

1. NOMBRE DE POINTS FIXES D'UNE PERMUTATION

2 Pour construire une permutation de $\llbracket 1; n \rrbracket$ avec k points fixes, il faut et il suffit de :

- Choisir une partie E à k éléments de $\llbracket 1; n \rrbracket$ qui donnera les points fixes de la permutation. Il y a $\binom{n}{k}$ possibilités.
- Choisir sur l'ensemble $\llbracket 1; n \rrbracket \setminus E$ à $n - k$ éléments une permutation sans points fixes. Par définition des termes $(d_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$, il y a d_{n-k} possibilités.

Au total,

Il y a $\binom{n}{k} d_{n-k}$ permutations de $\llbracket 1; n \rrbracket$ avec k points fixes pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

Comme P_n est la probabilité uniforme sur $\mathcal{S}_n$, on sait que

$$P_n(X_n = k) = \frac{\text{Card } \{X_n = k\}}{\text{Card } \mathcal{S}_n}$$

où $\{X_n = k\}$ est l'ensemble des permutations de $\llbracket 1; n \rrbracket$ avec k points fixes. Avec les résultats précédents,

$$P_n(X_n = k) = \frac{\binom{n}{k} d_{n-k}}{n!} = \frac{d_{n-k}}{k! (n-k)!} \text{ pour tout } k \in \llbracket 0; n \rrbracket.$$

On peut donner une démonstration plus formelle à l'aide des bijections. Pour rappel, deux ensembles finis ont même cardinal si, et seulement si, on peut exhiber une bijection entre les deux. Dans notre cas, si $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note $\text{Fix}(\sigma) = \{i \in \llbracket 1; n \rrbracket \mid \sigma(i) = i\}$ l'ensemble des points fixes de σ , et $\mathcal{P}_k(n)$ l'ensemble des parties à k éléments de $\llbracket 1; n \rrbracket$. On considère l'application

$$\Phi: \begin{cases} \{X_n = k\} \longrightarrow \mathcal{P}_k(n) \times \{X_{n-k} = 0\} \\ \sigma \longmapsto (\text{Fix}(\sigma), \sigma|_{\llbracket 1; n \rrbracket \setminus \text{Fix}(\sigma)}) \end{cases}$$

qui est bijective avec pour application réciproque

$$\Psi: \begin{cases} \mathcal{P}_k(n) \times \{X_{n-k} = 0\} \longrightarrow \{X_n = k\} \\ (A, \tilde{\sigma}) \longmapsto \sigma := \begin{cases} \sigma|_A = \text{id}_A \\ \sigma|_{\llbracket 1; n \rrbracket \setminus A} = \tilde{\sigma} \end{cases} \end{cases}$$

On en déduit que

$$\text{Card } \{X_n = k\} = \text{Card } (\mathcal{P}_k(n)) \text{Card } \{X_{n-k} = 0\} = \binom{n}{k} d_{n-k}$$

6 Soit $i \in \llbracket 1; 1 \rrbracket$. La variable U_i ne peut prendre que les valeurs 0 et 1. Elle suit donc une loi de Bernoulli. Pour préciser le paramètre, il suffit de calculer $P_n(U_i = 1)$. Or, si on note E_i l'ensemble des permutations de $\llbracket 1; n \rrbracket$ laissant fixe i , on a

$$\text{Card } E_i = (n-1)!$$

car choisir une permutation de E_i revient à choisir une permutation de l'ensemble à $n-1$ éléments $\llbracket 1; n \rrbracket \setminus \{i\}$. Et la probabilité P_n étant uniforme sur $\llbracket 1; n \rrbracket$,

$$P_n(U_i = 1) = \frac{\text{Card } E_i}{\text{Card } \mathcal{S}_n} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

Dès lors,

La variable U_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{n}$.

Soient $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ avec $i \neq j$. De nouveau, la variable $U_i U_j$ ne prenant que 0 et 1 comme valeurs, elle suit une loi de Bernoulli. Et pour une permutation σ , $U_i U_j(\sigma) = 1$ si et seulement si les entiers i et j sont des points fixes de σ , c'est-à-dire $\sigma \in E_i \cap E_j$. Or $\text{Card}(E_i \cap E_j) = (n-2)!$ en raisonnant comme précédemment. On en déduit que

$$P_n(U_i U_j = 1) = \frac{\text{Card}(E_i \cap E_j)}{\text{Card } \mathcal{S}_n} = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}$$

Si $i \neq j$, la variable $U_i U_j$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{n(n-1)}$.

7 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Comme $U_i(\sigma)$ prend la valeur 1 lorsque i est un point fixe de σ et 0 sinon et que $X_n(\sigma)$ est le nombre de points fixes de σ , on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad X_n = \sum_{i=1}^n U_i$$

et par linéarité de l'espérance

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad E(X_n) = \sum_{i=1}^n E(U_i) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} = 1$$

Les variables $(U_i)_{1 \leq i \leq n}$ ne sont pas mutuellement indépendantes. Par exemple, si elles l'étaient, on en déduirait que X_n suit une loi binomiale de paramètres $(n, 1/n)$, ce qui n'est pas le cas d'après la question 5. Pour le calcul de la variance, on utilise donc la formule générale de la variance d'une somme à l'aide de la covariance.

