II Convergence dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose qu'il existe une norme $\|\cdot\|$ sur E telle que l'inégalité suivante soit satisfaite pour tout $x \in E$,

$$\|u(x)\| \leq \|x\|.$$

Pour tout entier naturel k non nul, on considère l'endomorphisme

$$r_k = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} u^l = \frac{1}{k}(\mathrm{I}_E + u + u^2 + \cdots + u^{k-1}),$$

où I_E représente l'endomorphisme identité de E.

6. Soit $x \in \ker(u - \mathrm{I}_E)$. Déterminer $\lim_{k\to\infty} r_k(x)$.

7. Soit $x \in \operatorname{Im}(u - \mathrm{I}_E)$. Montrer que $\lim_{k\to\infty} r_k(x) = 0_E$.

8. En déduire que $E = \ker(u - \mathrm{I}_E) \oplus \operatorname{Im}(u - \mathrm{I}_E)$.

9. Soit $x \in E$, un vecteur quelconque. Montrer que la suite $\big(r_k(x)\big)_{k\in\mathbf{N}^*}$ converge vers un vecteur de E, que l'on notera $p(x)$. Interpréter géométriquement l'application $p : E \longrightarrow E$ ainsi définie.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels. On suppose qu'il existe une norme, aussi notée $\|\cdot\|$, sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ identifié à $\mathbf{R}^n$, telle que, pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, on ait $\|AX\| \leq \|X\|$. Pour tout k entier naturel non nul, on considère la matrice

$$R_k = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} A^l = \frac{1}{k}(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}), \tag{2}$$

où I_n est la matrice identité dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

10. Montrer que la suite de matrices $(R_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ vers une matrice P, telle que $P^2 = P$.

III Matrices stochastiques

On fixe dans cette partie, un entier $n \geq 2$.

Définition 1 *On notera $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, la matrice-colonne dont tous les coefficients sont égaux à 1.*

Définition 2 *Une matrice carrée $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est dite* **stochastique** *si elle vérifie les conditions suivantes :*

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} \geq 0; \tag{3}$$

$$\forall i \in [\![1,n]\!],\ \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1. \tag{4}$$

Nous dirons aussi qu'une matrice-ligne $L = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{R})$ est stochastique lorsque ses coefficients λ_i sont tous positifs ou nuls, et de somme égale à 1.

11. Vérifier que la condition (4) équivaut à la condition $AU = U$.

12. En déduire que l'ensemble $\mathcal{E}$ des matrices stochastiques (carrées d'ordre n) est stable par le produit matriciel.

13. Montrer que cet ensemble $\mathcal{E}$ est une partie fermée et convexe de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

On munit l'espace $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par $\|X\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n}|x_i|$ si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

14. Montrer que, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est stochastique, alors on a $\|AX\|_\infty \leq \|X\|_\infty$ pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$.

Dans les questions 15 à 22, on note $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice stochastique, et on suppose qu'il existe un entier naturel non nul p tel que la matrice A^p ait tous ses coefficients strictement positifs. Pour tout k entier naturel non nul, on posera

$$R_k = \frac{1}{k}\sum_{l=0}^{k-1} A^l.$$

15. Montrer que $\ker(A^p - I_n)$ est de dimension 1.

    Indication : soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \ker(A^p - I_n)$, *soit* $s \in [\![1, n]\!]$ *un indice tel que* $x_s = \max_{1\leq j\leq n} x_j$, *on montrera que* $x_j = x_s$ *pour tout* $j \in [\![1, n]\!]$.

16. En déduire que $\ker(A - I_n) = \mathrm{Vect}(U)$.

17. Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}^*$, la matrice R_k est stochastique.

18. Montrer que la suite $(R_k)_{k\in\mathbf{N}^*}$ converge dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ vers une matrice P, stochastique, de rang 1.

19. En déduire que l'on peut écrire $P = UL$, où $L = (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{R})$ est une matrice-ligne stochastique.

20. Montrer que $PA = P$. En déduire que L est la seule matrice-ligne stochastique vérifiant $LA = L$.

21. Montrer que les coefficients de la matrice-ligne L sont tous strictement positifs.

22. Montrer que le réel 1 est valeur propre simple de la matrice A.

    On pourra utiliser le résultat de la question 8.