 1$, ainsi la dimension de $\text{Im}_\lambda(A)$ est au moins égale à 1, ce qui prouve la première inégalité.

Pour démontrer la deuxième inégalité, on peut raisonner par l'absurde. Supposons que $\dim(\text{Im}_\lambda(A)) \geq n$. Le théorème du rang permet d'éliminer le cas où $\dim(\text{Im}_\lambda(A)) > n$. Ainsi $\dim(\text{Im}_\lambda(A)) = n$. Cela signifie que le noyau de $A - \lambda I_n$ est réduit au vecteur nul. Or on sait que $A\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$. Cela implique que $\mathbf{u}$ est égal au vecteur nul, ce qui est impossible puisque $C\mathbf{u} \neq 0$ et C est la matrice d'une application linéaire. On est en présence d'une contradiction, ce qui prouve que l'hypothèse de départ est fausse, c'est-à-dire que $\dim(\text{Im}_\lambda(A)) \leq n - 1$. Finalement,

$$1 \leq \dim(\text{Im}_\lambda(A)) \leq n - 1$$

II.5.e Il suffit de développer les expressions :

$$\begin{aligned} [A, A - \lambda I_n] &= A(A - \lambda I_n) - (A - \lambda I_n)A \\ &= A^2 - \lambda A - (A^2 - \lambda A) \end{aligned}$$

$$[A, A - \lambda I_n] = 0_n$$

$$\begin{aligned} [B, A - \lambda I_n] &= B(A - \lambda I_n) - (A - \lambda I_n)B \\ &= BA - \lambda B - AB + \lambda B \end{aligned}$$

$$[B, A - \lambda I_n] = -(AB - BA) = -C$$

d'où

$$[A, A - \lambda I_n] = 0_n \text{ et } [B, A - \lambda I_n] = -C$$

Les applications ϕ et ψ sont évidemment linéaires. Soit $X \in \text{Im}_\lambda(A)$, il existe $X' \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $X = (A - \lambda I_n)X'$. Par suite

$$\phi(X) = AX = A(A - \lambda I_n)X'$$

Or

$$[A, A - \lambda I_n] = 0_n$$

soit

$$A(A - \lambda I_n) = (A - \lambda I_n)A$$

d'où

$$\phi(X) = (A - \lambda I_n)AX'$$

ce qui est équivalent à dire que $\phi(X)$ appartient à $\text{Im}_\lambda(A)$. De plus

$$\psi(X) = BX = B(A - \lambda I_n)X'$$

Or

$$[B, A - \lambda I_n] = -C$$

soit

$$B(A - \lambda I_n) = -C + (A - \lambda I_n)B$$

d'où

$$\psi(X) = -CX' + (A - \lambda I_n)BX'$$

On sait que $\text{Im}(C) \subset \text{Im}_\lambda(A)$, et il est clair que $(A - \lambda I_n)BX'$ appartient à $\text{Im}_\lambda(A)$. Par somme, on en déduit que $\psi(X)$ appartient également à $\text{Im}_\lambda(A)$. On peut en conclure que

Les applications ϕ et ψ définissent des endomorphismes de $\text{Im}_\lambda(A)$.

II.5.f On pose $k = \dim(\text{Im}_\lambda(A))$. D'après la question II.5.d, on sait que k appartient à l'intervalle $[[1; n - 1]]$. De plus, on pose, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$, $f(X) = AX$ et $g(X) = BX$. f et g sont clairement des endomorphismes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ dont les

restrictions à $\text{Im}_\lambda(A)$ sont respectivement ϕ et ψ . La restriction de $[f, g]$ à $\text{Im}_\lambda(A)$ est ainsi $[\phi, \psi]$ et on en déduit

$$\text{rg}([\phi, \psi]) \leq \text{rg}([f, g])$$

Or, $\text{rg}([f, g]) = \text{rg}([A, B]) = \text{rg}(C) = 1$. Dès lors, on est dans les conditions d'application de la propriété $\mathcal{P}_k$, ce qui permet de conclure qu'il existe un vecteur propre commun à ϕ et ψ . Par conséquent, il existe $X \in \text{Im}_\lambda(A)$ un vecteur propre commun à ϕ et ψ si bien que X est dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $AX = \lambda X$ et il existe $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $BX = \mu X$. Ainsi, X est un vecteur propre commun à A et B . On en conclut que

Il existe un vecteur propre commun à A et B .

