1 ——— $(*)$ ———

Donner le rayon de convergence et le domaine de convergence de la série $\sum \tan(n\pi/7)\, z^n$.

La suite $(\tan(n\pi/7))_{n\in\mathbb{N}}$ est 7-périodique et non constante. Elle est donc bornée. De plus, son terme général ne tend pas vers 0, ce qui assure la divergence de la série $\sum\limits_{n\geq 0} \tan(n\pi/7)$. Ces deux arguments combinés prouvent que

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de } \sum_{n\geq 0} \tan(n\pi/7) z^n \text{ est égal à } 1.}$$

Si maintenant z est de module 1, on peut remarquer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\tan(n\pi/7)z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 car, par exemple $(|u_{7n+1}|)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante non nulle. Ainsi, la série $\sum \tan(npi/7)z^n$ diverge et finalement,

$$\boxed{\text{La somme de la série entière est définie sur } B(0,1).}$$

2 ——— $(*)$ ———

Donner le rayon de convergence de la série $\sum a_n\, z^n$ où pour tout n, $a_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x^n}\, \mathrm{d}x$.

Soit $n \geq 1$. On effectue le changement de variable $u = x^n$ dans l'intégrale définissant a_n, sachant que $x \longmapsto x^n$ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $[1; +\infty[$ dans lui-même. Ainsi, $x = u^{1/n}$ et $\mathrm{d}x = 1/nu^{1/n-1}\,\mathrm{d}u$ et

$$a_n = \frac{1}{n}\int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} u^{1/n}\,\mathrm{d}u$$

Or, pour tout $u \geq 1$, on a $1 \leq u^{1/n} \leq u$ donc

$$\frac{1}{n}\int_1^{+\infty}\frac{e^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u \leq a_n \leq \frac{1}{n}\int_0^{+\infty} e^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{n}$$

On en déduit aussitôt par encadrement et par Riemann que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 mais que $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ diverge. Par suite,

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de } \sum_{n\geq 1} a_n z^n \text{ est égal à } 1.}$$

3 ——— $(**)$ ———

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul.

(a). Montrer que $\sum \dfrac{a_n}{n!} z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$. On note alors $g(z)$ la somme de cette série.

(b). Montrer que pour tout $|z| < R$,
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \int_0^{+\infty} e^{-t} g(tz)\,\mathrm{d}t$$

(a) Soit $\rho \in]0; R[$. Alors par définition du rayon de convergence, la suite $(a_n\rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, ce qui signifie que

$$a_n \underset{n\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{\rho^n}\right)$$

Par conséquent, pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$$\frac{a_n}{n!} z^n = O\left(\frac{1}{n!}\left(\frac{z}{\rho}\right)^n\right)$$

qui est le terme général d'une série convergente. Il s'ensuit que

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de } \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!} z^n \text{ est égal à } +\infty.}$$

(b) Fixons z de module strictement inférieur à R. Alors, pour tout t positif

$$e^{-t} g(tz) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} z^n t^n e^{-t}$$

Notons $f_n : t \longmapsto a_n z^n t^n e^{-t}/n!$ pour tout entier n et appliquons le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque :

- Pour tout entier n, la fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dominée par $t \longmapsto 1/t^2$ en $+\infty$. Elle est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
- Par construction, la série $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers $t \longmapsto e^{-t}g(tz)$ qui est continue.
- Pour tout entier n, on a

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)| \,\mathrm{d}t = \frac{|a_n|\,|z|^n}{n!} \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{|a_n|\,|z|^n}{n!} \underbrace{\Gamma(n+1)}_{n!} = |a_n|\,|z|^n$$

qui est le terme général d'une série convergente en vertu de l'hypothèse $|z| < R$.

Le théorème s'applique et prouve que

$$\int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

soit bien $$\boxed{\int_0^{+\infty} e^{-t} g(tz)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n}$$

4 ——— (**) ———

Soit $f(z) = \sum a_n\, z^n$ une série entière de rayon de convergence $+\infty$.

(a). Calculer pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $r > 0$ $$\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-ipt}\,\mathrm{d}t$$

(b). En déduire que si f est bornée dans $\mathbb{C}$, alors elle est constante. Que dire de f lorsque $|f(z)| = O(|z|^\alpha)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$

(a) Soit $p \in \mathbb{N}$. Pour tout $r > 0$ et tout $t \in [0; 2\pi]$, on a

$$f(re^{it})e^{-ipt} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{i(n-p)t}$$

Notons par conséquent $f_n : t \longmapsto a_n r^n e^{i(n-p)t}$ pour tout entier n et appliquons le théorème d'intégration terme à terme sur un segment. Pour tout n, la fonction f_n est continue et

$$||f_n||_\infty = |a_n|\, r^n$$

qui est le terme général d'une série convergente puisque f a un rayon de convergence infini. On a donc convergence normale de $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$ sur $\mathbb{R}$ et ainsi

$$\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-ipt}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \int_0^{2\pi} e^{i(n-p)t}\,\mathrm{d}t$$

Notons pour finir que $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{i(n-p)t}\,\mathrm{d}t$ est nulle si n est différent de p et égale à 2π sinon. Au final,

$$\boxed{\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-ipt}\,\mathrm{d}t = 2\pi a_p\, r^p}$$

(b) Supposons f bornée sur $\mathbb{C}$. Alors, pour tout entier p et tout $r > 0$,

$$\left|\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-ipt}\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_0^{2\pi} \left|f(re^{it})\right|\,\mathrm{d}t \leq \int_0^{2\pi} ||f||_\infty\,\mathrm{d}t = 2\pi\, ||f||_\infty$$

et donc, en vertu du résultat précédent, $$|a_p| \leq \frac{||f||_\infty}{r^p}$$

Ceci étant valable pour tout $r > 0$, en faisant tendre r vers $+\infty$, on obtient $|a_p| = 0$ pour tout $p \geq 1$. Par conséquent,

