

1 _____ (*) _____

(a). Calculer $\arctan 2 + \arctan 5 + \arctan 8$.

(b). Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$: $\arctan(x-3) + \arctan x + \arctan(x+3) = 5\pi/4$.

(a). Dans toute la suite, on note $\alpha = \arctan 2 + \arctan 5 + \arctan 8$

Pour tous réels a, b tels que a, b et $a+b$ sont distincts de $\pi/2[\pi]$, on a

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \quad (*)$$

Remarquons ensuite que par croissance de la fonction tangente

$$\forall k \in \{2, 5, 8\}, \quad \arctan 1 = \frac{\pi}{4} < \arctan k < \lim_{+\infty} \arctan = \frac{\pi}{2}$$

On peut donc appliquer la formule (*) deux fois ce qui donne après calculs

$$\tan(\alpha) = \frac{8 + \frac{2+5}{1-10}}{1 - 8 \cdot \frac{2+5}{1-10}} = \frac{8 - \frac{7}{9}}{1 + 8 \cdot \frac{7}{9}} = \frac{8 \cdot 9 - 7}{9 + 7 \cdot 8} = 1$$

La fonction $\tan$ réalise une bijection de $]\pi/2; 3\pi/2[$ dans $\mathbb{R}$ donc α est l'unique réel appartenant à cet intervalle dont la tangente vaut 1. Or, $\tan(5\pi/4) = 1$ donc

$$\boxed{\arctan 2 + \arctan 5 + \arctan 8 = \frac{5\pi}{4}}$$

(b). Notons $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \arctan(x-3) + \arctan(x) + \arctan(x+3)$

La fonction f est alors somme de trois fonctions strictement croissantes donc également strictement croissante. L'équation $f(x) = 5\pi/4$ a donc au plus une solution. Or d'après le (a), 5 est solution. Par suite,

$$\boxed{\text{L'équation } \arctan(x-3) + \arctan(x) + \arctan(x+3) = \frac{5\pi}{4} \text{ admet 5 comme unique solution.}}$$

2 _____ (**) _____

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(x+1) - f(x) \xrightarrow{+\infty} \ell \in \mathbb{R}$. Montrer que $f(x)/x \xrightarrow{+\infty} \ell$.

On suppose dans un premier temps que $\ell = 0$. On fixe $\epsilon > 0$. Il existe un réel $A \geq 0$ tel que

$$\forall x \geq A, \quad |f(x+1) - f(x)| \leq \epsilon/2$$

Soit maintenant un réel $x \geq A$. On introduit le plus grand entier n tel que $x - n \geq A$. Alors,

$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq \frac{|f(x) - f(x-1)| + \dots + |f(x-n+1) - f(x-n)| + |f(x-n)|}{x} \leq \frac{n(\epsilon/2) + |f(x-n)|}{x}$$

Puisque $x-n \geq A$, on a $x \geq n$ et donc $n/x \leq 1$. Notons maintenant M le maximum de $|f|$ sur le segment $[0; A+1]$ (ce maximum existe car f est continue). Par définition de n , $x - (n+1) < A$ donc $x - n \leq A+1$ et ainsi $|f(x-n)| \leq M$. On choisit B tel que $M/B \leq \epsilon/2$. Alors pour tout $x \geq \max(A, B)$, on a établi la majoration

$$\left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq \frac{n}{x} \frac{\epsilon}{2} + \frac{M}{B} \leq \epsilon$$

Ceci étant vrai pour tout ϵ , on a bien $f(x)/x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Le cas général s'en déduit en appliquant le cas particulier à la fonction $g : x \mapsto f(x) - \ell x$.

$$\boxed{f(x)/x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell}$$

Remarque : Tout le monde aura reconnu une version continue du théorème de la moyenne de Césaro.

3 _____ (*) _____

On cherche à déterminer les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f \circ f)(x) = 3 + \frac{x}{2} \quad (*)$$

(a). Soit α un réel quelconque. Etudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = \alpha \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 3 + u_n/2$$

(b). Justifier que si f satisfait $(*)$, alors $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f\left(3 + \frac{x}{2}\right) = 3 + \frac{f(x)}{2}$

Conclure.

(a) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique. On cherche donc d'abord sa limite ℓ éventuelle. Sous réserve d'existence,

$$\ell = 3 + \ell/2 \quad \text{d'où} \quad \ell = 6$$

On pose alors $v_n = u_n - 6$ et pour tout entier n

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = u_n/2 - 3 = (u_n - 6)/2 = v_n/2 \quad \text{d'où} \quad v_n = \frac{v_0}{2^n}$$

On en déduit que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de limite nulle et donc

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 6.

(b) Pour tout réel x ,

$$(f \circ f \circ f)(x) = (f \circ f)(f(x)) = 3 + \frac{f(x)}{2}$$

$$= f((f \circ f)(x)) = f\left(3 + \frac{x}{2}\right)$$

et donc
$$f\left(3 + \frac{x}{2}\right) = 3 + \frac{f(x)}{2}$$

En dérivant cette égalité par rapport à x , il vient pour tout réel x

$$f'\left(3 + \frac{x}{2}\right) = f'(x)$$

Fixons maintenant $\alpha \in \mathbb{R}$ et notons $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie comme au (a). D'après ce qui précède,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f'(u_{n+1}) = f'(u_n) \quad \text{d'où} \quad f'(u_n) = f'(\alpha)$$

En passant à la limite, f' étant continue, il vient $f'(\alpha) = f'(6)$. Le réel α ayant été choisi arbitrairement, f' est constante donc f est affine. Soit donc a, b tel que $f : x \mapsto ax + b$. Alors $(f \circ f) : x \mapsto a^2x + ab + b$ et donc

$$a^2 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad b(a+1) = 3$$

On trouve donc finalement deux solutions.