II.6 Procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

- L'initialisation de la récurrence provient de la question II.4, où il a été démontré que $\mathcal{P}_1$ est vérifiée.
- Soit $n \geq 2$. On suppose la propriété $\mathcal{P}_k$ vraie pour tout entier $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$. Montrons que $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Soit E un espace vectoriel de dimension n , puis ϕ et ψ deux endomorphismes de E tels que $\text{rg}([\phi, \psi]) \leq 1$. Notons A et B les matrices de ϕ et ψ dans une base $\mathcal{B}$ arbitraire de E . Dès lors, le rang de $[A, B]$ vaut soit 0, soit 1. Il faut distinguer les deux cas.

- Dans le premier cas, $\text{rg}([A, B]) = 0$, soit $[A, B] = 0_n$. On est ici dans le cas abordé à la question II.2 et on sait que dans ce cas, A et B vérifient la propriété $\mathcal{H}$. Par conséquent, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie d'après le résultat de la question II.3.b sans que l'on ait à utiliser l'hypothèse de récurrence.
 - Dans le deuxième cas, $\text{rg}([A, B]) = 1$, et A et B ne vérifient pas la propriété $\mathcal{H}$. Par suite, on peut appliquer les résultats de la question II.5 pour clore l'hérédité.
- Ainsi par le principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Finalement,

$\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

III. ÉTUDE D'UN AUTRE CAS PARTICULIER

III.1 Écrivons l'expression de $g(P)$ avec l'expression de $P = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$. On obtient

$$g(P) = X^{2n} P \left(\frac{1}{X} \right) = \sum_{k=0}^{2n} X^{2n} a_k X^{-k} = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^{2n-k}$$

ce qui, en faisant le changement d'indice $l = 2n - k$, permet d'écrire

$$g(P) = \sum_{l=0}^{2n} a_{2n-l} X^l$$

III.2 L'application f est linéaire car la dérivation est une opération linéaire, et la linéarité de g se vérifie facilement à partir de son expression. Il reste à montrer que leurs images respectives sont incluses dans E .

Si le polynôme P de E est de degré $d \leq 2n$, son polynôme dérivé, $P' = f(P)$, est de degré inférieur ou égal à $d-1 \leq 2n-1 < 2n$. On en conclut ainsi que $f(P)$ appartient à E . D'autre part, tout polynôme P de E peut se mettre sous la forme considérée à la question III.1. Par conséquent, $g(P)$ peut s'écrire sous la forme $\sum_{l=0}^{2n} a_{2n-l} X^l$, qui correspond à la forme $\sum_{l=0}^{2n} b_l X^l$ de la question III.1 en posant $b_l = a_{2n-l}$. Cela implique que $g(P)$ appartient à E . On peut ainsi conclure.

Les applications f et g définissent des endomorphismes de E .

III.3.a Puisque P est vecteur propre de g , il est non nul, et il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $g(P) = \lambda P$. L'expression de g montre que si $g(P) = 0$, tous les coefficients du polynôme P sont nuls, donc 0 n'est pas valeur propre de g .