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est constante.}}$$

Si l'on suppose maintenant $|f(z)| = O(|z|^\alpha)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, le même travail que précédemment donne cette fois la majoration

$$|a_p| \underset{r\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{r^{p-\alpha}}\right)$$

On ne peut alors conclure que $a_p = 0$ que pour $p > \alpha$. Par suite,

$$\boxed{\text{Si } f \text{ vérifie } |f(z)| = O(|z|^{\alpha}) \text{ avec } \alpha\in\mathbb{R}, \text{ alors } f \text{ est polynomiale de degré inférieur à } \alpha.}$$

5 ——— (∗∗∗) ———

Montrer que la fonction $f : x \longmapsto e^{1/x^2}\displaystyle\int_0^x e^{-1/t^2}\,\mathrm{d}t$ (prolongée par continuité par 0 en 0) n'admet pas de développement en série entière en 0, mais possède un DL à tout ordre en 0.

Remarquons pour commencer que l'application $t \longmapsto e^{-1/t^2}$ est prolongeable par continuité en 0. Par suite, elle est intégrable sur tout segment de la forme $[0; x]$ avec x réel, ce qui prouve que f est bien définie, et même $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ d'après les théorèmes généraux. Maintenant, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3}e^{1/x^2}\int_0^x e^{-1/t^2}\,\mathrm{d}t + e^{1/x^2}\cdot e^{-1/x^2} \qquad \text{d'où} \qquad x^3 f'(x) + 2f(x) = x^3$$

Raisonnons par l'absurde en supposant que f admet un développement en série entière en 0 que l'on note

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \qquad \text{et donc} \qquad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n x^{n-1}$$

En réinjectant ces égalités dans l'équation différentielle satisfaite par f, il vient (quitte à rajouter un terme nul)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n\, a_n x^{n+2} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = x^3 \qquad \text{soit} \qquad 2a_0 + 2a_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(2a_n + (n-2)a_{n-2}\right) x^n = x^3$$

Par unicité du développement en série entière, on en déduit que

$$a_0 = a_1 = 2a_2 = 0 \qquad 2a_3 + a_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad 2a_n + (n-2)a_{n-2} = 0 \quad \forall n \geq 4$$

On en déduit par récurrence immédiate que les termes d'indices pairs de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont tous nuls, tandis que

$$a_3 = \frac{1}{2} \qquad a_5 = -\frac{3}{2}a_3 = -\frac{3}{2^2} \qquad a_7 = -\frac{5}{2}a_5 = \frac{5\cdot 3}{2^3}$$

d'où par récurrence immédiate

$$a_{2n+1} = \frac{(-1)^{n-1}3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^{n+1}} = (-1)^{n-1}\frac{(2n)!}{2^{2n+1}n!} \qquad \forall n\in\mathbb{N}^*$$

et ainsi

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{(2n)!}{2^{2n+1}n!}x^{2n+1}$$

Il suffit alors de remarquer que le rayon de convergence de cette série entière est nul, par application immédiate du critère de d'Alembert ! Par conséquent,

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ n'est pas développable en série entière au voisinage de } 0.}$$

Soit maintenant $x > 0$ et $0 < \epsilon < x$. Procédons à une intégration par parties sur $[\epsilon; x]$ avec

$$u(t) = \frac{t^3}{2} \qquad v'(t) = \frac{2}{t^3}e^{-1/t^2} \qquad u'(t) = \frac{3}{2}\,t^2 \qquad v(t) = e^{-1/t^2}$$

Ainsi,

$$\int_\epsilon^x e^{-1/t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left[t^3 e^{-1/t^2}\right]_\epsilon^x - \frac{3}{2}\int_\epsilon^x t^2 e^{-1/t^2}\,\mathrm{d}t$$

En faisant tendre ϵ vers 0, et en multipliant par e^{1/x^2}, on obtient donc avec les expressions précédentes.

$$f(x) = a_3 x^3 + 2a_5\int_0^x t^2 e^{-1/t^2}\,\mathrm{d}t$$

Par une récurrence presque immédiate, mais qu'il faudrait très honnêtement prendre le temps de rédiger, on en déduit que pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, et pour tout $x > 0$,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_{2k+1}\, x^{2k+1} + 2\, a_{2n+3}\, e^{1/x^2}\int_0^x t^{2n} e^{-1/t^2}\,\mathrm{d}t$$

En majorant grossièrement e^{-1/t^2} par e^{-1/x^2} sur l'intervalle $]0; x]$, on constate que

$$0 \leq e^{1/x^2}\int_0^x t^{2n} e^{-1/t^2}\,\mathrm{d}t \leq \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = O(x^{2n+1})$$

On peut donc conclure que pour tout $n \geq 2$, on a lorsque x tend vers 0,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n-1} a_{2k+1}\, x^{2k+1} + O(x^{2n+1})$$

soit bien que $\boxed{\text{La fonction } f \text{ admet un développement limité à tout ordre en 0.}}$

6 ——— (∗∗) ———

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré 2 et $f : x \longmapsto e^{P(x)}$. Montrer que le développement en série entière de f ne peut pas contenir deux coefficients successifs nuls.

