

X/ENS Maths PC 2018 — Corrigé

PARTIE I

Donnons-nous une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$ ainsi que deux vecteurs X et Y dans $\{-1, 1\}^n$. Notons que

$${}^tXAY = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j a_{i,j}$$

est la somme des éléments de la matrice $(x_i y_j a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$, obtenue à partir de A en multipliant pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ la i^{e} ligne par x_i , et pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ la j^{e} colonne par y_j .

Pour se forger une intuition, on peut penser à l'image suivante. Plutôt qu'à une matrice A à coefficients dans $\{-1, 1\}$, pensons à un damier de taille $n \times n$ rempli de jetons bifaces noirs et blancs, et dont les faces visibles sont initialement données par la matrice A (1 pour blanc et -1 pour noir). À chaque tour, vous avez le droit de retourner tous les jetons d'une ligne ou bien d'une colonne, comme au jeu *Othello*. La quantité tXAY représente alors l'avance qu'ont les blancs par rapport aux noirs, si l'on a retourné toutes les lignes i pour lesquelles $x_i = -1$, et toutes les colonnes j pour lesquelles $y_j = -1$.

Si l'on poursuit cette image, la quantité $M(A)$ représente l'avance maximale que peuvent atteindre les blancs en jouant de manière optimale. Une question naturelle se pose : est-il possible d'atteindre une configuration sans jetons noirs ? Autrement dit, peut-on avoir $M(A) = n^2$? Cette question sera résolue à la fin de la première partie.

I.1 Un élément de $\mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$ est déterminé par ses n^2 coefficients pris dans l'ensemble $\{-1, 1\}$ de cardinal 2 d'où

$$\text{Card } \mathcal{M}_n(\{-1, 1\}) = 2^{n^2}$$

De manière plus formelle, la phrase « un élément de $\mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$ est déterminé par ses n^2 coefficients pris dans $\{-1, 1\}$ » signifie que l'application

$$\varphi: \begin{cases} \mathcal{M}_n(\{-1, 1\}) & \longrightarrow \{-1, 1\}^{n^2} \\ (a_{i,j}) & \longmapsto (\underbrace{a_{1,1}, a_{1,2}, \dots, a_{1,n}}_{\text{ligne 1}}, \underbrace{a_{2,1}, a_{2,2}, \dots, a_{2,n}}_{\text{ligne 2}}, \dots) \end{cases}$$

est bijective. On en déduit que les ensembles de départ $\mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$ et d'arrivée $\{-1, 1\}^{n^2}$ ont le même cardinal, et on conclut en notant que $\text{Card } \{-1, 1\}^{n^2} = (\text{Card } \{-1, 1\})^{n^2} = 2^{n^2}$.

Un tel niveau de précision n'est cependant pas exigé. En combinatoire, l'usage est d'adopter un style de rédaction plus informel que dans les autres branches des mathématiques.

Par ailleurs, la matrice nulle n'appartient pas à $\mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$, donc

$$\text{L'ensemble } \mathcal{M}_n(\{-1, 1\}) \text{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

I.2 Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$ et $k \in S(A)$. Par définition de $S(A)$, il existe des vecteurs $X, Y \in \{-1, 1\}^n$ tels que

$$k = {}^t X A Y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i y_j$$

Ainsi k est un entier relatif car c'est une somme de 1 et -1 . D'après l'inégalité triangulaire,

$$|k| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| |x_i| |y_j| = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n 1 = n^2$$

Les entiers $a_{i,j} x_i y_j$ valent -1 ou 1 . En particulier, ils sont impairs, de sorte que k s'écrit comme une somme de n^2 entiers impairs. Il en découle que k a la même parité que n^2 , donc que n . En particulier, si n est pair, alors $1 \notin S(A)$, et si n est impair, alors $0 \notin S(A)$. En conclusion,

$$S(A) \text{ est strictement inclus dans } \{-n^2, \dots, n^2\}.$$

Montrons à présent que $S(A)$ est symétrique. Soit $k \in S(A)$. Il existe des vecteurs $X, Y \in \{-1, 1\}^n$ tels que $k = {}^t X A Y$. Comme l'ensemble $\{-1, 1\}$ est stable par multiplication par -1 , le vecteur $-Y$ appartient également à $\{-1, 1\}^n$. Ceci implique que $-k = {}^t X A (-Y) \in S(A)$. Réciproquement, dans le cas où $-k \in S(A)$, on déduit de ce qui précède que $k = -(-k) \in S(A)$.

$$\text{Un entier } k \text{ est dans } S(A) \text{ si et seulement si } -k \text{ est dans } S(A).$$