Tout polynôme de E peut s'écrire sous la forme étudiée à la question III.1, c'est-à-dire qu'il existe $(a_0, a_1, \dots, a_{2n}) \in \mathbb{C}^{2n+1}$ tels que $P = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$. Dans ces conditions,

on sait que $g(P)$ vaut $\sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k} X^k$. Cependant, l'égalité $g(P) = \lambda P$ entraîne

$$\sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k} X^k = \lambda \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$$

Par identification des termes de même degré dans l'égalité précédente, on obtient

$$\forall k \in \llbracket 0; 2n \rrbracket, \quad a_{2n-k} = \lambda a_k$$

Raisonnons maintenant par l'absurde en supposant que le degré de P est strictement inférieur à n . Cela se traduit par la nullité de tous les coefficients a_k pour $k \geq n$, ce qui peut également s'écrire $a_{2n-k} = 0$ pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Cependant, puisque $a_{2n-k} = \lambda a_k$ pour tout $k \in \llbracket 0; 2n \rrbracket$ et λ est non nul, cela entraîne la nullité des a_k pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, et donc de P . C'est absurde puisque P est un vecteur propre de g . On en déduit que

Si P est un vecteur propre de g , $\deg(P) \geq n$.

III.3.b Appliquons g au polynôme $X^n \in E$, de degré n :

$$g(X^n) = X^{2n} \frac{1}{X^n} = X^n$$

Ainsi

X^n est vecteur propre de g pour la valeur propre 1.

III.4.a Soit $i \in \llbracket 1; 2n \rrbracket$. Pour tout polynôme P de degré k , le polynôme P' est nul si $k = 0$ (c'est-à-dire si P est constant) et vaut $k - 1$ sinon. Par récurrence immédiate, on en déduit que pour tout $i \in \llbracket 1; 2n \rrbracket$, le polynôme $f^i(P) = P^{(i)}$ est nul si $k < i$ et de degré $k - i$ sinon. En particulier, il est nul si et seulement si P est de degré inférieur ou égal à $i - 1$. En d'autres termes,

$$\text{Ker}(f^i) = \mathbb{C}_{i-1}[X]$$

III.4.b D'après le résultat de la question précédente, 0 est valeur propre de f^i avec un ordre de multiplicité au moins égal à la dimension de $\mathbb{C}_{i-1}[X]$ soit i .

Réciproquement, soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de f^i et P un vecteur propre associé. Alors,

$$f^i(P) = \lambda P \quad \text{puis} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad f^{ik}(P) = (f^i)^k(P) = \lambda^k P$$

En prenant k tel que $ki > 2n$, il vient $f^{ki}(P) = P^{(ik)} = 0$ et donc $\lambda^k P = 0$. Mais P étant non nul, on a nécessairement $\lambda^k = 0$ donc $\lambda = 0$. Finalement,

$$\text{Sp}(f^i) = \{0\}$$

Le résultat démontré ici est un cas particulier du résultat plus général qui assure que tout endomorphisme h nilpotent, c'est-à-dire pour lequel il existe k tel que $h^k = 0$, a un spectre réduit à $\{0\}$ (qu'on peut également démontrer par les polynômes annulateurs).

Sur cet exemple précis, on peut également remarquer que si P est un polynôme non nul, $f(P)$ est un polynôme de degré strictement inférieur au degré de P . Si λ est non nul, λP a même degré que P , donc ils ne peuvent pas être égaux.

III.5 La question III.4 permet de dire que les seuls vecteurs propres de f^i sont les éléments de $\mathbb{C}_{i-1}[X]$. Par conséquent, si P est un vecteur propre de f^i , P est nécessairement de degré inférieur ou égal à $i - 1$. Or, la question III.3.a implique que si P est également un vecteur propre de g , son degré doit être supérieur ou égal à n . Ainsi, le degré de P doit satisfaire la double inégalité

$$i - 1 \leq \deg(P) \leq n$$

qui est équivalente à $i \geq n - 1$. On a donc démontré que si les endomorphismes ont un vecteur propre commun, $n + 1 \leq i$.

Pour démontrer la réciproque, on remarque que si $i \geq n + 1$, X^n est un vecteur propre commun à f^i et g . Ainsi,

Les endomorphismes f^i et g ont un vecteur propre en commun si et seulement si $i \geq n - 1$.