Notons $P = aX^2 + bX + c$ avec a non nul. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = e^{ax^2} e^{bx} e^c$$

La fonction f est donc le produit de deux fonctions développables en séries entières avec rayon de convergence infinie (et une constante). Elle est donc bien développable en série entière, avec également un rayon de convergence infini. Notons alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$$

Remarquons maintenant que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec pour tout x,

$$f'(x) = (2ax + b) f(x)$$

En réinjectant le développement en série de f et celui de f' obtenu par dérivation terme à terme, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n x^{n-1} = 2a \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} + b \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$$

soit encore en passant tous les termes d'un même coté et en effectuant quelques changements d'indices

$$(a_1 - ba_0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[(n+1)a_{n+1} - b\, a_n - 2a\, a_{n-1}\right] x^n = 0$$

On sait enfin que $a_0 = f(0) = \exp(c)$. Par unicité du développement en série entière, on en déduit que

$$a_1 = ba_0 = b\exp(c) \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{n+1}(b\, a_n + 2a\, a_{n-1})$$

Si l'on suppose par l'absurde que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a deux termes consécutifs non nuls, on peut considérer le plus petit entier p tel que $a_p = a_{p+1} = 0$. Alors $p > 1$ car a_0 est non nul, et d'après la formule de récurrence, $2a\, a_{p-1} = 0$. Or, a est non nul, donc $a_{p-1} = a_p = 0$, ce qui contredit la minimalité de p. Par suite,

$\boxed{\text{Le développement en série entière de } g \text{ ne contient pas deux coefficients consécutifs nuls.}}$

7 ——— (∗) ———

Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $\qquad S_k(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n^k x^n}{n!}$

(a). Justifier que $S_k(x)$ converge quel que soit le réel x.

(b). Prouver qu'il existe un polynôme P_k de degré k tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad S_k(x) = P_k(x)e^x$$

(c). On suppose $k = 2$. Déterminer P_2.

(a) Si $x = 0$, la convergence est évidente. Sinon, on remarque que pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{(n+1)^k x^{n+1}/(n+1)!}{n^k x^n/n!} = \frac{x}{n+1}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Le critère de d'Alembert assure immédiatement que la série $\sum_{n\geq 0} n^k\, x^n/n!$ converge, et ainsi

$\boxed{\text{La somme } S_k(x) \text{ est bien définie pour tout réel } x.}$

(b) Fixons $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $p \in [\![0;k]\!]$, on pose

$$B_p = X(X-1)\cdots(X-p+1)$$

La famille $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est échelonnée en degré donc constitue une base de $\mathbb{R}_k[X]$. Il existe donc des scalaires $\lambda_0,\ldots,\lambda_k$ tels que

$$X^k = \sum_{p=0}^{k} \lambda_p\, B_p$$

Remarquons que dans cette égalité, λ_k est nécessairement non nul sans quoi on aurait X^k combinaison linéaire de polynômes de degré au plus $k-1$, ce qui est absurde. Maintenant,

$$S_k(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{p=0}^{k} \lambda_p\, B_p(n)\Big)\frac{x^n}{n!}$$

On peut séparer la somme finie en remarquant que chacune des nouvelles séries est convergente. Ainsi,

$$S_k(x) = \sum_{p=0}^{k} \lambda_p \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} B_p(n)\,\frac{x^n}{n!}\Big)$$

Il ne reste plus qu'à constater que $B_p(n)$ est nul pour $n \le p$ et vaut $n!/(n-p)!$ sinon. Ainsi,

$$\forall p \in [\![0;k]\!]\,,\qquad \sum_{n=0}^{+\infty} B_p(n)\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=p}^{+\infty}\frac{x^n}{(n-p)!} = \sum_{m=0}^{+\infty}\frac{x^{m+p}}{m!} = x^p e^x$$

et par suite
$$S_k(x) = \Big(\sum_{k=0}^{p} \lambda_p\, x^p\Big) e^x$$

$$\boxed{\text{Il existe } P_k \in \mathbb{R}[X] \text{ de degré } k \text{ tel que } S_k(x) = P_k(x)e^x \text{ pour tout réel } x.}$$

(c) D'après la question précédente, il suffit de décomposer le polynôme X^2 dans la base $(1, X, X(X-1))$ de $\mathbb{R}_2[X]$. Sachant que $X^2 = X(X-1) + X$, on obtient avec les notations précédentes $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) = (0, 1, 1)$ puis

$$\boxed{P_2 = X^2 + X}$$

$\boxed{8}$ ——— $(*)$ ———

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_{n+3} = 2a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n$$

Donner le rayon de convergence et la somme de la série $\sum a_n z^n$.

L'équation caractéristique de la récurrence est donnée par

$$r^3 - 2r^2 + 2r - 1 = 0$$

Le réel 1 est racine évidente, ce qui permet d'obtenir la factorisation

$$r^3 - 2r^2 + 2r - 1 = (r-1)(r^2 - r + 1) = (r-1)(r - e^{i\pi/3})(r + e^{i\pi/3})$$

Les racines de l'équation caractéristique sont donc 1, $e^{i\pi/3}$ et $e^{-i\pi/3}$. Ainsi, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est combinaison linéaire (dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$) des suites $(1)_{n\in\mathbb{N}}$, $(e^{in\pi/3})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(e^{-in\pi/3})_{n\in\mathbb{N}}$. Elle est donc bornée et la rayon de convergence de $\sum\limits_{n\ge 0} a_n\, z^n$ est supérieur à 1.

