

Remarque 1

Dans toute le chapitre, si Ω est un ensemble et X une partie de Ω , on note $\overline{X}$ son complémentaire, c'est-à-dire l'ensemble des éléments qui n'appartiennent pas à X .

Définition 1

Soit Ω un ensemble et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$. On définit les ensembles $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ et $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ par

$$\omega \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \iff \exists n \in \mathbb{N}, \omega \in A_n$$

et

$$\omega \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \iff \forall n \in \mathbb{N}, \omega \in A_n$$

Proposition 1

Soient Ω un ensemble, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{P}(\Omega)$, et B une partie de Ω . Alors,

$$(1) \quad \overline{\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n} \quad \text{et} \quad (2) \quad \overline{\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n}$$

$$(3) \quad B \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (B \cap A_n) \quad \text{et} \quad (4) \quad B \cup \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (B \cup A_n)$$

$$(5) \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{0 \leq k \leq n} A_k\right) \quad \text{et} \quad (6) \quad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcap_{0 \leq k \leq n} A_k\right)$$

1 Univers, évènements, variables aléatoires discrètes

1.1 Tribus et évènements

Définition 2 (Axiome des tribus)

Soit Ω un ensemble non vide. Une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu (ou σ -algèbre) si et seulement si elle vérifie les trois propriétés suivantes :

- (i) L'ensemble vide $\emptyset$ appartient à $\mathcal{A}$;
- (ii) Si A appartient à $\mathcal{A}$, son complémentaire $\overline{A}$ appartient à $\mathcal{A}$;
- (iii) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ appartient à $\mathcal{A}$.

La donnée d'un ensemble Ω et d'une tribu $\mathcal{A}$ sur Ω définit un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$ (ou encore espace mesurable).

Remarque 2

- La partie $\{\emptyset, \Omega\}$ est une tribu appelée tribu grossière. La partie $\mathcal{P}(\Omega)$ est également une tribu appelée tribu complète.
- Si $\Omega = \{0, 1, 2\}$, alors $\tau = \{\emptyset, \{1\}, \{0, 2\}, \Omega\}$ est une tribu sur Ω .

Proposition 2

Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur un ensemble Ω . Alors,

- $\Omega \in \mathcal{A}$;
- Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est un élément de τ .
- $\mathcal{A}$ est stable par union et intersection finies.

Définition 3 (Vocabulaire probabiliste)

- L'ensemble Ω est généralement appelé l'univers. Les éléments de Ω sont appelés les issues.
- Les éléments de $\mathcal{A}$ sont appelés les événements. Plus particulièrement, Ω est l'événement certain, et $\emptyset$ l'événement impossible. Un événement est donc un sous-ensemble d'issues.
- Un événement est dit élémentaire s'il contient un seul élément. Deux événements A et B sont dits incompatibles si $A \cap B = \emptyset$.
- On dit qu'une issue ω réalise un événement A si $\omega \in A$. En particulier,
 - ω réalise $A \cup B$ (resp. $A \cap B$) si et seulement si il réalise A ou B (resp. A et B)
 - Plus généralement, ω réalise $\bigcup_{n \in N} A_n$ (resp. $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$) si et seulement si il réalise au moins un des (A_n) (resp. tous les (A_n)).
- Étant donnés deux événements A et B , on dit que A implique B lorsque $A \subset B$.

1.2 Variable aléatoire

Définition 4 (Variable aléatoire discrète)

Une variable aléatoire discrète sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$ est une application X , définie sur Ω telle que

- $X(\Omega)$ est au plus dénombrable.
- Pour tout $x \in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{A}$.

En d'autres termes, pour tout $x \in X(\Omega)$, l'image réciproque $X^{-1}(\{x\})$ est un événement que l'on note également $(X = x)$ ou $\{X = x\}$. Plus généralement, si A une partie quelconque de E , son image réciproque $X^{-1}(A)$ par X se note également $(X \in A)$. Dans le cas particulier où X est valeurs dans $\mathbb{R}$, pour tout réel x , on note $(X \geq x)$ l'image réciproque $X^{-1}([x; +\infty[)$. On définit de même $(X \leq x)$, $(X > x)$, $(a \leq X \leq b)$ et ainsi de suite.