III.6 Pour trouver les matrices A_n et B_n , il suffit de calculer les images des vecteurs de la base canonique $\mathcal{B}_C = (1, X, \dots, X^{2n})$. D'une part,

$$f(1) = 0 \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 1; 2n \rrbracket, \quad f(X^k) = iX^{k-1}$$

D'autre part, $\forall i \in \llbracket 0; 2n \rrbracket, \quad g(X^i) = X^{2n-i}$

Ainsi
$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 2n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_n = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

III.7.a Il suffit d'appliquer les résultats de la question précédente quand $n = 1$ et on trouve

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Effectuons ensuite les deux produits demandés

$$(A_1)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et
$$(A_1)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

III.7.b Développons l'expression de $[A_1, B_1]$

$$\begin{aligned} [A_1, B_1] &= A_1 B_1 - B_1 A_1 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ [A_1, B_1] &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On constate que la deuxième colonne de la matrice est clairement indépendante des deux autres colonnes. Par contre, la troisième colonne de $[A_1, B_1]$ est égale à l'opposée de la première. On en déduit

$$\boxed{\text{rg}([A_1, B_1]) = 2}$$

On procède de la même manière pour la matrice $[(A_1)^2, B_1]$. Le calcul donne

$$\begin{aligned} [(A_1)^2, B_1] &= (A_1)^2 B_1 - B_1 (A_1)^2 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ [(A_1)^2, B_1] &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Les première et troisième colonnes de la matrice sont linéairement indépendantes, mais la seconde colonne est nulle. Une fois encore, le rang de la matrice est 2.

$$\boxed{\text{rg}([(A_1)^2, B_1]) = 2}$$

III.7.c Dans la question II.1.b, on a montré qu'une condition nécessaire pour que deux matrices A, B de $\mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ aient un vecteur propre commun est que le rang de $[A, B]$ soit strictement inférieur à m . Les matrices A_1 et B_1 sont dans ce cas pour $m = 3$.

On sait par ailleurs que A_1 est la matrice de f^1 et que B_1 est la matrice de g . Or, le résultat de la question III.5 permet d'affirmer que A_1 et B_1 n'ont pas de vecteur propre commun, puisque ici $i = 1 < n + 1 = 2$. Ainsi,

$$\boxed{\text{La condition } \text{rg}([A, B]) < n \text{ est nécessaire mais pas suffisante.}}$$

Dans la question II.6, on démontrait une condition suffisante pour que deux endomorphismes ϕ et ψ d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension $k \in \mathbb{N}^*$ aient un vecteur propre commun, à savoir que $\text{rg}([\phi, \psi]) \leq 1$. Les matrices $(A_1)^2$ et B_1 ne vérifient pas cette condition, bien qu'elles représentent chacune un endomorphisme d'un même espace vectoriel.

Cependant, $(A_1)^2$ est la matrice de f^2 qui admet un vecteur propre commun avec g puisqu'à ce moment-là, $i = 2 \geq n + 1 = 2$, et on peut ainsi appliquer le résultat de la question III.5. Par conséquent,

$$\boxed{\text{La condition } \text{rg}([\phi, \psi]) \leq 1 \text{ est suffisante mais pas nécessaire.}}$$

PREMIÈRE PARTIE

1 L'endomorphisme A admet dans la base $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n)$ une matrice diagonale de coefficients diagonaux deux à deux distincts; il possède donc n valeurs propres distinctes et les sous-espaces propres associés sont les droites vectorielles $\mathbb{C}x_i$ pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Soit maintenant un endomorphisme B de X commutant à A : il laisse stable tout sous-espace propre de A , si bien que

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad B(x_i) \in \mathbb{C}x_i$$

Ceci montre que $\mathcal{B}$ est également une base de vecteurs propres de B , dans laquelle cet endomorphisme est par conséquent représenté par une matrice diagonale. Ainsi,

Tout endomorphisme B de X commutant à A est aussi représenté par une matrice diagonale dans la base $\mathcal{B}$.