Fixons z de module strictement inférieur à 1. En multipliant l'égalité par z^{n+3} puis en sommant pour n allant de 0 à l'infini, il vient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+3}\, z^{n+3} = 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+2}\, z^{n+3} - 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n+1}\, z^{n+3} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^{n+3}$$

En notant S la somme de la série entière, cela signifie que

$$S(z) - a_2\, z^2 - a_1 z - a_0 = 2z\,(S(z) - a_1 z - a_0) - 2z^2\,(S(z) - a_0) + z^3\, S(z)$$

et donc
$$\begin{aligned} S(z) &= \frac{(a_2 - 2a_1 + 2a_0)\, z^2 + (a_1 - 2a_0)\, z + a_0}{1 - 2z + 2z^2 - z^3} \\ &= \frac{(a_2 - 2a_1 + 2a_0)\, z^2 + (a_1 - 2a_0)\, z + a_0}{(1-z)(e^{i\pi/3} - z)(e^{-i\pi/3} - z)} \end{aligned}$$

Notons que puisque le numérateur est de degré au plus 2, il ne peut admettre simultanément 1, $e^{i\pi/3}$ et $e^{-i\pi/3}$ pour racines que s'il est nul. Dans le cas contraire, la somme S présente une divergence en l'un de ces trois points. Sachant S est continue sur $B(0,R)$, on en déduit que nécessairement R est inférieur à 1, ce qui permet de conclure.

> La série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n\, z^n$ a un rayon de convergence égal à 1 (à moins que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne soit nulle) et sa somme vaut
> $$\forall\, |z|<1, \qquad S(z)=\frac{(a_2-2a_1+2a_0)\,z^2+(a_1-2a_0)\,z+a_0}{1-2z+2z^2-z^3}$$

9 — (∗∗)

Donner le rayon de convergence et la somme des séries suivantes pour $x\in\mathbb{R}$

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{\mathrm{ch} n}{n}\,x^n$ **(b)** $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{n}{(2n+1)!}\,x^n$ **(c)** $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{n^3+2n}{n!}\,x^n$ **(d)** $\displaystyle\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{3n+2}\,x^{3n+2}$

On admettra que $\displaystyle\int\frac{t\ \mathrm{d}t}{1+t^3}=\frac{1}{6}\ln(t^2-t+1)-\frac{1}{3}\ln(t+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t-1}{\sqrt{3}}\right)$.

Dans chaque cas, on notera u_n pour x fixé dans $\mathbb{R}$ le terme général de la série. On vérifie immédiatement que si $x>0$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir du rang 1.

(a) Pour tout $n\geq 1$,
$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{e-e^{-2n-1}}{1-e^{-2n}}\,\frac{n}{n+1}x\xrightarrow[n\to+\infty]{}ex$$

Par d'Alembert, on en déduit que $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge si $|x|<1/e$ et diverge grossièrement si $|x|>1/e$. Dès lors,

> Le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{\mathrm{ch} n}{n}x^n$ est égal à $1/e$.

Maintenant, pour $x\in\,]-1/e;1/e[$,
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\mathrm{ch} n}{n}x^n=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\left((ex)^n+(x/e)^n\right)$$

et donc
$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\mathrm{ch} n}{n}x^n=-\frac{1}{2}\left(\ln(1-ex)+\ln(1-x/e)\right)}$$

(b) Il est clair que la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge pour tout réel x, car son terme général est un $o(1/n^2)$ par croissance comparées. Ainsi,

> Le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{n}{(2n+1)!}x^n$ est infini.

Maintenant, pour tout réel x strictement positif,
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{(2n+1)!}x^n=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(2n+1)-1}{(2n+1)!}x^n=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\left(\sqrt{x}\right)^{2n}}{(2n)!}-\frac{1}{\sqrt{x}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(\sqrt{x})^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)$$

Si x est strictement négatif, on peut cette fois écrire
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{(2n+1)!}x^n=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n\left(\sqrt{-x}\right)^{2n}}{(2n)!}-\frac{1}{\sqrt{-x}}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(\sqrt{-x})^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)$$

Enfin, si x est nul, la somme vaut clairement 0 car tous ses termes sont nuls. Pour conclure,
$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n}{(2n+1)!}x^n=\begin{cases}\left(\mathrm{ch}\sqrt{x}-(\mathrm{sh}\sqrt{x})/\sqrt{x}\right)/2 & \text{si } x>0\\ 0 & \text{si } x=0\\ \left(\cos\sqrt{-x}-(\sin\sqrt{-x})/\sqrt{-x}\right)/2 & \text{sinon}\end{cases}}$$

(c) Il est clair que la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ converge pour tout réel x, car son terme général est un $o(1/n^2)$ par croissance comparées. Ainsi,

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de } \sum_{n\geq 0} \frac{n^3+2n}{n!}x^n \text{ est infini.}}$$

La famille $\{1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2)\}$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$. Il existe donc quatre réels a, b, c, d tels que

$$X^3 + 2X = a\,X(X-1)(X-2) + b\,X(X-1) + cX + d$$

En remplaçant X successivement par $0, 1, 2$ puis 3, on obtient $d = 0$, puis $c = 3$, $b = 3$ et enfin $a = 1$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3+2n}{n!}x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)(n-2)}{n!}x^n + 3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{n!}x^n + 3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n!}x^n \\ &= \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(n-3)!}x^n + 3\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!}x^n + 3\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!}x^n \\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3+2n}{n!}x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+3}}{n!} + 3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+2}}{n!} + 3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}\end{aligned}$$

et finalement $$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3+2n}{n!}x^n = (x^3+3x^2+3x)e^x}$$

(d) Pour tout $n \geq 1$, $$\frac{u_{n+1}}{u_n} = -\frac{3n+2}{3n+5}x^3 \xrightarrow[n\to+\infty]{} -x^3$$

Par d'Alembert, on en déduit que $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ converge si $|x| < 1$ et diverge grossièrement si $|x| > 1$. Dès lors,

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de } \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{3n+2}x^{3n+2} \text{ est égal à } 1.}$$