Les applications vérifiant $(*)$ sont les deux fonctions affines

$$x \mapsto \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} \quad \text{et} \quad x \mapsto -\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$$

4 ————— $(**)$ —————

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ et $P_n(x)$ la quantité définie par

$$P_n(x) = (x^2 + 1)^n \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(\frac{x - \cotan \varphi}{x^2 + 1} \right)$$

Montrer que P_n est une application polynomiale de degré n et déterminer ses racines.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, décomposons $X - \cotan \varphi$ dans la base $\{X + i, X - i\}$ de $\mathbb{C}_1[X]$. On cherche donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tels que

$$X - \cotan \varphi = \lambda(X + i) + \mu(X - i)$$

On a donc le système
$$\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ i(\lambda - \mu) = -\cotan \varphi \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2}(1 + i \cotan \varphi) = -\frac{e^{-i\varphi}}{2i \sin \varphi} \\ \mu = \frac{1}{2}(-i \cotan \varphi + 1) = \frac{e^{i\varphi}}{2i \sin \varphi} \end{cases}$$

Par conséquent, on peut écrire pour tout réel x

$$\frac{x - \cotan \varphi}{x^2 + 1} = \frac{1}{2i \sin \varphi} \left[\frac{e^{i\varphi}}{x + i} - \frac{e^{-i\varphi}}{x - i} \right]$$

puis pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} \left(\frac{x - \cotan \varphi}{x^2 + 1} \right) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{2i \sin \varphi} \left[\frac{e^{i\varphi}}{(x+i)^n} - \frac{e^{-i\varphi}}{(x-i)^n} \right]$$

et donc

$$P_n(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{2i \sin \varphi} [e^{i\varphi}(x-i)^n - e^{-i\varphi}(x+i)^n]$$

Cette expression prouve bien que $P_n(x)$ est une expression polynomiale (elle est bien réelle car le terme entre crochets est de la forme $z - \bar{z}$ donc imaginaire pur). Elle est également de degré n car le coefficient du terme en x^n est égal à $(-1)^{n-1}(n-1)!$ qui est non nul.

Cherchons maintenant les racines de P_n . On raisonne par équivalence :

$$P_n(x) = 0 \iff e^{i\varphi}(x-i)^n - e^{-i\varphi}(x+i)^n = 0$$

On remarque que $x = i$ ne peut être solution ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} P_n(x) = 0 &\iff \left(\frac{x+i}{x-i} \right)^n = e^{2i\varphi} \\ &\iff \exists k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, \quad \frac{x+i}{x-i} = e^{2i\varphi+2ik\pi/n} \\ P_n(x) = 0 &\iff \exists k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, \quad (1 - e^{2i\varphi+2ik\pi/n})x = -i(1 + e^{2i\varphi+2ik\pi/n}) \end{aligned}$$

Pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, le complexe $e^{2i\varphi+2ik\pi/n}$ est différent de 1. En effet, sa puissance n est égale à $e^{2i\varphi}$ qui est différent de 1 car $\varphi \notin \pi\mathbb{Z}$. On peut donc écrire grâce à la formule de l'arc moitié

$$P_n(x) = 0 \iff \exists k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, \quad x = -i \frac{1 + e^{2i\varphi+2ik\pi/n}}{1 - e^{2i\varphi+2ik\pi/n}} = \cotan \left(\frac{\varphi + k\pi}{n} \right)$$

L'ensemble des racines de P_n est $\left\{ \cotan \left(\frac{\varphi + k\pi}{n} \right), k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \right\}$.

5 _____ (*) _____

Soit I un intervalle inclus dans $]0; +\infty[$, f de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et enfin a, b deux éléments distincts de I . Montrer que si la droite passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ passe par l'origine, alors il existe $c \in I$ tel que la tangente à la courbe en $(c, f(c))$ passe par l'origine.

La tangente au point d'abscisse c à la courbe représentative de f a pour équation

$$T_c : \quad y = f'(c)(x - c) + f(c)$$

Elle passe donc par l'origine si et seulement si $f(c) - cf'(c) = 0$. Considérons maintenant l'application

$$\begin{aligned} g : I &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x)/x \end{aligned}$$

Cette application est dérivable sur I puisque c'est le quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas (car $I \subset \mathbb{R}_+^*$). Par hypothèse, $g(a) = g(b)$ donc d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a; b[$ tel que $g'(c) = 0$. Or,

$$g'(c) = \frac{cf'(c) - f(c)}{c^2} \quad \text{d'où} \quad f(c) - cf'(c) = 0$$

D'après l'étude préliminaire, on a trouvé ce que l'on cherchait.

Il existe $c \in I$ tel que la tangente à la courbe en $(c, f(c))$ passe par l'origine.

6 _____ (*) _____

Soit $f : [0; 1] \longrightarrow [0; 1]$ continue, non constante et telle que $f \circ f = f$. Soit $a < b$ les deux réels tels que $f([0; 1]) = [a; b]$.

(a). Montrer que f est l'identité sur $[a; b]$.

(b). Montrer que si f est de plus dérivable sur $[0; 1]$, alors f est l'identité sur $[0; 1]$.

(c). Donner un exemple d'application de $[0; 1]$ dans lui-même continue, non constante, distincte de l'identité et telle que $f \circ f = f$.

- (a) Soit $x \in [a; b]$. Puisque $[a; b] = f([0; 1])$, il existe $y \in [0; 1]$ tel que $f(y) = x$ et ainsi

$$f(x) = f(f(y)) = (f \circ f)(y) = f(y) = x$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in [a; b]$,

La restriction de f à $[a; b]$ est l'identité.

- (b) Raisonnons par l'absurde en supposant que f n'est pas l'identité. Alors d'après la question précédente, $a > 0$ ou $b < 1$. Supposons par exemple $a > 0$. La fonction f étant dérivable en a , on a

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Puisque f est l'identité sur $[a; b]$, la limite à droite de ce quotient est égale à 1. Mais $f(x) \geq f(a)$ pour tout x par définition de a , donc la limite à gauche est négative. On en déduit une contradiction. Le cas $b < 1$ se traite de manière similaire. Au final,

Si f est dérivable, alors $f = I_d$ sur $[0; 1]$.