Rappelons pourquoi les sous-espaces propres de A sont stables par tout endomorphisme B commutant à A . Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $x \in \text{Ker}(A - \lambda \text{Id})$; comme $AB = BA$, on a $A(Bx) = B(Ax) = \lambda Bx$ ce qui signifie que $Bx \in \text{Ker}(A - \lambda \text{Id})$. Ainsi

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} \quad B(\text{Ker}(A - \lambda \text{Id})) \subset \text{Ker}(A - \lambda \text{Id}) \quad \text{ce qu'on voulait.}$$

2.a Supposons que les seuls sous-espaces de X stables par $A_1, \dots, A_p$ soient $\{0\}$ et X , et considérons un endomorphisme B de X commutant à $A_1, \dots, A_p$. Comme X est un espace vectoriel complexe, B est un endomorphisme scindé et il possède donc une valeur propre λ . L'espace propre associé $\text{Ker}(B - \lambda \text{Id})$ – qui n'est pas réduit au vecteur nul – est stable par $A_1, \dots, A_p$ puisqu'ils commutent tous à B : c'est donc X . En conséquence, $B = \lambda \text{Id}$; ainsi,

Si les seuls sous-espaces de X stables par $A_1, \dots, A_p$ sont $\{0\}$ et X , alors tout endomorphisme B de X commutant à $A_1, \dots, A_p$ est un multiple scalaire de l'identité.

On a ici affaire à un cas particulier du lemme de Schur, qui intervient dans la théorie de la représentation des groupes.

2.b Pour construire un contre-exemple, fixons $n = p = 2$ et appelons A_1, A_2 les endomorphismes admettant pour matrices dans la base $\mathcal{B} = (x_1, x_2)$:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit B un endomorphisme commutant avec A_1 et A_2 . Comme A_1 admet dans la base $\mathcal{B}$ une matrice diagonale à coefficients distincts, on déduit de la question 1 que la matrice M de B dans la base $\mathcal{B}$ est également diagonale. Notons-la $M = \text{Diag}(a, b)$; la relation de commutation $BA_2 = A_2B$ s'écrit alors

$$\begin{aligned} MM_2 = M_2M &\iff \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ MM_2 = M_2M &\iff a = b \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $M = aI_2$ et $B = a \text{Id}$

Nous avons prouvé que tout endomorphisme B de X commutant à A_1 et A_2 est un multiple scalaire de l'identité. Cependant, la forme des matrices M_1 et M_2 montre clairement que la droite $\mathbb{C}x_1$ est stable par A_1 et A_2 . Comme elle n'est égale ni à X ni à $\{0\}$ pour des raisons de dimensions, on peut alors en déduire que

La réciproque de la propriété établie à la question précédente est fausse.

Pour montrer que cette réciproque est fausse, il nous faut considérer des endomorphismes laissant stable un sous-espace de X distinct de $\{0\}$ et de X : c'est ce qui nous a incité à étudier deux endomorphismes en dimension 2 possédant une droite propre ; il suffit pour cela de prendre les endomorphismes canoniquement associés à des matrices triangulaires supérieures.

DEUXIÈME PARTIE

3 Notons $L_0 = K_0F_0 - q^{-2}F_0K_0$. Par définition de F_0 et K_0 , on a

$$K_0F_0(x_n) = K_0(0) = 0 \quad \text{et} \quad F_0K_0(x_n) = F_0(q^{1-n}x_n) = 0$$

d'où $L_0(x_n) = 0$. Prenons maintenant $p \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$. Il vient

$$\begin{cases} K_0F_0(x_p) = K_0(x_{p+1}) = q^{n-1-2p}x_{p+1} = q^{-2}q^{n+1-2p}x_{p+1} \\ F_0K_0(x_p) = F_0(q^{n+1-2p}x_p) = q^{n+1-2p}x_{p+1} \end{cases}$$

si bien que $L_0(x_p) = 0$. Ainsi, l'endomorphisme L_0 envoie tous les vecteurs de la base $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n)$ sur le vecteur nul, ce qui permet d'affirmer que $L_0 = 0$ soit

$$K_0F_0 - q^{-2}F_0K_0 = 0$$

4 Par définition de F_0 , on a

$$\text{Im } F_0 = \text{Vect} \{F_0(x_1), \dots, F_0(x_n)\} = \text{Vect} \{x_2, \dots, x_n\}$$

donc F_0 est de rang $n-1$. D'après le théorème du rang, $\text{Ker } F_0$ est de dimension 1 : comme il contient $x_n \neq 0$, alors $\text{Ker } F_0 = \text{Vect} \{x_n\}$. Enfin, il est clair que $F_0^n = 0$ par définition de cet endomorphisme.