Notons f la somme de la série. Alors f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1;1[$ et on peut dériver terme à terme la série de sorte que

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{3n+1} = x\sum_{n=0}^{+\infty} (-x^3)^n = \frac{x}{1+x^3}$$

Sachant que $f(0) = 0$, on en déduit par intégration et à l'aide de la primitive donnée par l'énoncé que

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+2}x^{3n+2} = \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) - \frac{1}{3}\ln(x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) - \frac{\pi\sqrt{3}}{18}}$$

10 ——— (∗∗) ———

Déterminer le développement en série entière des fonctions suivantes :

(a) $\ln\left(x^2-5x+6\right)$ **(b)** $\operatorname{sh}x \sin x$ **(c)** $\dfrac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}$ **(d)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+xt\ln t}$

(a) Pour tout réel x, $$\begin{aligned}\ln(x^2-5x+6) &= \ln((2-x)(3-x)) \\ &= \ln 6 + \ln\left(1-\frac{x}{2}\right) + \ln\left(1-\frac{x}{3}\right)\end{aligned}$$

Par conséquent, lorsque $|x| < 2$, en vertu du développement en série entière de $t \longmapsto \ln(1-t)$,

$$\boxed{\ln(x^2-5x+6) = \ln 6 - \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)\frac{x^n}{n}}$$

(b) Pour tout réel x, on a $$\operatorname{sh}x\,\sin x = \frac{1}{2}\operatorname{Im}\left((e^x-e^{-x})e^{ix}\right)\frac{1}{2}\operatorname{Im}\left(e^{(1+i)x}-e^{(-1+i)x}\right)$$

En utilisant le développement en série entière de la fonction exponentielle, il vient

$$\begin{aligned} e^{(1+i)x} - e^{(-1+i)x} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \Big((1+i)^n - (-1+i)^n \Big) \frac{x^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sqrt{2}\right)^n \Big((e^{i\pi/4})^n - (e^{3i\pi/4})^n \Big) \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

puis
$$\begin{aligned} \operatorname{sh} x \, \sin x &= \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{n/2-1} \Big(\sin(n\pi/4) - \sin(3n\pi/4) \Big) \frac{x^n}{n!} \\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{n/2} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

On peut éliminer les termes impairs de la somme (parce que la fonction est paire, ou encore parce que le terme $\cos(n\pi/2)$ s'annule), et finalement en posant $n = 2p$

$$\boxed{\operatorname{sh} x \, \sin x = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^{p+1}\, 2^p \, \sin\left(\frac{p\pi}{2}\right) \frac{x^{2p}}{(2p)!}}$$

(c) Notons
$$f : x \longmapsto \frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}$$

Il est clair que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ par composition dès lors que $1+x^2$ et $x+\sqrt{1+x^2}$ sont strictement positifs pour tout $x \in \mathbb{R}$. De plus,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \, \frac{1+x/\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}} \\ &= -\frac{x}{1+x^2} f(x) + \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

et finalement
$$(1+x^2) f'(x) + x f(x) = 1$$

Considérons donc l'équation différentielle
$$(1+x^2)\, y' + x\, y = 1 \qquad \textbf{(E)}$$

et cherchons les solutions développables en série entière vérifiant $y(0) = f(0) = 0$. Notons

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n \qquad \text{d'où} \qquad y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1}\, x^n$$

En reinjectant ces expressions dans l'équation différentielle précédente, on obtient

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, a_{n+1}\, x^n + \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)\, a_{n-1}\, x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n-1}\, x^n = 1$$

et donc
$$a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \Big((n+1)\, a_{n+1} + n\, a_{n-1} \Big) x^n = 1$$

Il s'ensuit que
$$a_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad a_{n+1} = -\frac{n}{n+1}\, a_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Sachant que $y(0) = 0$, il vient $a_0 = 0$ puis $a_{2p} = 0$ par récurrence immédiate. Enfin,

$$a_3 = -\frac{2}{3} a_1 = -\frac{2}{3} \quad a_5 = -\frac{4}{5} a_3 = \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5} \qquad \text{puis} \qquad a_{2p+1} = (-1)^p \frac{2\cdot 4\cdots(2p)}{3\cdot 5\cdots(2p+1)} = \frac{(2^p\, p!)^2}{(2p+1)!}$$

et finalement
$$y(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \, \frac{(2^p\, p!)^2}{(2p+1)!} x^{2p+1}$$

Remarquons maintenant que cette série entière a un rayon de convergence infini (preuve immédiate par d'Alembert). Sa somme y est définie sur $\mathbb{R}$, vérifie l'équation **(E)** et la condition initiale $y(0) = f(0) = 0$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz appliqué aux équations différentielles linéaires du premier s'applique et prouve que $f = y$. On peut donc conclure :

$$\boxed{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \, \frac{(2^p\, p!)^2}{(2p+1)!} x^{2p+1}}$$

(d) L'application $t \longmapsto t\ln t$ est continue sur $]0;1]$, prolongeable par continuité par 0 en 0, négative et atteint son minimum $-1/e$ en $1/e$. On en déduit que l'intégrale est bien définie pour $x \in]-\infty; e[$ car son dénominateur ne s'annule alors pas sur $[0;1]$. Maintenant, pour tout $t > 0$ et tout $x \in]-e;e[$,

$$\frac{1}{1+xt\ln t} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n(-t\ln t)^n$$

Notons donc $f_n : t \longmapsto x^n(-t\ln t)^n$ prolongée par continuité en 0, et appliquons le théorème d'intégration terme à terme sur un segment. Pour tout entier n, la fonction f_n est continue sur $[0;1]$, et $||f_n||_\infty = |x|^n/e^n$ est le terme général d'une série géométrique convergente. Ainsi, le théorème s'applique et