Remarque 3

- La terminologie « discrète » signifie explicitement que l'image $X(\Omega)$ est au plus dénombrable. Le programme de CPGE se limite uniquement à ce cas particulier.
- Lorsque X est une variable aléatoire réelle discrète, alors pour tout réel x , $(X \geq x)$ est un événement.

2 Probabilité

2.1 Définitions

Définition 5 (Axiome des probabilités)

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace probabilisable. On appelle probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ une application $P : \mathcal{A} \rightarrow [0; 1]$ telle que

- (i) $P(\Omega) = 1$;
- (ii) Pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements incompatibles,

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) \quad (\sigma\text{-additivité})$$

On appelle espace probabilisé un triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ où $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω et P une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

2.2 Exemples de modélisations

Remarque 4

Depuis l'arrivée des probabilités en classe de CPGE, on distingue essentiellement deux types d'exercices/problèmes de probabilités :

- Les exercices basés sur une expérience aléatoire précise, donnée en introduction : lancer de pièce, tirage dans des urnes, déplacements aléatoires sur un axe ou un plan.
- Les exercices plus théoriques basés sur des variables aléatoires dont les propriétés sont données en début d'énoncé.

Dans l'immense majorité des énoncés, l'univers Ω n'est jamais précisé.

Dans le premier cas, l'étude d'une expérience aléatoire passe un travail de **modélisation** consistant dans les grandes lignes à proposer :

- Un univers Ω dont chaque issue ω représente un et un seul déroulement possible d'une expérience aléatoire.
- Construire sur Ω un espace probabilisé, soit une tribu et une probabilité sur cette tribu, qui soit cohérent avec le comportement attendu de l'expérience aléatoire (en gros, on s'attend à ce qu'un certain nombre d'événements ou certaines issues aient une probabilité bien spécifique).
- Définir ensuite une ou plusieurs variables aléatoires qui renvoient certaines valeurs à l'issue de l'expérience. Notons que l'on peut avoir les mêmes résultats pour des issues différentes (comme obtenir 2 piles sur 4 lancers de pièce).

Cette modélisation n'est pas un attendu du programme et ne sera généralement pas demandée. La deuxième étape ci-dessus notamment sera systématiquement admise. En effet, elle est malheureusement soit triviale (dans le cas où Ω est dénombrable typiquement), soit excessivement technique. De manière similaire, justifier qu'une application est bien une variable aléatoire est généralement admis. En revanche, on peut être amené dans certains cas à justifier que certains ensembles A sont bien des événements, afin de garantir que $P(A)$ soit bien défini.

Exemple 1

On lance un dé N fois avec $N \in \mathbb{N}^*$.

- On prend naturellement $\Omega = \llbracket 1; 6 \rrbracket^N$. Pour chaque issue $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_N)$, la valeur de ω_i correspond au résultat du i -ième lancer.
- Puisque Ω est fini, on peut le munir de sa tribu complète et de la probabilité uniforme, définie par

$$\forall A \subset \Omega, \quad P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}$$

On peut alors vérifier par exemple que l'événement « On fait un 4 au troisième lancer » est de probabilité $1/6$, ce qui correspond à l'expérience (pour un dé non truqué).

- Enfin, on peut par exemple définir pour tout $i \in \llbracket 1; N \rrbracket$ la variable aléatoire $X_i : \Omega \rightarrow \llbracket 1; 6 \rrbracket$ qui donne le résultat du i -ième lancer, ou bien la variable $S = X_1 + \dots + X_N$ qui donne la somme de tous les lancers obtenus.

Exemple 2

On lance une pièce jusqu'à obtenir un pile.