- (c) Il suffit en fait de prendre deux valeurs arbitraires pour a et b , et f continue, à valeurs dans $[a; b]$ et égale à l'identité sur $[a; b]$. Dans tous les cas, la propriété $f \circ f = f$ sera vérifiée. Par exemple,

Pour tous réels $a < b \in [0; 1]$, la fonction f définie sur $[0; 1]$ par

$$f : x \mapsto \begin{cases} a & \text{si } x \leq a \\ x & \text{si } x \in [a; b] \\ b & \text{si } x \geq b \end{cases}$$

est continue, non constante, différente de l'identité et satisfait $f \circ f = f$.

7 _____ (**) _____

Soit $f \in \mathcal{C}^1([a; +\infty[, \mathbb{R}))$ telle que f admet $f(a)$ pour limite en $+\infty$. Montrer que $f([a; +\infty[)$ est un segment et en déduire qu'il existe $\alpha \in [a; +\infty[$ tel que $f'(\alpha) = 0$.

Méthode « à la main » : Déjà, $f([a; +\infty[)$ est un intervalle car f est continue. Ensuite, f est bornée. En effet, elle converge en $+\infty$ donc est bornée au voisinage de ce point c'est-à-dire sur un intervalle de la forme $[b; +\infty[$. Par ailleurs, elle est continue donc bornée sur tout segment et notamment sur $[a; b]$.

Reste à montrer que les bornes sont atteintes. Soit par exemple M sa borne supérieure. Si $M = f(a)$, c'est réglé. Sinon, on choisit $\rho \in]f(a); M[$. On peut choisir b tel que $f(a) \leq f(x) \leq \rho$ pour tout $x \geq b$ car f tend vers $f(a)$ en $+\infty$. Dès lors, il est clair que M est également la borne supérieure de f sur $[a; b]$, qui est atteinte comme borne supérieure d'une fonction continue sur un segment. Finalement, f atteint sa borne supérieure. Il en est de même de sa borne inférieure. Cela prouve que $f([a; +\infty[)$ est bien un segment.

Méthode astucieuse : Soit φ une bijection $\mathcal{C}^\infty$ quelconque de $[0; 1[$ dans $[a; +\infty[$, par exemple

$$\begin{aligned} \varphi : [0; 1[&\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ t &\longmapsto a + \tan(\pi t/2) \end{aligned}$$

On pose alors $h = f \circ \varphi : [0; 1[\longrightarrow \mathbb{R}$. Alors par construction :

- D'une part, $h(0) = f(a)$ et h admet $f(a)$ pour limite en 1 car φ tend vers $+\infty$ en 1. On peut donc prolonger h par continuité en 1 en une fonction $\tilde{h}$ continue sur $[0; 1]$.
- D'autre part, il est clair que $f([a; +\infty[) = h([0; 1]) = \tilde{h}([0; 1])$ puisque $\tilde{h}$ prend la même valeur en 0 et 1.

L'image du segment $[0; 1]$ par la fonction continue $\tilde{h}$ est un segment. Par conséquent,

L'ensemble $f([a; +\infty[)$ est un segment.

La deuxième partie est une application immédiate du théorème de Rolle à $\tilde{h}$. Elle est continue sur $[0; 1]$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; 1[$ et prend la même valeur en 0 et en 1. Par conséquent, sa dérivée $\varphi' \cdot (f' \circ \varphi)$ s'annule sur $]0; 1[$, et comme $\varphi' > 0$, cela signifie que f s'annule sur $\varphi(]0; 1[)$ soit sur $]a; +\infty[$.

Il existe $\alpha \in [a; +\infty[$ tel que $f'(\alpha) = 0$.

8 _____ (*) _____

Etablir des formules de récurrence entre les intégrales suivantes

$$(a) \quad I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n(x) \, dx \quad (b) \quad J_n = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^n(x)} \, dx \quad (c) \quad K_n = \int_1^e \ln^n(x) \, dx$$

En déduire les valeurs de ces intégrales pour $n = 3$.

Dans tout l'exercice, on note $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite d'intégrales à calculer.

(a) On utilise le fait que $1 + \tan^2 = \tan'$. Ainsi,

$$I_n + I_{n+2} = \int_0^{\pi/4} \tan'(x) \tan^n(x) \, dx = \left[\frac{\tan^{n+1}(x)}{n+1} \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{n+1}$$

Par ailleurs, $I_0 = \pi/4$ et $I_2 = [\ln \cos x]_0^{\pi/4} = (\ln 2)/2$. On en déduit les deux formules (valables pour tout entier p)

$$I_{2p} = (-1)^p \left[\frac{\pi}{4} - \sum_{k=1}^p \frac{1}{2k-1} \right] \quad \text{et} \quad I_{2p+1} = \frac{(-1)^p}{2} \left[\ln 2 - \sum_{k=1}^p \frac{1}{k} \right]$$

(b) On combine judicieusement deux termes de la suite, précisément,

$$J_{n+2} - J_n = \int_0^{\pi/4} \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^{n+2} x} \, dx = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2 x}{\cos^{n+2} x} \, dx$$

puis on intègre par partie en dérivant l'un des $\sin$ et en intégrant $\sin / \cos^{n+2}$

$$J_{n+2} - J_n = \frac{1}{n+1} \left(\left[\frac{\sin x}{\cos^{n+1} x} \right]_0^{\pi/4} - \int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{\cos^{n+1} x} \, dx \right) = \frac{1}{n+1} \left(\frac{1}{(\sqrt{2})^n} - J_n \right)$$

Finalement, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad J_{n+2} = \frac{n}{n+1} J_n + \frac{(\sqrt{2})^n}{n+1}$

Ensuite, $J_0 = \pi/4$. On rappelle qu'une primitive de $1/\cos$ sur $]-\pi/2; \pi/2[$ est $x \mapsto \ln \tan(x/2 + \pi/4)$. Ainsi, il vient $I_1 = \ln \tan(3\pi/8) = \ln(1 + \sqrt{2})$. On peut alors calculer les termes suivants par récurrence.

$$J_2 = 1 \quad J_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \ln(1 + \sqrt{2})$$

On peut trouver comme précédemment une formule générale à l'aide d'une somme mais c'est pas joli et surtout vraiment pas intéressant.