I.3 Notons que l'application

$$\varphi: \begin{cases} \{-1, 1\}^n & \longrightarrow \{-1, 1\}^n \\ Y = (y_1, \dots, y_n) & \longmapsto DY = (d_{1,1}y_1, \dots, d_{n,n}y_n) \end{cases}$$

est bien définie. Les coefficients diagonaux de D sont tous dans $\{-1, 1\}$ et, comme $1^2 = (-1)^2 = 1$, on en déduit que D^2 est la matrice identité d'où $\varphi \circ \varphi = \text{id}$. En particulier, φ est une bijection sur $\{-1, 1\}^n$. De la même manière, on montre que l'application $\psi: X \mapsto {}^t C X$ réalise une bijection sur $\{-1, 1\}^n$. Il vient que

$$\begin{aligned} k \in S(B) &\iff \exists X, Y \in \{-1, 1\}^n \quad k = {}^t X C A D Y \\ &\iff \exists X, Y \in \{-1, 1\}^n \quad k = {}^t \left({}^t C X \right) A (D Y) \\ &\iff \exists X, Y \in \{-1, 1\}^n \quad k = {}^t \psi(X) A \varphi(Y) \\ &\iff \exists X', Y' \in \{-1, 1\}^n \quad k = {}^t X' A Y' \quad (\psi \text{ et } \varphi \text{ bijectives}) \\ k \in S(B) &\iff k \in S(A) \end{aligned}$$

car ψ et φ sont des bijections sur $\{-1, 1\}^n$. On conclut

$$S(A) = S(B)$$

I.4 Introduisons deux vecteurs $X = (x_1, x_2)$ et $Y = (y_1, y_2)$ de $\{-1, 1\}^2$ et calculons

$${}^t X I Y = (x_1 \quad x_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (x_1 + x_2)(y_1 + y_2)$$

Or la somme $x_1 + x_2$ ne peut prendre comme valeurs que $-2, 0$ ou 2 , et il en va de même pour la somme $y_1 + y_2$. Cela implique que $S(I) \subset \{-4, 0, 4\}$. Montrons que

cette inclusion est en réalité une égalité. L'ensemble $S(I)$ étant symétrique d'après la question I.2, il suffit pour cela de montrer que $0 \in S(I)$ et $4 \in S(I)$, ce qui se fait par des choix judicieux de vecteurs X et Y :

$$0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad 4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

d'où

$$S(I) = \{-4, 0, 4\}$$

Il est possible de prouver ce résultat de manière toute autre, en calculant ${}^tX I Y$ pour toutes les valeurs possibles des vecteurs X et Y dans $\{-1, 1\}^2$. C'est faisable, mais fastidieux et surtout inélégant, puisqu'il y a 16 cas à traiter. En revanche, cette manière de procéder est automatisable. Heureusement pour nous, des arguments de symétrie permettent de réduire le nombre de cas à traiter.

D'après la démonstration de la question I.2, l'ensemble $S(J)$ est constitué d'entiers ayant même parité que $n = 2$, donc pairs et compris entre -4 et 4 . Ainsi, $S(J)$ est inclus dans $\{-4, -2, 0, 2, 4\}$. Calculons ${}^tX J Y$:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ y_1 - y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 - x_2 y_2$$

- Supposons que ${}^tX J Y = 4$. Nécessairement $x_1 y_1 = 1$, $x_1 y_2 = 1$, $x_2 y_1 = 1$ et $x_2 y_2 = -1$. Les trois premières égalités impliquent que $x_1 = y_1$, $x_1 = y_2$ et $x_2 = y_1$ si bien que $x_2 = y_2$, ce qui contredit la quatrième égalité.
- Supposons que ${}^tX J Y = 0$. Alors $x_1(y_1 + y_2) = x_2(y_2 - y_1)$. Deux cas sont alors possibles : $y_1 + y_2 = y_2 - y_1$ ou $y_1 + y_2 = y_1 - y_2$, d'où $y_1 = 0$ ou $y_2 = 0$, ce qui contredit le fait que $y_1, y_2 \in \{-1, 1\}$.
- La symétrie de $S(J)$ impose que $S(J) \subset \{-2, 2\}$. En outre,

$$2 = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}}^{{}^tX} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}^Y \in S(J)$$

d'où $-2 \in S(J)$ par symétrie.

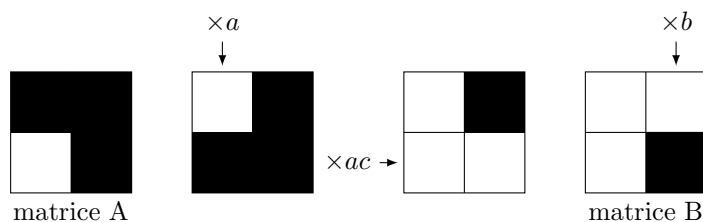
En résumé,

$$S(J) = \{-2, 2\}$$

Maintenant, considérons une matrice quelconque $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\{-1, 1\})$. Définissons la matrice

$$B = \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & ac \end{pmatrix}}^C \overbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}^A \overbrace{\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}}^D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & ac \end{pmatrix} \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ ac & bd \end{pmatrix}}^{AD} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & abcd \end{pmatrix}$$

Les matrices C et D ont été trouvées en jouant à *Othello* (voir remarque préliminaire). Par exemple, supposons qu'initialement toutes les cases soient noires, hormis celle en bas à gauche. On cherche à effectuer une série de coups pour que toutes les cases, sauf peut-être celle en bas à droite, soient blanches.