- On prend $\Omega = \{P, FP, FFP, \dots\} \cup \{\infty\}$. L'issue $FFFP$ par exemple correspond à un déroulement de l'expérience pendant lequel on fait trois fois face avant d'obtenir un pile.
- Cette fois, Ω est infini, mais dénombrable. On ne peut plus utiliser la probabilité uniforme, ce qui ne correspondrait de toute façon pas à l'expérience. Par souci de cohérence, on souhaite définir une probabilité P vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(\underbrace{\{F \dots F\}}_n P) = \frac{1}{2^{n+1}}$$

Cela se construit sans trop de difficulté sur la tribu complète $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

- Sur cet espace, il n'y a guère de variable aléatoire pertinente en dehors de celle qui renvoie le nombre de lancers avant d'obtenir un pile.

Exemple 3

On lance une pièce équilibrée une infinité de fois.

- On prend $\Omega = \{P, F\}^{\mathbb{N}^*}$.
- Pour tout entier n , on peut définir sur Ω les applications suivantes : P_n qui renvoie 1 si on fait pile au n -ième tirage et 0 sinon, S_n qui renvoie le nombre de piles sur les n premiers tirages, ou encore X qui renvoie l'indice du premier pile dans la suite de tirages.
- La construction d'un espace probabilisé correspondant à l'expérience est très difficile. Elle est généralement passée sous silence et on admet donc qu'il existe une tribu $\mathcal{A}$ sur Ω et une probabilité P sur $\mathcal{A}$ telle que non seulement X et P_n sont des variables aléatoires pour tout entier n , mais que de plus les lois de ces variables aléatoires aient les propriétés conformes à l'expérience, notamment

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(P_n = 1) = \frac{1}{2}$$

et l'indépendance mutuelle de ces variables (définition à venir).

2.3 Propriétés des probabilités dans les espaces dénombrables

Proposition 3

Si A et B sont deux évènements incompatibles, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Corollaire 1

Pour tous évènements A et B ,

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $P(\emptyset) = 0$
- Si A implique B , alors $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.
- Enfin, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Théorème 1 (Continuité croissante/décroissante)

Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'évènements croissante pour l'inclusion, c'est-à-dire que $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout entier n , alors

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n)$$

De même, si la suite est décroissante pour l'inclusion, alors

$$P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n)$$

Remarque 5

Si la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas supposée monotone pour l'inclusion, on a dans tous les cas

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) \quad \text{et} \quad P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{k=0}^n A_k\right)$$

Exemple 4

On lance une pièce équilibrée une infinité de fois.

- Quelle est la probabilité de ne faire que des piles (à l'infini) ? Généraliser.
- Soit A un évènement dénombrable. Montrer que $P(A) = 0$.
- Quelle est la probabilité de ne faire qu'un nombre fini de piles ?

Proposition 4 (Sous-additivité)

Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'évènements, alors

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

Remarque 6

En cas de divergence de la série à terme positifs $\sum_{n \geq 0} P(A_n)$, on rappelle que l'on peut écrire $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = +\infty$.

Définition 6

Un évènement A d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ où Ω est infini et dénombrable est dit

- négligeable lorsque $P(A) = 0$;
- presque sûr lorsque $P(A) = 1$.

Remarque 7

Une réunion dénombrables d'évènements négligeable reste négligeable.

Exercice 1

On lance une pièce équilibrée une infinité de fois. Les lancers sont supposés indépendants. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit l'évènement

$$(PFF)_n : \ll \text{On fait pile, puis face et face aux lancers } n, n+1 \text{ et } n+2 \gg$$

puis on pose $(PFF) : \ll \text{On fait au moins une fois la séquence pile, face, face} \gg$

1. Déterminer la probabilité de $(PFF)_n$ et en déduire que (PFF) est un évènement certain.
2. Généraliser (c'est ce qu'on appelle le paradoxe du singe).

Définition 7

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'évènements forme un système complet d'évènements lorsque

- Pour tous $i \neq j$, A_i et A_j sont incompatibles.
- $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$

On parle de système quasi-complet d'évènement si les évènements restent deux à deux incompatibles mais qu'on remplace la deuxième condition par la propriété plus faible « $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ est presque sûr ».