(c) On intègre par parties en dérivant $\ln^n(x)$ et en intégrant 1. Il vient

$$\int_1^e \ln^n(x) \, dx = [x \ln^n(x)]_1^e - n \int_1^e \ln^{n-1}(x) \, dx \quad \text{soit} \quad K_n = e - n I_{n-1}$$

Puisque $K_0 = e - 1$, on peut alors calculer les premiers termes puis prouver par récurrence que pour tout $n \geq 2$,

$$K_n = (-1)^{n+1} n! \left(1 - e \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \right)$$

9 _____ (*) _____

Soit $f : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$. Justifier l'équivalent $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x^2}{2 \ln x}$.

Effectuons une intégration par parties en intégrant $t \mapsto 1$ et en dérivant $t \mapsto 1/\ln t$. Alors, pour tout $x > 1$,

$$f(x) = \left[\frac{t}{\ln t} \right]_x^{x^2} + \int_x^{x^2} \frac{dt}{(\ln t)^2} = \frac{x^2}{2 \ln x} - \frac{x}{\ln x} + \int_x^{x^2} \frac{dt}{(\ln t)^2}$$

Le deuxième terme de cette expression est négligeable devant le premier. Reste à justifier la même chose pour l'intégrale, ce qui se fait par majoration grossière :

$$\forall x > 1, \quad 0 \leq \int_x^{x^2} \frac{dt}{(\ln t)^2} \leq \int_x^{x^2} \frac{dt}{(\ln x)^2} = \frac{x^2 - x}{(\ln x)^2} = o\left(\frac{x^2}{\ln x}\right)$$

Par suite,

$$f(x) \sim \frac{x^2}{2 \ln x}$$

10

(**)

Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ continue. On pose

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \text{et} \quad I = F(b) = \int_a^b f(t) dt$$

- (a). Montrer que $I > 0$ et qu'il existe $m > 0$ tel que $f(x) \geq m$ pour tout $x \in [a; b]$.
 (b). Montrer que F admet une réciproque de classe $\mathcal{C}^1$.
 (c). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'existence et l'unicité de $x_0, \dots, x_n$ tels que

$$\forall i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, \quad \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t) dt = \frac{I}{n}$$

On pose

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

- (d). Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $J = \frac{1}{I} \int_a^b f(t)^2 dt$.
 (e). On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que $u_n - J = O(1/n)$.

- (a). La quantité I est strictement positive comme l'intégrale d'une fonction continue, positive et non identiquement nulle. La fonction f est continue sur un segment donc bornée et atteint ses bornes. Notamment, il existe $x_0 \in [a; b]$ tel que $f(x_0) = \min_{[a; b]} f$ et en prenant $m = f(x_0)$, on a bien $m > 0$ (car f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$) et $f(x) \geq m$ pour tout x .

$$I > 0 \text{ et il existe } m > 0 \text{ tel que } f(x) \geq m \text{ pour tout } x \in [a; b].$$

- (b). L'application F est la primitive d'une fonction continue donc elle est de classe $\mathcal{C}^1$, et sa dérivée f ne s'annule pas sur $[a; b]$. Par conséquent, c'est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $[a; b]$ vers son image $[0; I]$. En particulier,

$$\text{La fonction } F \text{ admet une réciproque de classe } \mathcal{C}^1.$$

- (c). Sous réserve d'existence de $x_0, \dots, x_n$, en sommant les relations, il vient

$$\int_{x_0}^{x_n} f(t) dt = I = \int_a^b f(t) dt \quad \text{d'où} \quad x_0 = a \quad \text{et} \quad x_n = b$$

nécessairement car $[x_0; x_n] \subset [a; b]$. Dès lors, en sommant les $i-1$ premières égalités pour tout $i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, il vient

$$\int_{x_0}^{x_i} f(t) dt = \int_a^{x_i} f(t) dt = F(x_i) = \frac{iI}{n} \quad \text{d'où} \quad x_i = F^{-1}\left(\frac{iI}{n}\right)$$

Au passage, cette relation reste vraie pour $i=0$ ou $i=n-1$. Cette étude justifie l'unicité de la famille $x_0, \dots, x_n$. On vérifie immédiatement que réciproquement, la famille $(x_i = F^{-1}(iI/n))_{i \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ convient.

- (d). Compte tenu de l'étude de la question (c), on a

$$u_n = \frac{1}{I} \left[\frac{I}{n} \sum_{i=1}^n (f \circ F^{-1})\left(\frac{iI}{n}\right) \right]$$

Il s'agit au terme $1/I$ près d'une somme de Riemann de la fonction continue $f \circ F^{-1}$ associée à la subdivision à pas régulier de l'intervalle $[0; I]$. On sait par théorème de cours que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, plus précisément

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{I} \int_0^I (f \circ F^{-1})(t) dt$$

Effectuons dans cette intégrale le changement de variable $u = F^{-1}(t)$. Alors, $t = F(u)$ et $dt = f(u) du$ d'où

$$\int_0^I (f \circ F^{-1})(t) dt = \int_{F^{-1}(0)}^{F^{-1}(I)} f(u)^2 du \quad \text{avec} \quad F^{-1}(0) = a \quad \text{et} \quad F^{-1}(I) = b$$

et donc

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{I} \int_a^b f(u)^2 du$$

(e). Notons $g = f \circ F^{-1}$. Alors g est de classe $\mathcal{C}^1$ par composition et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{1}{I} \cdot \frac{I}{n} \sum_{i=1}^n g\left(\frac{iI}{n}\right) dt \quad \text{tandis que} \quad J = \frac{1}{I} \int_0^I g(t) dt$$