Par ailleurs,
$$V(X_n) = \sum_{i=1}^n V(U_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{Cov}(U_i, U_j)$$

Or, pour tous indices i, j distincts

$$\text{Cov}(U_i, U_j) = E(U_i U_j) - E(U_i)E(U_j)$$

On vient de voir que les variables U_i et U_j suivent la loi $\mathcal{B}(1/n)$, et $U_i U_j$ suit la loi $\mathcal{B}(1/n(n-1))$. On obtient donc

$$\text{Cov}(U_i, U_j) = \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2(n-1)} \quad \text{et} \quad V(U_i) = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

puis
$$\begin{aligned} V(X_n) &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{n^2(n-1)} \\ &= n \cdot \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + 2 \binom{n}{2} \frac{1}{n^2(n-1)} \\ &= 1 - \frac{1}{n} + 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} \cdot \frac{1}{n^2(n-1)} \end{aligned}$$

d'où $\forall n \in \mathbb{N} \quad V(X_n) = 1$

8 En reconnaissant la somme partielle de la série exponentielle en -1 , il vient

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad P_n(X_n = k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{k!} e^{-1}$$

Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N} \quad y_k = \frac{1}{k!} e^{-1}$

La variable Y suit une loi de Poisson de paramètre 1.

Le lecteur attentif qui a le bon réflexe de parcourir l'intégralité du sujet avant de composer aura constaté que la réponse était donnée à la suite de la question 12.

2. CONVERGENCE EN VARIATION TOTALE

10 Prouvons les quatre énoncés.

- La somme $d_{VT}(x, y)$ est à termes positifs donc $d_{VT}(x, y) \geq 0$. De plus, d'après l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} d_{VT}(x, y) &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} |x(k) - y(k)| \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} (|x(k)| + |y(k)|) \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} x(k) + \sum_{k=0}^{+\infty} y(k) \right) \quad \left(\begin{array}{c} \text{séries à termes} \\ \text{positifs et convergentes} \end{array} \right) \\ d_{VT}(x, y) &\leq \frac{1}{2} (1 + 1) = 1 \end{aligned}$$

On a bien

$$0 \leq d_{VT}(x, y) \leq 1$$

- Si $x = y$, alors $d_{VT}(x, y) = 0$. Réciproquement, si $d_{VT}(x, y) = 0$, alors on a une somme de termes positifs qui est nulle, si bien que chaque terme est nécessairement nul : pour tout $k \in \mathbb{N}$, $x(k) - y(k) = 0$, c'est-à-dire que $x = y$.

$$d_{VT}(x, y) = 0 \iff x = y$$

- Comme $|x(k) - y(k)| = |y(k) - x(k)|$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a directement

$$d_{VT}(x, y) = d_{VT}(y, x)$$

- Enfin pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a d'après l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} |x(k) - z(k)| &= |(x(k) - y(k)) + (y(k) - z(k))| \\ &\leq |x(k) - y(k)| + |y(k) - z(k)| \end{aligned}$$

Par somme de séries convergentes

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |x(k) - z(k)| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |x(k) - y(k)| + \sum_{k=0}^{+\infty} |y(k) - z(k)|$$

c'est-à-dire

$$d_{VT}(x, z) \leq d_{VT}(x, y) + d_{VT}(y, z)$$

Ces propriétés (en excluant la majoration par 1) font de d_{VT} une distance sur l'ensemble des distributions de probabilité sur $\mathbb{N}$. Toutefois, contrairement aux espaces normés, l'ensemble des distributions muni de cette distance est entièrement contenu dans la boule unité. On montre de plus que $d_{VT}(x, y) = 1$ si et seulement si $x(k)y(k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

11 Soient $\lambda, \mu \in]0; 1[$. Dans le cas de variables de Bernoulli, $p_X(k) = p_Y(k) = 0$ dès que $k \notin \{0; 1\}$. Ainsi

$$d_{VT}(p_X, p_Y) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} |p_X(k) - p_Y(k)| = \frac{1}{2} (|p_X(0) - p_Y(0)|)$$

Comme λ et μ sont les paramètres respectifs des variables de Bernoulli X et Y ,

$$d_{VT}(p_X, p_Y) = \frac{1}{2} (|(1 - \lambda) - (1 - \mu)| + |\lambda - \mu|)$$

d'où

$$d_{VT}(p_X, p_Y) = |\lambda - \mu|$$

12 Simplifions la somme sachant que $p_X(k)$ est nul dès que $k \notin \{0; 1\}$:

$$\begin{aligned} 2d_{VT}(p_X, \pi_\lambda) &= \sum_{k=0}^{+\infty} |p_X(k) - \pi_\lambda(k)| \\ &= |p_X(0) - \pi_\lambda(0)| + |p_X(1) - \pi_\lambda(1)| + \sum_{k=2}^{+\infty} \pi_\lambda(k) \end{aligned}$$