3 Probabilités conditionnelles

Définition 8

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et A et B deux évènements avec $P(B) > 0$. On appelle probabilité conditionnelle de A sachant B le réel

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

On note également P_B l'application $P_B : A \mapsto P(A|B)$.

Proposition 5

La fonction P_B définit une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Proposition 6 (Formule des probabilités composées)

Si $A_1, \dots, A_n$ sont des évènements tels que $A_1 \cap \dots \cap A_n$ soit de probabilité non nulle, alors

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdots P_{(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})}(A_n)$$

Proposition 7 (Formule de Bayes)

Si A et B sont de probabilités non nulles, alors

$$P_B(A) = \frac{P(A)}{P(B)} P_A(B)$$

Théorème 2 (Formule des probabilités totales)

Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système complet ou quasi-complet d'évènements, alors pour tout évènement B , la série $\sum_{n \geq 0} P(A_n \cap B)$ converge et

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B|A_n) \cdot P(A_n)$$

avec par convention $P(B|A_n) \cdot P(A_n) = 0$ si $P(A_n) = 0$.

Exercice 2

Un labyrinthe dispose de 4 salles disposées sous la forme d'un carré. Chaque salle communique directement avec ses deux voisines, mais pas avec la salle opposée. A l'instant $n = 0$, un rat est placé dans une des salles. A chaque instant, il se déplace dans l'une des salles voisine avec probabilité $1/3$, ou reste sur place avec probabilité $1/3$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et chaque salle du labyrinthe, déterminer la probabilité que le rat soit dans la salle en question à l'instant n .

4 Loi d'une variable aléatoire discrète

4.1 Définitions

Proposition 8

Si X est une variable aléatoire discrète sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathcal{P})$, l'application

$$\begin{aligned} P_X : \mathcal{P}(X(\Omega)) &\longrightarrow [0; 1] \\ A &\longmapsto P(X \in A) \end{aligned}$$

est une probabilité sur $(X(\Omega), \mathcal{P}(X(\Omega)))$. Cette probabilité est appelée loi de la variable aléatoire discrète X .

Remarque 8

Puisque $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable, on peut noter

$$X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$$

où I est une partie de $\mathbb{N}$ et les éléments $(x_i)_{i \in I}$ deux à deux distincts. La loi de X est alors entièrement déterminée par la famille $(p_i)_{i \in I}$ où

$$\forall i \in I, \quad p_i = P(X = x_i)$$

Remarque 9

- Avec les notations précédentes, on a

$$\forall i \in I, \quad p_i \in [0; 1] \quad \text{et} \quad \sum_{i \in I} p_i = 1$$

- Lorsqu'on demande de « donner la loi » d'une variable aléatoire discrète, il faut déterminer successivement :
 - l'ensemble $X(\Omega)$ (éventuellement sous la forme d'une suite finie ou infinie) ;
 - la valeur de $P(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$.
- Lorsque deux variables aléatoires discrètes X et Y suivent la même loi, on note $X \sim Y$.

4.2 Lois usuelles

Rappels de première année (VA finies)

Définition 9 (Loi uniforme)

Soit X une variable aléatoire finie, c'est-à-dire que $X(\Omega)$ est un ensemble fini. On dit que X suit une loi uniforme sur $X(\Omega)$ lorsque

$$\forall x \in X(\Omega), \quad P(X = x) = \frac{1}{n}$$

où n est égal au cardinal de $X(\Omega)$.

Définition 10 (Loi de Bernoulli/binomiale)

Une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ suit une loi binomiale de paramètres (n, p) si et seulement si, en notant $q = 1 - p$,

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \quad P(X = k) = p^k q^{n-k} \binom{n}{k}$$

Lorsque $n = 1$, on parle de loi de Bernoulli de paramètre p : X est valeurs dans $\{0, 1\}$ et $P(X = 1) = p$.