La différence de ces quantités se réécrit, en notant $y_i = iI/n$ et en utilisant Chasles

$$u_n - J = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^n \left[\frac{I}{n} g(y_i) - \int_{y_{i-1}}^{y_i} g(t) dt \right] = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^n \left[\int_{y_{i-1}}^{y_i} (g(t) - g(y_i)) dt \right]$$

On peut alors utiliser l'inégalité des accroissements finis puisque g est $\mathcal{C}^1$, ce qui entraîne notamment que sa dérivée est bornée sur le segment $[a; b]$, et il vient successivement

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \forall t \in [y_{i-1}; y_i], \quad |g(t) - g(y_i)| \leq \|g'\|_\infty |t - y_i| \leq \|g'\|_\infty \frac{I}{n}$$

puis $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \left| \int_{y_{i-1}}^{y_i} (g(t) - g(y_i)) dt \right| \leq \int_{y_{i-1}}^{y_i} \|g'\|_\infty \frac{I}{n} dt = \|g'\|_\infty \frac{I^2}{n^2}$

et enfin $|u_n - J| \leq \frac{1}{I} \sum_{i=1}^n \left| \int_{y_{i-1}}^{y_i} (g(t) - g(y_i)) dt \right| \leq \frac{1}{I} \cdot n \cdot \|g'\|_\infty \frac{I^2}{n^2} = \frac{I \|g'\|_\infty}{n}$

soit bien

$$u_n - J = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

11 ————— (*) ————— **Centrale PC 2009**

Soit E l'ensemble des applications continues de $[0; 1]$ dans lui-même. Déterminer l'ensemble des éléments f de E tels que

$$\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 f(t)^2 dt$$

Soit $f \in E$ vérifiant la relation de l'énoncé. Alors,

$$\int_0^1 (f(t) - f(t)^2) dt = 0 = \int_0^1 f(t)(1 - f(t)) dt$$

Or, puisque f est à valeurs dans $[0; 1]$, l'application $f(1 - f)$ est continue et positive. Comme elle est d'intégrale nulle, elle est identiquement nulle et ainsi, pour tout $t \in [0; 1]$, $f(t) = 0$ ou $f(t) = 1$. Enfin, f étant continue, elle est nécessairement constante égale à 0 ou à 1.

Les éléments f de E vérifiant $\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 f(t)^2 dt$ sont la fonction nulle et la fonction constante égale à 1.

12 ————— (**) ————— **ENS PC 2014**

Soient $a < b$ deux réels. Déterminer toutes les éléments f de $\mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{R})$ telles que

$$\forall c < d \in [a; b], \quad \frac{1}{d - c} \int_c^d f(t) dt = \frac{f(c) + f(d)}{2}$$

Le lecteur aura fait le lien entre l'égalité de l'énoncé la formule d'approximation des trapèzes :

$$\int_c^d f(t) dt \approx (d - c) \frac{f(c) + f(d)}{2}$$

Il est clair qu'il s'agit d'une égalité quels que soient c et d pour toute fonction affine. Montrons la réciproque. Notons F une primitive quelconque de f (elle existe car f est continue). Par hypothèse, pour tout $x \in [a; b]$,

$$f(x) = -f(a) + 2 \frac{F(x) - F(a)}{x - a}$$

Puisque f est continue, alors F est $\mathcal{C}^1$ et f est $\mathcal{C}^1$ sur $]a; b]$ par quotient de fonctions continues d'après l'égalité ci-dessus. Mais f étant $\mathcal{C}^1$, F est en réalité $\mathcal{C}^2$, donc f également toujours par la même égalité. Une récurrence immédiate prouve que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]a; b]$. En reprenant le travail avec l'égalité

$$f(x) = -f(b) + 2 \frac{F(x) - F(b)}{x - b}$$

on obtient donc f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a; b]$. Ré-écrivons maintenant l'égalité de l'énoncé sous la forme

$$\forall x \in [a; b], \quad 2(F(x) - F(a)) = (x - a)(f(x) + f(a))$$

Une première dérivation donne alors pour tout x ,

$$2f(x) = (f(x) + f(a)) + (x - a)f'(x) \quad \text{soit} \quad (x - a)f'(x) - (f(x) - f(a)) = 0$$

Sur $]a; b]$, il s'agit d'une équation différentielle en f du premier ordre à coefficients continus dont une solution particulière est $x \mapsto f(a)$ et la solution de l'équation sans second membre de la forme $x \mapsto \lambda(x - a)$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x > a, \quad f(x) = \lambda(x - a) + f(a)$$

et l'égalité est bien entendu également vérifiée en $x = a$. Finalement, f est une fonction affine. La réciproque se vérifie facilement.

Les fonctions continues sur $[a; b]$ vérifiant pour tous $c < d \in [a; b]$

$$\frac{1}{d - c} \int_c^d f(t) dt = \frac{f(c) + f(d)}{2}$$

sont les applications affines.

13

(**)

X PC 2016

Si $x \in \mathbb{R}$, on note $\lfloor x \rfloor$ sa partie entière, et $\{x\}$ sa partie décimale (on a donc $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$).

(a). Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$,

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) = \int_1^n f(x) dx + \frac{1}{2} (f(1) - f(n)) + \int_1^n \left(\{x\} - \frac{1}{2} \right) f'(x) dx$$

(b). On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2i\pi \ln(k)}$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est-elle convergente ?