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{soit} \qquad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+xt\ln t} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \int_0^1 t^n(-\ln t)^n\,\mathrm{d}t$$

Pour calculer cette intégrale, on effectue le changement de variable $u = -\ln t$ à l'aide du $\mathcal{C}^1$-difféomormorphisme $t \longmapsto -\ln t$ qui va de $]0;1]$ dans $\mathbb{R}_+^*$, puis le changement de variable affine $s = (n+1)u$. Ainsi,

$$\int_0^1 t^n(-\ln t)^n\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} u^n e^{-(n+1)u}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{(n+1)^{n+1}}\int_0^{+\infty} s^n\, e^{-s}\,\mathrm{d}s$$

Cette dernière intégrale n'est autre que $\Gamma(n+1)$ soit $n!$ et finalement

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+xt\ln t} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n!}{(n+1)^{n+1}}\,x^n}$$

11 — (∗∗) —

Soit f définie pour tout $x \in]-4;4[$ par $\qquad f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{xt^2 - xt + 1}$

Donner le développement en série entière de f. On pourra commencer par justifier pour tous $p, q \in \mathbb{N}$ l'égalité

$$\int_0^1 t^p(1-t)^q\,\mathrm{d}t = \frac{p!\,q!}{(p+q+1)!}$$

Pour commencer, calculons pour tous entier $p, q \in \mathbb{N}$ l'intégrale

$$I_{p,q} = \int_0^1 t^p(1-t)^q\,\mathrm{d}t$$

Pour $p \geq 1$, on peut effectuer une intégration par parties et ainsi

$$I_{p,q} = \left[-t^p\frac{(1-t)^{q+1}}{q+1}\right]_0^1 + \frac{p}{q+1}\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q+1}\,\mathrm{d}t = \frac{p}{q+1}I_{p-1,q+1}$$

On en déduit par récurrence immédiate sur p l'égalité

$$I_{p,q} = \frac{p!}{(q+1)\cdots(q+p)}I_{0,p+q}$$

Cette dernière quantité se calcule aussitôt puisque

$$I_{0,p+q} = \int_0^1 (1-t)^{p+q}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{(1-t)^{p+q+1}}{p+q+1}\right]_0^1 = \frac{1}{p+q+1}$$

et finalement $\qquad \boxed{I_{p,q} = \dfrac{p!}{(q+1)\cdots(q+p+1)} = \dfrac{p!\,q!}{(p+q+1)!}}$

Fixons maintenant $t \in]0;1[$ et $x \in]-4;4[$. L'application $t \longmapsto t(1-t)$ est positive sur $[0;1]$ et atteint son maximum $1/4$ en $t = 1/2$. Ainsi, $|xt(1-t)| < 1$ donc $xt^2 - xt + 1$ ne s'annule par sur $[0;1]$ et

$$\frac{1}{xt^2 - xt + 1} = \frac{1}{1 - xt(1-t)} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n t^n(1-t)^n$$

Notons par conséquent $f_n : t \longmapsto x^n t^n(1-t)^n$ et appliquons le théorème d'intégration terme à terme sur un segment. Pour tout entier n, l'application f_n est continue sur $[0;1]$ et $||f_n||_\infty = |x|^n/4^n$ est le terme général d'une série géométrique convergente. Ainsi, le théorème s'applique et

$$\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{soit} \qquad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{xt^2 - xt + 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \int_0^1 t^n(1-t)^n\,\mathrm{d}t$$

Compte tenu du calcul précédente, on en déduit que

$$\boxed{\forall x \in \left]-4;4\right[, \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} x^n}$$

12 ——— $(**)$ ———

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \geq 2, \qquad a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k}$$

On pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$. Calculer $f(x)^2$ et en déduire une expression de a_n en fonction de n.

On admet pour l'instant que f a un rayon de convergence R non nul. Alors, par produit de Cauchy, pour tout $x \in \left]-R;R\right[$,

$$f(x)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n\, x^n \qquad \text{avec} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$$

Par définition, $c_0 = {a_0}^2 = 0$ et $c_1 = 2a_0a_1 = 0$. De plus, d'après l'hypothèse de récurrence, pour tout entier $n \geq 2$,

$$c_n = 2a_n a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k} = a_n \qquad \text{et donc} \qquad f(x)^2 = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n\, x^n = f(x) - x$$

Finalement,

$$f(x)^2 - f(x) + x = 0 \tag{$\star$}$$

L'équation du second degré $a^2 - a + x = 0$ d'inconnue a admet lorsque $|x| < 1/4$ pour solutions

$$a_1(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1-4x}\right) \qquad \text{et} \qquad a_2(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1-4x}\right)$$

Notons que la fonction a_2 est la seule des deux qui s'annule en 0. Elle est de plus développable en série entière sur $\left]-1/4;1/4\right[$ avec pour tout x dans cet intervalle

$$\begin{aligned}
a_2(x) &= \frac{1}{2}\left(-\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1/2\cdot(1/2-1)\cdots(1/2-(n-1))}{n!}(-4x)^n\right) \\
&= -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^n n!}(-4x)^n \\
a_2(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-2)!}{(n-1)!n!}\, x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}\, x^n
\end{aligned}$$

Réciproquement, si l'on note $b_0 = 0$ et $b_n = \binom{2n-2}{n-1}/n$, alors le fait que a_2 soit solution de $(\star)$ prouve que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait la même relation de récurrence que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Puisque $b_0 = 0$ et $b_1 = a_1$, ces deux suites sont égales. Finalement,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad a_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}}$$