Or $|p_X(0) - \pi_\lambda(0)| = |(\lambda - 1) - e^{-\lambda}| = e^{-\lambda} - (1 - \lambda)$

puisque par convexité de la fonction exponentielle, sa courbe représentative est au-dessus de la tangente en 0, soit $e^x \geq 1 + x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. De plus,

$$|p_X(1) - \pi_\lambda(1)| = |\lambda - \lambda e^{-\lambda}| = \lambda(1 - e^{-\lambda})$$

et
$$\sum_{k=2}^{+\infty} \pi_\lambda(k) = \sum_{k=0}^{+\infty} \pi_\lambda(k) - \pi_\lambda(1) - \pi_\lambda(0) = 1 - \lambda e^{-\lambda} - e^{-\lambda}$$

Après simplification, on obtient

$$d_{VT}(p_X, \pi_\lambda) = \lambda(1 - e^{-\lambda})$$

En utilisant de nouveau l'inégalité $1 - \lambda \leq e^{-\lambda}$, on trouve que $1 - e^{-\lambda} \leq \lambda$, d'où

$$d_{VT}(p_X, \pi_\lambda) \leq \lambda^2$$

13 La distribution p_{X_n} est à support dans $\llbracket 0; n \rrbracket$, donc

$$\begin{aligned} 2d_{VT}(p_{X_n}, \pi_1) &= \sum_{k=0}^{+\infty} |p_{X_n}(k) - \pi_1(k)| \\ &= \sum_{k=0}^n |p_{X_n}(k) - \pi_1(k)| + \sum_{k=n+1}^{+\infty} |p_{X_n}(k) - \pi_1(k)| \\ 2d_{VT}(p_{X_n}, \pi_1) &= \sum_{k=0}^n |p_{X_n}(k) - \pi_1(k)| + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \pi_1(k) \end{aligned}$$

Or
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \pi_1(k) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{e^{-1}}{k!}$$

En utilisant le résultat de la question 5 et en écrivant e^{-1} à l'aide de la série exponentielle, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n |p_{X_n}(k) - \pi_1(k)| &= \sum_{k=0}^n \left| \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{n-k} \frac{(-1)^i}{i!} - \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \right| \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left| \sum_{i=n-k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \right| \end{aligned}$$

D'où

$$2d_{VT}(p_{X_n}, \pi_1) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left| \sum_{i=n-k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \right| + e^{-1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$$

14 Pour tout entier $k \geq n+1$, on a

$$k! = \left(\prod_{i=1}^{n+1} i \right) \times \left(\prod_{i=n+2}^k i \right)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{1}{k!} &= \frac{1}{(n+1)!} \prod_{i=n+2}^k \frac{1}{i} \\ &\leq \frac{1}{(n+1)!} \prod_{i=n+2}^k \frac{1}{n+2} \\ &\leq \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{(n+2)^{k-(n+2)+1}} \\ \frac{1}{k!} &\leq \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{(n+2)^{k-(n+1)}} \end{aligned}$$

La série $\sum_{k \geq n+1} 1/(n+2)^{k-(n+1)}$ est une série géométrique de raison $1/(n+2) \in]-1; 1[$, donc elle est bien convergente. On en déduit par somme la majoration

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)^{k-(n+1)}}$$

puis à l'aide du changement d'indice $k \leftarrow k - (n+1)$

$$r_n \leq \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)^k}$$

En reprenant l'expression de la somme d'une série géométrique

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+2)^k} = \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} = \frac{n+2}{n+1}$$

De plus $r_n \geq 1/(n+1)!$ et on obtient

$$1 \leq (n+1)! r_n \leq \frac{n+2}{n+1}$$

Par encadrement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)! r_n = 1$$

Finalement

$$r_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(n+1)!}$$

15 Reprenons l'égalité de la question 13

$$2d_{VT}(p_{X_n}, \pi_1) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left| \sum_{i=n-k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \right| + e^{-1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \quad (\star)$$

et majorons chaque terme.

- On peut majorer le premier terme grâce au critère spécial des séries alternées : pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on a

$$\left| \sum_{i=n-k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \right| \leq \frac{1}{(n-k+1)!}$$

Par somme, il vient

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left| \sum_{i=n-k+1}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \right| \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{(n+1-k)!} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n+1)!} \binom{n+1}{k}$$

On poursuit la majoration avec la formule du binôme de Newton

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{(n+1)!} \binom{n+1}{k} \leq \frac{1}{(n+1)!} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$

ce qui donne
$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \left| \sum_{i=n+1-k}^{+\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \right| = O_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2^n}{(n+1)!} \right)$$

- On majore le second terme dans $(\star)$ à l'aide de la question précédente

$$e^{-1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e^{-1} r_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-1}}{(n+1)!}$$

En particulier, on a aussi

$$e^{-1} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = O_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2^n}{(n+1)!} \right)$$

En regroupant les résultats, il vient

$$\boxed{d_{VT}(p_{X_n}, \pi_1) = O_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2^n}{(n+1)!} \right)}$$