(a). Soit $k \in \mathbb{N}$. Sur $[k; k+1[$, la fonction $x \mapsto \{x\}$ coïncide avec $x \mapsto x - k$ et ainsi, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} \left(\{x\} - \frac{1}{2} \right) f'(x) dx &= \int_k^{k+1} \left(x - k - \frac{1}{2} \right) f'(x) dx \\ &= \left[\left(x - k - \frac{1}{2} \right) f(x) \right]_k^{k+1} - \int_k^{k+1} f(x) dx \\ \int_k^{k+1} \left(\{x\} - \frac{1}{2} \right) f'(x) dx &= \frac{1}{2} (f(k) + f(k+1)) - \int_k^{k+1} f(x) dx \end{aligned}$$

En sommant cette égalité pour k allant de 1 à $n-1$ où $n \geq 2$, il vient

$$\int_1^n \left(\{x\} - \frac{1}{2} \right) f'(x) dx = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} (f(k) + f(k+1)) - \int_1^n f(x) dx$$

Il ne reste plus qu'à vérifier que

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} (f(k) + f(k+1)) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} f(k) + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n f(k) = \sum_{k=1}^n f(k) - \frac{f(1)}{2} + \frac{f(n)}{2}$$

et finalement pour tout $n \geq 2$,

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k) = \int_1^n f(x) dx + \frac{1}{2} (f(1) - f(n)) + \int_1^n \left(\{x\} - \frac{1}{2} \right) f'(x) dx$$

(b). Posons $f : x \mapsto e^{2i\pi \ln x}$ et appliquons la question précédente. Il vient pour $n \geq 2$

$$u_n = \frac{1}{n} \left[\int_1^n f(x) dx + \frac{1}{2} (f(1) + f(n)) + \int_1^n \left(\{x\} - \frac{1}{2} \right) f'(x) dx \right]$$

- Dans un premier temps, puisque f est bornée, il vient

$$\frac{1}{2n} (f(1) + f(n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

- Pour la première intégrale, on peut effectuer le changement de variable $u = \ln x$ et ainsi, $x = e^u$ puis $dx = e^u du$ et

$$\frac{1}{n} \int_1^n e^{2i\pi \ln x} dx = \frac{1}{n} \int_0^{\ln n} e^{(1+2i\pi)u} du = \frac{1}{n} \left[\frac{e^{(1+2i\pi)u}}{1+2i\pi} \right]_0^{\ln n} = \frac{e^{2i\pi \ln n}}{1+2i\pi}$$

Cette quantité reste bornée, mais n'admet pas de limite lorsque n tend vers $+\infty$ (voir preuve en fin d'exercice).

- Pour la seconde intégrale, on peut remarquer que $x \mapsto \{x\} - 1/2$ est majorée par $1/2$ en valeur absolue, ce qui permet la majoration grossière

$$\frac{1}{n} \left| \int_1^n \left(x - \frac{1}{2} \right) f'(x) dx \right| \leq \frac{1}{2n} \int_1^n |f'(x)| dx$$

Or, puisque $f' : x \mapsto 2i\pi e^{2i\pi \ln x} / x$, il s'ensuit que

$$\frac{1}{2n} \int_1^n |f'(x)| dx = \frac{\pi}{n} \int_1^n \frac{1}{x} dx = \frac{\pi \ln n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Pour conclure, u_n est la somme de trois quantités, dont deux sont de limite nulle lorsque n tend vers $+\infty$, et la dernière bornée mais divergente. Par conséquent,

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est divergente.

Remarque : Pour établir la divergence de la suite $(e^{2i\pi \ln n})_{n \in \mathbb{N}^*}$, on peut par exemple se contenter d'établir la divergence de sa partie réelle, à savoir la suite $(\cos(\pi \ln n))_{n \in \mathbb{N}^*}$. Pour cela, on peut plus généralement montrer que si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de limite $+\infty$ telle que $a_{n+1} - a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, alors non seulement $(\cos a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente, mais on peut également pour tout $\ell \in [-1; 1]$ en extraire une sous-suite convergente de limite ℓ . La preuve n'est pas compliquée mais un peu technique, les plus curieux peuvent venir en discuter avec moi à la fin d'un cours.

14

(*)

Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x - e x^3 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$

Lorsque x tend vers $+\infty$, on peut écrire

$$\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} + O\left(\frac{1}{x^4}\right) \quad (1)$$

puis
$$\left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = \exp \left[x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right] = \exp \left(1 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right) \right)$$

On utilise la propriété multiplicative de l'exponentielle puis son DL en 0 et il vient

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x &= e \cdot \exp \left(-\frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right) \right) \\ &= e \cdot \left[1 + \left(-\frac{1}{2x} + \frac{1}{3x^2} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4x^2} \right) + O\left(\frac{1}{x^3}\right) \right] \\ \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x &= e \cdot \left[1 - \frac{1}{2x} + \frac{11}{24x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right) \right] \end{aligned} \quad (2)$$

En réinjectant (1) et (2) dans l'expression de l'énoncé, on trouve

$$x^2 \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x - e x^3 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \frac{e}{8} + O\left(\frac{1}{x}\right)$$

et donc

$$x^2 \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x - e x^3 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{e}{8}$$

15

(**)

CCP PC 2011

Soit $f : x \mapsto (e^{x^2} - 1)/x$ prolongée par continuité en 0 par $f(0) = 0$.

- Montrer que f est dérivable en 0. Préciser $f'(0)$.
- Donner un développement limité à l'ordre 5 en 0 de f , f^3 et f^5 .
- (5/2) Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 et que f est $\mathcal{C}^\infty$ et strictement croissante.
- Vérifier que f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et que f^{-1} est également $\mathcal{C}^\infty$ et impaire.

- (e) Donner un développement limité à l'ordre 5 en 0 de $x \mapsto f^{-1}(x)$.

- (a). Par définition de f , on a pour tout $x \neq 0$,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} = \frac{(1 + x^2 + O(x^4)) - 1}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

Par suite,

La fonction f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 1$.