Maintenant, considérons la propriété $\mathcal{P}$ définie pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ par $\mathcal{P}(k)$: « si le sous-espace A est stable par F_0 et de dimension k , alors $A = \text{Vect} \{x_{n+1-k}, \dots, x_n\}$ ».

- $\mathcal{P}(0)$ est vraie puisque $A = \{0\} = \text{Vect } \emptyset$ lorsque $\dim A = 0$.
- $\mathcal{P}(k) \implies \mathcal{P}(k+1)$: supposons la propriété $\mathcal{P}$ vraie au rang $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ et considérons un sous-espace A stable par F_0 et de dimension $k+1$. Dans ce cas, $F_0(A) \subset A$ et donc $F_0(F_0(A)) \subset F_0(A)$. De surcroît, $F_0(A) = A$ implique

$$F_0^n(A) = A \neq \{0\}$$

ce qui contredit la relation $F_0^n = 0$; par conséquent, on a $F_0(A) \subsetneq A$ et $\dim F_0(A) \leq k$. Le théorème du rang appliqué à $F_0|_A$ fournit

$$\dim A = \dim F_0(A) + \dim \text{Ker } F_0|_A \leq \dim F_0(A) + \dim \text{Ker } F_0$$

d'où $\dim F_0(A) \geq \dim A - \dim \text{Ker } F_0 = k$

Ainsi, $\dim F_0(A) = k$ et, comme cet espace est stable par F_0 , on déduit de la proposition $\mathcal{P}(k)$ que

$$F_0(A) = \text{Vect} \{x_{n+1-k}, \dots, x_n\} = F_0(\text{Vect} \{x_{n-k}, \dots, x_{n-1}\})$$

Pour tout vecteur $a \in A$, il existe ainsi un vecteur $x \in \text{Vect} \{x_{n-k}, \dots, x_{n-1}\}$ tel que $F_0(a) = F_0(x)$ d'où $F_0(a - x) = 0$ soit $a - x \in \text{Ker } F_0$. Il s'ensuit que

$$A \subset \text{Vect} \{x_{n-k}, \dots, x_{n-1}\} + \text{Ker } F_0 = \text{Vect} \{x_{n-k}, \dots, x_n\}$$

Ces espaces étant de dimension $k+1$, l'inclusion ci-dessus est en fait une égalité, ce qui prouve finalement que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

- **Conclusion** : d'après le principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Autrement dit,

Les sous-espaces vectoriels de X stables par F_0 sont $\{0\}$ et les $\text{Vect} \{x_k, \dots, x_n\}$ pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

En outre, la famille $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n)$ est constituée de vecteurs propres de K_0 donc les espaces susmentionnés sont tous stables par F_0 . De ce fait,

Les sous-espaces vectoriels de X stables par F_0 et K_0 sont $\{0\}$ et les $\text{Vect} \{x_k, \dots, x_n\}$ pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

Ces espaces sont également les $\text{Im } F_0^N = \text{Ker } F_0^{n-N}$ pour $N \in \llbracket 0; n \rrbracket$. On peut d'ailleurs, en utilisant le fait que l'endomorphisme F_0 est nilpotent et de rang $n-1$, prouver que si E est un sous-espace de X stable par F_0 et de dimension $s \in \llbracket 0; n \rrbracket$, alors $(F_0|_E)^s = 0$ puis $E = \text{Ker } F_0^s$. Ensuite, on vérifie sans peine que l'on a $\text{Ker } F_0^s = \text{Vect} \{x_{n+1-s}, \dots, x_n\}$, ce qui permet de conclure.