Remarque : La quantité a_n est appelée le n-ième nombre de Catalan. Il intervient très régulièrement en combinatoire. C'est pas exemple le nombre de façons de mettre des parenthèses sur un produit de n nombres $e_1 \times e_2 \times \cdots e_n$. Par exemple pour $n = 4$, il y a 5 façons et $a_4 = 5$

$$(e_1\times e_2)\times(e_3\times e_4) \qquad ((e_1\times e_2)\times e_3)\times e_4 \qquad (e_1\times(e_2\times e_3))\times e_4 \qquad e_1\times((e_2\times e_3)\times e_4) \qquad e_1\times(e_2\times(e_3\times e_4))$$

13 ——— $(**)$ ———

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de réels définie par récurrence par

$$a_0 = a_1 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \geq 2, \qquad a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}$$

(a). Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

(b). En déduire que le rayon de convergence de la série $\sum \dfrac{a_n x^n}{n!}$ est supérieur ou égal à 1.

(c). Montrer que la somme de cette série est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

(d). En déduire une expression simple de $f(x)$ pour tout $x \in \left]-1;1\right[$, puis de a_n pour tout entier n.

(a) Une récurrence immédiate prouve que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeurs positives. La relation de récurrence montre aussitôt que $a_n \geq a_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$. Dès lors,

$$\boxed{\text{La suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante.}}$$

(b) Puisque la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, on en déduit que pour tout $n \geq 2$,

$$a_n \leq a_{n-1} + (n-1)a_{n-1} = n a_{n-1}$$

d'où par récurrence immédiate $\qquad a_n \leq n!$

Il s'ensuit que $a_n x^n/n! = O(x^n)$ pour tout x, et donc que la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n/n!$ converge pour tout $|x| < 1$. Par suite,

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geq 0} \frac{a_n\, x^n}{n!} \text{ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.}}$$

(c) Fixons $x \in \,]-1;1[$. En dérivant terme à terme la somme de la série entière, il vient

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n\, a_n x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_{n+1}\, x^n}{n!}$$

D'après la formule de récurrence, on peut maintenant écrire

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n+1}\, x^n}{n!} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(a_n + n a_{n-1})}{n!} x^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n\, x^n}{n!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}\, x^n}{(n-1)!} \\
f'(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n\, x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n\, x^{n+1}}{n!}
\end{aligned}$$

cette dernière quantité n'étant autre que $(1+x)f(x)$. Finalement,

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est solution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre } y' = (1+x)y.}$$

(d) La résolution de l'équation différentielle avec la condition initiale $f(0) = u_0 = 1$ est immédiate et donne

$$\boxed{\forall x \in \,]-1;1[\,, \qquad f(x) = \exp(x + x^2/2)}$$

Pour retrouver l'expression de a_n, il convient de développer en série entière cette dernière fonction à l'aide d'un produit de Cauchy. En effet, pour tout réel x,

$$f(x) = e^x \cdot e^{x^2/2} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2^n n!}\right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right)$$

avec $b_n = 0$ si n est impair et $b_n = 2^{n/2}(n/2)!$ sinon. On en déduit que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \qquad \text{avec} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{2^k k!(n-2k)!}$$

Par unicité des coefficients d'un développement en série entière, on aboutit finalement à

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad a_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n!}{2^k k!(n-2k)!}}$$

Remarque : La quantité a_n est le nombre d'involutions de l'ensemble $[1;n]$, c'est-à-dire le nombre de fonction f bijectives de cet ensemble dans lui-même telles que $f \circ f = I_d$.

14 ——— $(**)$ ———

On note E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivables et telles que

$$f(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(x/2)$$

(a). Montrer qu'un élément f de E est nécessairement de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et qu'il existe un suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f^{(n)}(x) = a_n f(x/2^n)$$

(b). Déterminer la rayon de convergence R de la série $\sum a_n x^n/n!$.

(c). On pose pour tout $x \in \left]-R;R\right[$ $$g(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n x^n}{n!}$$

Montrer que g est l'unique élément de E.

(a) Soit f un élément de E. Alors pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$f'(x)=f(x/2)$$

Puisque f est dérivable, f' est dérivable par composition, et f est donc deux fois dérivable. Par récurrence immédiate, on en déduit que f est infiniment dérivable. Dérivons maintenant n fois la relation fonctionnelle. On obtient

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \forall x\in\mathbb{R},\qquad f^{(n+1)}(x)=\frac{1}{2^n}f^{(n)}(x/2)$$

et à nouveau par récurrence immédiate

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\qquad f^{(n)}(x)=\frac{1}{2^{0+1+\cdots(n-1)}}f\left(x/2^n\right)$$

Il suffit donc de poser $a_0=0$ et $a_n=\sum_{k=0}^{n-1}k=n(n-1)/2$ pour tout entier $n\geq 1$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Un élément } f \text{ de } E \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ et satisfait la relation}\\ \forall n\in\mathbb{N},\quad \forall x\in\mathbb{R},\qquad f^{(n)}(x)=\dfrac{1}{2^{n(n-1)/2}}f(x/2^n)\end{array}}$$

(b) Fixons $x\in\mathbb{R}_+^*$ et notons pour tout entier n $$u_n=\frac{a_n\,x^n}{n!}$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas et pour tout entier n,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{a_{n+1}\,x^{n+1}}{(n+1)!}\,\frac{n!}{a_n\,x^n}=\frac{x}{2^n(n+1)}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

Le critère de d'Alembert prouve la convergence de la série $\sum_{n\geq 0}u_n$ pour tout x. Ainsi,

$$\boxed{\text{La série entière } \sum_{n\geq 0}\frac{a_n\,x^n}{n!} \text{ a un rayon de convergence infini.}}$$