- (b). Le développement limité en 0 de la fonction exponentielle prouve que

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + O(x^8)$$

ce qui permet d'en déduire aussitôt les trois développements limités suivants en 0 :

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{6} + O(x^7) \quad f(x)^3 \underset{x \rightarrow 0}{=} x^3 + \frac{3x^5}{2} + O(x^7) \quad f(x)^5 \underset{x \rightarrow 0}{=} x^5 + O(x^7)$$

- (c). En utilisant le développement en série entière de l'exponentielle, on obtient cette fois pour tout réel x ,

$$f(x) = \frac{1}{x} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(x^2)^k}{k!} - 1 \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{2k-1}}{k!}$$

soit encore

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(k+1)!}$$

Il s'ensuit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme somme d'une série entière de rayon de convergence infini et par dérivation terme à terme

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2k+1)}{(k+1)!} x^{2k}$$

Ainsi, $f'(x)$ est strictement positif pour $x \neq 0$ comme somme de termes strictement positifs $f'(0) = 1 > 0$. Cela assure que

La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

- (d). Par croissance comparées, la fonction f tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) en $+\infty$ (resp. $-\infty$). La stricte monotonie et la continuité assure que f est bijective. On vérifie par ailleurs immédiatement que f est impaire, et on sait d'après la question précédente qu'elle est $\mathcal{C}^\infty$. Ces propriétés sont alors conservées pour la réciproque f^{-1} .

La fonction f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de réciproque impaire et $\mathcal{C}^\infty$.

- (e). Puisque f^{-1} est $\mathcal{C}^\infty$, elle admet un développement limité à n'importe quel ordre en 0. Etant de plus impaire, son développement à l'ordre 5 en 0 est de la forme :

$$f^{-1}(y) \underset{y \rightarrow 0}{=} a_1 y + a_3 y^3 + a_5 y^5 + O(y^7)$$

Notons que f est de limite nulle en 0, ce qui permet d'utiliser ce DL et d'écrire

$$f^{-1}(f(x)) = x \underset{x \rightarrow 0}{=} a_1 f(x) + a_3 f(x)^3 + a_5 f(x)^5 + O(f(x)^7)$$

On peut alors injecter le DL de f en 0 obtenu précédemment et écrire

$$\begin{aligned} x \underset{x \rightarrow 0}{=} a_1 \left(x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{6} \right) + a_3 \left(x^3 + \frac{3x^5}{2} \right) + a_5 x^5 + O(x^7) \\ \underset{x \rightarrow 0}{=} a_1 x + \left(\frac{a_1}{2} + a_3 \right) x^3 + \left(\frac{a_1}{6} + \frac{3a_3}{2} + a_5 \right) x^5 + O(x^7) \end{aligned}$$

Par unicité des coefficients d'un DL, on en déduit successivement que

$$a_1 = 1, \text{ puis } a_3 = -\frac{a_1}{2} = -\frac{1}{2}, \text{ et enfin que } a_5 = -\frac{a_1}{6} - \frac{3a_3}{2} = -\frac{1}{6} + \frac{3}{4} = \frac{7}{12}$$

Finalement,

$$f^{-1}(y) \underset{y \rightarrow 0}{=} y - \frac{y^3}{2} + \frac{7y^5}{12} + O(y^7)$$

16

(**)

Déterminer un développement asymptotique à 2 termes en 1 de $x \mapsto \arcsin x$.

On sait que $\arcsin$ est de limite $\pi/2$ en 1. Pour $x \in]0; 1[$, on note

$$t = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$$

Alors $t \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$ donc $\sin t \sim t$. Or, d'après les relations trigonométriques,

$$\sin t = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(x)\right) = \cos \arcsin x = \sqrt{1 - x^2}$$

Posons maintenant $h = 1 - x$ de sorte que $x = 1 - h$ et $h \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0^+$. Ainsi,

$$\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - (1 - h)^2} = \sqrt{2h - h^2} \sim \sqrt{2h}$$

Par suite,

$$\frac{\pi}{2} - \arcsin(x) = t \sim \sin t \sim \sqrt{2h} = \sqrt{2(1 - x)}$$

Pour conclure,

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \sqrt{2}\sqrt{1 - x} + o(\sqrt{1 - x})$$

17

(**)

Soit $f \in \mathcal{C}^2([0; 1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f'(0) = f'(1) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer qu'il existe $\alpha \in [0; 1]$ tel que $|f''(\alpha)| \geq 4$.

Appliquons l'inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 entre 0 et 1/2 puis entre 1/2 et 1. Cela donne

$$\left| f\left(\frac{1}{2}\right) - f(0) - \frac{f'(0)}{2} \right| \leq \frac{(1/2 - 0)^2}{2!} \|f''\|_{\infty, [0; 1/2]} \quad \text{soit} \quad \left| f\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq \frac{\|f''\|_{\infty, [0; 1/2]}}{8}$$

$$\text{puis} \quad \left| f\left(\frac{1}{2}\right) - f(1) + \frac{f'(1)}{2} \right| \leq \frac{(1/2 - 1)^2}{2!} \|f''\|_{\infty, [1/2; 1]} \quad \text{soit} \quad \left| f\left(\frac{1}{2}\right) - 1 \right| \leq \frac{\|f''\|_{\infty, [1/2; 1]}}{8}$$

Remarquons maintenant que l'une des deux quantités $|f(1/2)|$ et $|f(1/2) - 1|$ est nécessairement supérieure ou égale à 1/2. Par suite, on obtient soit $\|f''\|_{\infty, [0; 1/2]} \geq 4$, soit $\|f''\|_{\infty, [1/2; 1]} \geq 4$. Dans tous les cas, $\|f''\|_{\infty, [0; 1]} \geq 4$.

Maintenant, puisque $|f''|$ est continue sur le segment $[0; 1]$, elle atteint sa borne supérieure en au moins un point α et ainsi,

$$\text{Il existe } \alpha \in [0; 1] \text{ tel que } |f''(\alpha)| \geq 4.$$

18

(**)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et telle que $f(0) = 0$ et $\lim_{+\infty} f = 0$. Montrer qu'il existe une suite de réels $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ strictement croissante telle que pour tout entier n , on ait $f^{(n)}(x_n) = 0$.