Les opérations effectuées sont

- retournement de la première colonne (multiplication par a) : bien entendu, si la première case de cette colonne était blanche, alors $a = 1$ et la multiplication par a revient à ne rien faire,
- retournement de la deuxième ligne (multiplication par ac),
- retournement de la deuxième colonne (multiplication par b).

Le retournement des colonnes se traduit par la multiplication à droite par la matrice D, et celui des lignes par la multiplication à gauche par la matrice C, il n'y a plus qu'à reporter les coefficients.

D'après la question I.3, on a l'égalité $S(A) = S(B)$, avec B valant I ou J suivant la valeur de $abcd$, d'où

$$S(A) = \begin{cases} \{-4, 0, 4\} & \text{si le produit des coefficients de A est } 1 \\ \{-2, 2\} & \text{si le produit des coefficients de A est } -1 \end{cases}$$

I.5 Justifions les équivalences par doubles implications.

- (a) $\implies$ (b) : supposons que $n^2 \in S(A)$, alors

$$\exists x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \{-1, 1\} \quad n^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} x_i y_j$$

Comme tous les n^2 termes $a_{i,j} x_i y_j$ de cette somme sont inférieurs à 1, ils doivent nécessairement être tous égaux à 1. On en déduit $x_i y_j a_{i,j} = 1$, donc $a_{i,j} = x_i y_j$ pour tous $1 \leq i, j \leq n$, autrement dit $A = X^t Y$, où $X = (x_1, \dots, x_n)$ et $Y = (y_1, \dots, y_n)$.

- (b) $\implies$ (a) : il suffit de constater que si $A = X^t Y$, avec $X, Y \in \{-1, 1\}^n$, alors

$${}^t X A Y = ({}^t X X) ({}^t Y Y) = n \times n = n^2 \in S(A)$$

- (b) $\implies$ (c) : Supposons que $A = X^t Y$, avec $X, Y \in \{-1, 1\}^n$. Les colonnes de A sont $y_1 X, y_2 X, \dots, y_n X$. Elles appartiennent toutes à la droite Vect X donc $\text{rg } A \leq 1$. De surcroît, A est non nulle. Ainsi $\text{rg } A = 1$.
- (c) $\implies$ (b) : Supposons que $\text{rg } A = 1$. Notons X la première colonne de A . Comme $A \in \mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$, la colonne X appartient à $\{-1, 1\}^n$. De plus, A est de rang 1 par hypothèse, ce qui implique que ses autres colonnes sont colinéaires à X : pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, la j^{e} colonne de A est de la forme $y_j X$. Le scalaire y_j doit appartenir à $\{-1, 1\}$, sans quoi la j^{e} colonne de A posséderait des coefficients en dehors de $\{-1, 1\}$. En posant $Y = (y_1, \dots, y_n)$, on obtient bien $A = X^t Y$.

En conclusion,

$$n^2 \in S(A) \iff \exists X, Y \in \{-1, 1\}^n \quad A = X^t Y \iff \text{rg } A = 1$$

I.6 Calculons le nombre de matrices de $\mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$ de rang 1. Utilisons pour cela l'équivalence (b) $\iff$ (c) de la question I.5. L'application

$$\varphi: \begin{cases} \{-1, 1\}^n \times \{-1, 1\}^n \longrightarrow \{A \in \mathcal{M}_n(\{-1, 1\}) \mid \text{rg } A = 1\} \\ (X, Y) \longmapsto X^t Y \end{cases}$$

est une surjection. Soient deux couples $(X, Y), (X', Y')$ ayant la même image par φ , c'est-à-dire $X^t Y = X'^t Y'$. En considérant la première colonne de cette matrice, on observe que $y_1 X = y'_1 X'$, donc $X' = \pm X$. En considérant la première ligne, on prouve cette fois que $x_1 Y = x'_1 Y'$, ce qui implique $Y' = \pm Y$. Les deux cas $(X', Y') = (X, -Y)$ et $(X', Y') = (-X, Y)$ sont à exclure, car ils contredisent l'égalité $\varphi(X', Y') = \varphi(X, Y)$. Il reste les possibilités $(X', Y') = (X, Y)$ ou $(X', Y') = (-X, -Y)$, et l'on vérifie aisément que $\varphi(X, Y) = \varphi(-X, -Y)$.

Le raisonnement précédent montre que toute matrice de rang 1 dans $\mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$ possède exactement deux antécédents par l'application φ . On en déduit qu'il existe

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \text{Card} (\{-1, 1\}^n \times \{-1, 1\}^n) &= \frac{1}{2} \text{Card} \{-1, 1\}^n \times \text{Card} \{-1, 1\}^n \\ &= \frac{1}{2} \times 2^n \times 2^n = 2^{2n-1} \end{aligned}$$

matrices de ce type. D'après la question I.1, le cardinal de l'ensemble $\mathcal{M}_n(\{-1, 1\})$ est égal à 2^{n^2} , d'où

$$\text{La proportion de matrices de rang 1 dans } \mathcal{M}_n(\{-1, 1\}) \text{ est } \frac{2^{2n-1}}{2^{n^2}} = 2^{-(n-1)^2}.$$