(c) Soit f un élément de E. D'après la question (a), $f^{(n)}(0)=a_n f(0)=a_n$ pour tout entier n. Justifions que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$. Fixons $x\in\mathbb{R}$. Alors,

$$\left|\int_0^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\right|=\frac{a_{n+1}}{n!}\left|\int_0^x(x-t)^n f(t/2^{n+1})\,\mathrm{d}t\right|\leq\frac{a_{n+1}\,|x|^{n+1}}{n!}\,||f||_{\infty,[0;x]}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

Ainsi, f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x,

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n\,x^n}{n!}=g(x)$$

On vient donc d'établir que $E\subset\{g\}$. Réciproquement, vérifions que g est bien un élément de E. D'une part, $g(0)=a_0=1$. D'autre part, g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme somme d'une série entière de rayon de convergence infini, avec pour tout x

$$g'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n\,a_n\,x^{n-1}}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_{n+1}\,x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n\,x^n}{2^n n!}=g(x/2)$$

Pour conclure, $\boxed{\text{La fonction } g \text{ est l'unique élément de } E.}$

15 ——— (**) ——— **PC X 2011**

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. On fait les hypothèses suivantes :

- Le quotient a_n/b_n admet une limite $c \in \mathbb{C}^*$.
- La série $\sum\limits_{n\geq 0} b_n$ diverge et $\sum\limits_{n\geq 0} b_n z^n$ a un rayon de convergence égal à 1.

Justifier que la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ a également un rayon de convergence égal à 1, puis que

$$\frac{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n}{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n} \xrightarrow[x\to 1^-]{} c$$

En déduire un équivalent lorsque x tend vers 1^- de $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (\ln n) x^n$. On pourra étudier $(1-x)g(x)$.

Puisque le quotient a_n/b_n a une limite non nulle, on en déduit immédiatement que pour tout réel ρ, la suite $(a_n\rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $(b_n\rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$ l'est. Les deux séries entières $\sum\limits_{n\geq 0} a_n\, z^n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} b_n\, z^n$ ont donc même rayon de convergence. Notamment,

$$\boxed{\text{La série entière } \sum\limits_{n\geq 0} a_n\, z^n \text{ a un rayon de convergence égal à 1.}}$$

Dans toute la suite, on note
$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n \qquad \text{et} \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, x^n$$

Commençons par justifier que g tend vers $+\infty$ en 1^-. Il est clair que g est croissante sur $[0;1[$ comme somme (infinie) de fonctions croissantes. Elle admet donc une limite dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ en 1^-. Supposons cette limite finie. Pour tout entier N,

$$\sum_{n=0}^{N} b_n\, x^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} b_n\, x^n \qquad \text{puis} \qquad \sum_{n=0}^{N} b_n \leq \lim_{x\to 1^-} g(x)$$

par passage à la limite. Cette égalité étant valable pour tout entier N, on a une absurdité car la série $\sum\limits_{n\geq 0} b_n$est supposée divergente. Ainsi, g est bien de limite $+\infty$ en 1^-.

Fixons pour finir $\epsilon > 0$. Il existe un entier N tel que $|a_n - c\, b_n| \leq \epsilon\, b_n$ pour tout $n \geq N$. Alors, pour tout $x \in [0;1[$,

$$\begin{aligned} |f(x) - c\, g(x)| &= \left|\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - c\, b_n)\, x^n\right| \\ &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n - c\, b_n|\; x^n \\ |f(x) - c\, g(x)| &\leq \sum_{n=0}^{N-1} |a_n - c\, b_n|\, x^n + \sum_{n=N}^{+\infty} \epsilon\, b_n x^n \end{aligned}$$

Quitte à rajouter des termes positifs, on a $0 \leq \sum\limits_{n=N}^{+\infty} \epsilon\, b_n x^n \leq \epsilon\, g(x)$. Par ailleurs, la quantité $h_N(x) = \sum\limits_{n=0}^{N-1} |a_n - c\, b_n|\, x^n$ a une limite finie en 1^-. Puisque g tend vers $+\infty$ en 1^-, on en déduit que le quotient h_N/g tend vers 0 en 1^-, et qu'il existe un voisinage de 1 sur lequel il est majoré par ϵ. Finalement, on en déduit que

$$\exists \delta > 0, \quad \forall x \in\,]1-\delta;1[\,, \qquad |f(x) - cg(x)| \leq 2\epsilon\, g(x)$$

On a donc $f - g = o(g)$ au voisinage de 1 et donc

$$\boxed{\frac{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n}{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n x^n} \xrightarrow[x\to 1^-]{} c}$$

Donnons maintenant un équivalent de g. Si l'on note $\varphi : x \longmapsto (1-x)g(x)$, alors pour tout $x \in\,]0;1[$, par changement d'indice,

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\ln n) x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} (\ln n) x^{n+1} = \sum_{n=2}^{+\infty} (\ln n - \ln(n-1))\, x^n$$

Lorsque n tend vers $+\infty$, on a
$$\ln n - \ln(n-1) = -\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$$

La série $\sum\limits_{n\geq 1} 1/n$ diverge, et $\sum\limits_{n\geq 0} z^n/n$ a un rayon de convergence égal à 1, ce qui permet d'appliquer ce qui précède. Il s'ensuit que lorsque x tend vers 1^-,

$$\varphi(x) = (1-x)g(x) \sim \sum_{n=1}^{+\infty} x^n/n = -\ln(1-x)$$

et donc
$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} (\ln n)x^n \underset{x\to 1^-}{\sim} \frac{-\ln(1-x)}{1-x}}$$