



L'objectif de ce sujet est d'établir le théorème de Perron-Frobenius pour une certaine classe de matrices symétriques. Ce théorème étudie les espaces propres d'une matrice associés aux valeurs propres de module maximal. Une application, en conclusion, montre une ouverture à l'analyse spectrale des matrices à coefficients positifs.

- La partie I permet d'obtenir des résultats préliminaires, utiles pour les parties suivantes.
- La partie II examine, à titre d'exemple, le cas des matrices à coefficients strictement positifs de taille deux.
- La partie III s'intéresse au lien entre le rayon spectral d'une matrice et le comportement asymptotique de la suite de ses puissances successives ; elle est indépendante de la partie II.
- La partie IV donne une démonstration du théorème pour une classe de matrices symétriques à coefficients positifs ; elle est indépendante des parties II et III.

Notations et définitions

$\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels ou l'ensemble $\mathbb{C}$ des complexes.

Soit n et p deux entiers naturels non nuls.

- On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.
- Si $A = (A_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on note $|A|$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont les coefficients sont $|A_{ij}|$ ($1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$).
- Une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est dite positive (respectivement strictement positive) lorsque tous ses coefficients sont positifs ou nuls (respectivement strictement positifs). La notation $A \geq 0$ (respectivement $A > 0$) signifie que la matrice A est positive (respectivement strictement positive).
- Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, la notation $A \geq B$ (respectivement $A > B$) signifie que la matrice $A - B$ est positive (respectivement strictement positive). De même, la notation $A \leq B$ (respectivement $A < B$) signifie que la matrice $B - A$ est positive (respectivement strictement positive).
- Les propriétés suivantes pourront être librement utilisées (sous réserve que les opérations correspondantes puissent être envisagées) :
 - $|A + B| \leq |A| + |B|$;
 - $|A^\top| = |A|^\top$;
 - si $\gamma \in \mathbb{K}$, alors $|\gamma A| = |\gamma| |A|$;
 - si $A \geq 0$ et $B \geq 0$, alors $AB \geq 0$.
- On rappelle que le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est défini, pour tous vecteurs X et Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, par

$$(X | Y) = X^\top Y = \sum_{k=1}^n X_k Y_k, \quad \text{où } X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}.$$

La norme euclidienne (associée à ce produit scalaire) du vecteur X est alors donnée par

$$\|X\| = \sqrt{X^\top X} = \left(\sum_{k=1}^n X_k^2 \right)^{1/2}.$$

- Le spectre d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $\text{sp}(A)$.
- Le rayon spectral d'une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, de spectre non vide, est le réel positif ou nul, noté $\rho(A)$, défini par

$$\rho(A) = \max\{|\lambda| \mid \lambda \in \text{sp}(A)\}.$$

- On dit qu'une norme $N : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{R}$ est sous-multiplicative si, pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$N(AB) \leq N(A)N(B).$$

I Résultats préliminaires

Q 1. Soit n un entier naturel, A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et X un vecteur de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\text{si } A > 0, X \geqslant 0 \text{ et } X \neq 0, \text{ alors } AX > 0,$$

et que

$$|AB| \leqslant |A||B|.$$

Q 2. Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour deux vecteurs $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

En déduire que si n est un entier naturel et $z_1, \dots, z_n, w_1, \dots, w_n$ sont des nombres complexes, alors

$$\sum_{k=1}^n |z_k| |w_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^n |z_k|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^n |w_k|^2 \right)^{1/2}.$$

Q 3. Soit z un nombre complexe tel que $|1+z| = 1+|z|$. Montrer que $z \in \mathbb{R}_+$. En déduire que, si z et z' sont deux nombres complexes vérifiant $|z+z'| = |z|+|z'|$ et $z \neq 0$, alors

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}_+ \mid z' = \alpha z.$$

Q 4. Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $z_1, \dots, z_n$ des nombres complexes non tous nuls tels que

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| = \sum_{k=1}^n |z_k|.$$

Montrer que

$$\exists \theta \in \mathbb{R} \mid \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, z_k = e^{i\theta} |z_k|.$$

Dans le cas où $z_1 \neq 0$, on pourra appliquer le résultat de la question précédente aux couples (z_1, z_k) pour $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$.