On construit la suite par récurrence. On pose bien entendu $x_0 = 0$ pour l'initialisation. Supposons maintenant construits $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ tels que $f^{(k)}(x_k) = 0$ pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$. On raisonne par l'absurde en supposant que $f^{(n+1)}$ ne s'annule pas sur $I =]x_n; +\infty[$. La fonction $f^{(n+1)}$ étant continue, elle est de signe constant sur I . Sans perdre de généralité, on peut donc supposer qu'elle est strictement positive, et ainsi $f^{(n)}$ est strictement croissante sur I . Considérons alors $a > x_n$ quelconque. Alors $f^{(n)}(a) > f^{(n)}(x_n) = 0$. Pour tout $x \geq a$, d'après la formule de Taylor avec reste intégral,

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + \int_a^x \frac{(x - t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

Le reste intégral est alors l'intégrale d'une fonction positive car par hypothèse $f^{(n+1)}(t) > 0$ pour $t \geq a > x_n$. Ainsi,

$$f(x) \geq \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

Le minorant est une quantité polynomiale de degré n et de coefficient dominant $f^{(n)}(a)/n! > 0$. Il tend donc vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. Au final, on aboutit à $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ ce qui est contraire aux hypothèses.

Par l'absurde, on a donc justifié l'existence de $x_{n+1} > x_n$ en lequel $f^{(n+1)}$ s'annule. Le principe de récurrence permet de conclure.

$$\text{Il existe une suite } (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ strictement croissante telle que } f^{(n)}(x_n) = 0 \text{ pour tout entier } n.$$

19

(**)

Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et x tel que $f''(x) \neq 0$.

- (a). Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout réel $h \in [-\eta; \eta]$ non nul, on ait un unique $\theta_h \in]0; 1[$ tel que

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x + \theta_h h)$$

- (b). Montrer en appliquant Taylor-Young à f' et f que l'application $\theta : h \mapsto \theta_h$ admet $\frac{1}{2}$ pour limite en 0.

- (a). Soit $h \in \mathbb{R}$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe un réel c_h appartenant à $]x; x+h[$ (ou $]x+h; x[$ lorsque $h < 0$) tel que

$$f'(c_h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Il suffit alors de poser $\theta_h = (c_h - x)/h$ pour obtenir

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x + \theta_h h) \quad \text{avec} \quad \theta_h \in]0; 1[$$

Pour justifier l'unicité de θ_h pour h au voisinage de 0, remarquons que puisque $f''(x) \neq 0$, il existe un voisinage de x sur lequel f'' ne s'annule pas. Dès lors, f' est strictement monotone au voisinage de 0 et notamment injective. On en déduit immédiatement l'unicité souhaitée lorsque h appartient à ce voisinage.

Il existe $\eta > 0$ tel que pour tout réel $h \in [\eta; \eta]$ non nul
 $\exists! \theta_h \in]0; 1[$, $f(x+h) = f(x) + hf'(x + \theta_h h)$

- (b). Puisque f' est de classe $\mathcal{C}^1$, on a lorsque α tend vers 0, d'après Taylor-Young,

$$f'(x+\alpha) = f'(x) + \alpha f''(x) + o(\alpha)$$

On applique cette relation pour $\alpha = h\theta_h$, qui est bien de limite nulle lorsque h tend vers 0 car θ_h est une quantité bornée, et on l'injecte dans l'égalité du (a). Il vient

$$f(x+h) = f(x) + h[f'(x) + h\theta_h f''(x) + o(h)] = f(x) + hf'(x) + h^2\theta_h f''(x) + o(h^2)$$

lorsque h tend vers 0. Or, f étant de classe $\mathcal{C}^2$, on a, toujours d'après Taylor-Young,

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + o(h^2)$$

En comparant les deux expressions, on en déduit que pour h au voisinage de 0

$$h^2\theta_h f''(x) + o(h^2) = \frac{h^2}{2}f''(x) + o(h^2) \quad \text{soit} \quad \theta_h = \frac{1}{2} + o(1)$$

après division par les quantités non nulles h^2 et $f''(x)$. En d'autres termes,

$$\theta_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{1}{2}$$

20

(**)

Mines PC 2014

Soit $a \in]-1; 1[$. Trouver les applications $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues et telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^{ax} f(t) dt$$

Soit f vérifiant la propriété de l'énoncé et F une primitive quelconque de f (qui existe car f est continue). Alors, pour tout réel x ,

$$f(x) = F(ax) - F(0) \quad (\star)$$

Puisque f est continue, F est de classe $\mathcal{C}^1$. La relation $(\star)$ montre donc que f est de classe $\mathcal{C}^1$, et par suite que F est $\mathcal{C}^2$. Ainsi, f est également $\mathcal{C}^2$, puis $\mathcal{C}^\infty$ par récurrence immédiate. On peut alors dériver n fois la relation $(\star)$ ce qui donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f^{(n)}(x) = a^n f^{(n-1)}(ax) \quad \text{puis} \quad f^{(n)}(x) = a^{(n+(n-1)+\dots+1)} f(a^n x) = a^{n(n+1)/2} f(a^n x)$$

Notons que $f(0) = 0$, cette égalité impliquant alors que $f^{(n)}(0)$ est nul pour tout entier n . Par suite, en appliquant la formule de Taylor avec reste intégral entre 0 et x , il vient pour tout entier n

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \, dt \\
 &= a^{(n+1)(n+2)/2} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(a^{n+1}t) \, dt
 \end{aligned}$$

Le réel x étant fixé, la fonction f est continue sur le segment $[-x; x]$ donc bornée. Cet intervalle est stable par $t \mapsto a^{n+1}t$ si $|a| < 1$, ce qui permet d'obtenir la majoration grossière

$$|f(x)| \leq |a|^{(n+1)(n+2)/2} \left| \int_0^x \frac{|x-t|^n}{n!} \|f\|_{\infty, [-x; x]} \, dt \right| = |a|^{(n+1)(n+2)/2} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \|f\|_{\infty, [-x; x]}$$

Par croissance comparées, $|x|^n/n!$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, de même que $|a|^{(n+1)(n+2)/2}$ dès lors que $|a| < 1$. Ainsi, en faisant tendre n vers $+\infty$, il vient $f(x) = 0$. Le réel x ayant été pris quelconque,

Pour $a \in]-1; 1[$, la fonction nulle est la seule application continue sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^{ax} f(t) \, dt$$