- 5** Pour tout entier $p > 1$, on a

$$E_0 K_0(x_p) = E_0(q^{n+1-2p} x_p) = q^{n+1-2p} E_0(x_p)$$

et $K_0(E_0 x_p) = q^{n+3-2p} E_0(x_p)$ puisque $E_0(x_p)$ est colinéaire à x_{p-1} , si bien que $(K_0 E_0 - q^2 E_0 K_0)(x_p) = 0$. Pour $p = 1$, il vient

$$K_0 E_0(x_1) = K_0(0) = 0 \quad \text{et} \quad E_0 K_0(x_1) = E_0(q^{n-1} x_1) = 0$$

donc $(K_0 E_0 - q^2 E_0 K_0)(x_1) = 0$. Comme la famille $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n)$ constitue une base de X ,

$$K_0 E_0 - q^2 E_0 K_0 = 0$$

- 6** Pour tout $p > 1$, on a

$$E_0(x_p) = (q - q^{-1})^{-2} (q^n + q^{-n} - q^{n+2-2p} - q^{2p-n-2}) x_{p-1}$$

d'après l'énoncé. Pour $p \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, il vient

$$E_0 F_0(x_p) = E_0(x_{p+1}) = (q - q^{-1})^{-2} (q^n + q^{-n} - q^{n-2p} - q^{2p-n}) x_p$$

et cette relation est encore valable pour $p = n$ puisque

$$E_0 F_0(x_n) = E_0(0) = 0$$

De même, il vient pour $p \in \llbracket 2; n \rrbracket$

$$F_0 E_0(x_p) = (q - q^{-1})^{-2} (q^n + q^{-n} - q^{n+2-2p} - q^{2p-n-2}) x_p$$

et cette relation est encore valable pour $p = 1$ puisque $F_0 E_0(x_1) = F_0(0) = 0$. Par conséquent, on a pour tout $p \in \llbracket 1; n \rrbracket$

$$\begin{aligned} (E_0 F_0 - F_0 E_0)(x_p) &= (q - q^{-1})^{-2} (q^{n+2-2p} - q^{n-2p} + q^{2p-n-2} - q^{2p-n}) x_p \\ &= (q - q^{-1})^{-2} ((q - q^{-1}) q^{n+1-2p} + (q^{-1} - q) q^{2p-n-1}) x_p \\ &= (q - q^{-1})^{-1} (q^{n+1-2p} - q^{2p-n-1}) x_p \\ &= (q - q^{-1})^{-1} (K(x_p) - K^{-1}(x_p)) \\ (E_0 F_0 - F_0 E_0)(x_p) &= (q - q^{-1})^{-1} (K - K^{-1})(x_p) \end{aligned}$$

puisque K est inversible et qu'alors

$$\forall p \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad K(x_p) = q^{n+1-2p} x_p \implies K^{-1}(x_p) = q^{2p-n-1} x_p$$

La famille $\mathcal{B}$ étant une base de X , on peut enfin affirmer que

$$\boxed{E_0 F_0 - F_0 E_0 = (q - q^{-1})^{-1} (K - K^{-1})}$$

7 Nous avons montré à la question 4 que les sous-espaces vectoriels de X stables par F_0 et K_0 sont $\{0\}$ et les $\text{Vect}\{x_k, \dots, x_n\}$ pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Parmi ceux-ci, $\{0\}$ et $X = \text{Vect}\{x_1, \dots, x_n\}$ sont bien entendu stables par E_0 . Par contre, par définition de E_0 , on a pour tout $k \geq 2$

$$E_0(x_k) \notin \text{Vect}\{x_k, \dots, x_n\}$$

ce qui montre que cet espace $\text{Vect}\{x_k, \dots, x_n\}$ n'est pas stable par E_0 . De ce fait,

$$\boxed{X \text{ et } \{0\} \text{ sont les seuls sous-espaces vectoriels de } X \text{ stables par } E_0, F_0 \text{ et } K_0.}$$