II Matrices strictement positives de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Soit a, b, c et d des nombres réels strictement positifs et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Q 5. Exprimer le discriminant Δ du polynôme caractéristique de A en fonction de a, b, c et d .

Q 6. Montrer que $\Delta > 0$. En déduire qu'il existe deux réels λ et μ , vérifiant $\lambda < \mu$, tels que A soit semblable à la matrice $\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Q 7. Montrer que $|\lambda| < \mu$.

Q 8. Montrer que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une matrice L non nulle si et seulement si $\mu = 1$. En cas de convergence, préciser le rang de L puis montrer que L est la matrice d'un projecteur de $\mathbb{R}^2$.

Q 9. Soit α et β deux réels de $]0, 1[$ et B la matrice $\begin{pmatrix} 1-\alpha & \beta \\ \alpha & 1-\beta \end{pmatrix}$. Montrer que B est semblable à la matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-\alpha-\beta \end{pmatrix}$ et donner une matrice S de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, inversible, telle que $B = SDS^{-1}$.

Q 10. En déduire que la suite $(B^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une matrice Λ que l'on explicitera.

III Normes sous-multiplicatives sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; rayon spectral

III.A – Exemples de normes sous-multiplicatives sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

Pour toute matrice $A = (A_{ij})_{1 \leqslant i, j \leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\sum_{j=1}^n |A_{ij}| \right) \quad \text{et} \quad \|A\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |A_{ij}|^2 \right)^{1/2}.$$

Q 11. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Q 12. On admet que $\|\cdot\|_2$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; montrer que cette norme est sous-multiplicative.

Q 13. Soit N une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et S une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que l'on définit une norme sous-multiplicative ν sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ en posant $\nu(A) = N(S^{-1}AS)$ pour toute $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

III.B – Rayon spectral

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

III.B.1)

- Q 14.** Soit S une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Comparer $\rho(A)$ et $\rho(S^{-1}AS)$.
- Q 15.** Justifier que A est trigonalisable. Comparer, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $\rho(A^k)$ et $\rho(A)^k$ et, pour $\alpha \in \mathbb{C}$, $\rho(\alpha A)$ et $\rho(A)$.
- Q 16.** Montrer que, pour toute norme N sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\rho(A) \leq N(A)$.
On pourra fixer une valeur propre λ de A et mettre en évidence une matrice $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, non nulle, telle que $AH = \lambda H$.

III.B.2)

Le but de cette section est de montrer que, pour tout réel strictement positif $\varepsilon > 0$, il existe une norme N sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, sous-multiplicative (dépendant de A et de ε), telle que

$$N(A) \leq \rho(A) + \varepsilon.$$

À cette fin, on introduit, pour tout réel strictement positif τ , la matrice diagonale

$$D_\tau = \text{diag}(1, \tau, \dots, \tau^{n-1})$$

et on considère une matrice T triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- Q 17.** Calculer le produit $D_\tau^{-1}TD_\tau$ en précisant, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, l'expression du coefficient en position (i, j) de la matrice $D_\tau^{-1}TD_\tau$ en fonction de τ et des coefficients de la matrice T .
- Q 18.** Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $\tau \in \mathbb{R}$ vérifiant $|\tau| \leq \delta$, on a $\|D_\tau^{-1}TD_\tau\|_\infty \leq \rho(T) + \varepsilon$.
- Q 19.** Conclure.

III.B.3)

- Q 20.** Utiliser ce qui précède pour montrer que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers la matrice nulle si et seulement si $\rho(A) < 1$.