Remarque 10

La loi binomiale est la loi d'une variable aléatoire comptant le nombre de succès lors d'une répétition de n expériences aléatoires indépendantes de même probabilité de succès p .

Programme de deuxième année (VA discrètes)

Définition 11 (Loi géométrique)

Pour $p \in [0; 1]$, une variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre p si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = n) = p(1 - p)^{n-1}$$

Comme pour la loi binomiale, on note alors $q = 1 - p$.

Remarque 11

C'est la loi satisfaite notamment par la variable aléatoire consistant à renvoyer le rang du premier pile dans une suite infinie de lancers d'une pièce biaisée, renvoyant pile avec probabilité p . Plus généralement, c'est le rang du premier succès dans une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p .

Remarque 12

La loi géométrique est une loi sans mémoire : pour tous entiers m, k et n ,

$$P(X > m) = q^m \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} P(X > n + k) = P(X > n)P(X > k) \\ P(X > n + k \mid X > n) = P(X > k) \end{cases}$$

Réciproquement, toute variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et sans mémoire suit une loi géométrique.

Définition 12 (Loi de Poisson)

Une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X = n) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

Théorème 3 (Théorème de Poisson)

Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $]0; 1[$ telle que la suite $(np_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\lambda > 0$. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires telle que pour tout n , X_n suit une loi binomiale de paramètre (n, p_n) . Alors

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Remarque 13

La loi de Poisson est également appelé loi des événements rares. C'est une conséquence du résultat précédent : la variable aléatoire X_n s'interprète comme comptant le nombre de succès lors de répétitions de n épreuves de Bernoulli indépendantes de « faible » probabilité de succès p_n . Pour n grand (et p_n petit), la loi est proche d'une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np_n$.

4.3 Couple de variables aléatoires discrètes

Définition 13

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathcal{P})$ un espace probabilisé.

- On appelle couple de variable aléatoire une variable aléatoire à valeurs dans un produit, c'est-à-dire un espace de la forme $E \times F$ où E et F sont deux ensembles quelconques.
- Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes. Alors,

$$\begin{aligned} Z : \Omega &\longrightarrow X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ \omega &\longmapsto (X(\omega), Y(\omega)) \end{aligned}$$

est une variable aléatoire discrète. La loi de Z est appelée la loi conjointe de X et de Y .

Remarque 14

- Si $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, l'évènement $(Z = (x, y))$ se note également $(X = x, Y = y)$.
- Si l'on note $X(\Omega) = (x_i)_{i \in I}$ et $Y(\Omega) = (y_j)_{j \in J}$ où I et J sont des parties de $\mathbb{N}$, alors la loi de Z est entièrement caractérisée par la famille $(p_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ avec

$$\forall (i, j) \in I \times J, \quad p_{i,j} = P(X = x_i, Y = y_j)$$

Définition 14

Soit $Z = (X, Y)$ un couple de variables aléatoires discrètes. Les lois de X et de Y sont appelées lois marginales du couple Z .

Remarque 15

Avec les notations de la remarque précédente, si l'on connaît la loi conjointe, on retrouve les lois marginales avec la formule des probabilités totales :

$$\forall i \in I, \quad P(X = x_i) = \sum_{j \in J} P(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{j \in J} p_{i,j}$$

Exemple 5

On répète une succession de jets de pile ou face. On note X la longueur de la première séquence de résultats identiques, et Y la seconde. A titre d'exemple, pour l'issue $\omega = PPFPPFPF \dots$, on a $X = 2$ et $Y = 3$. La pièce est supposée biaisée avec une probabilité p de faire pile (et donc $q = 1 - p$ de faire face). On a $X(\Omega) = \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. De plus,

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \quad P((X = i) \cap (Y = j)) = p^{i+1} \cdot q^j + q^{i+1} \cdot p^j$$

$$\text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = k) = p^k \cdot q + q^k \cdot p \quad \text{et} \quad P(Y = k) = p^2 \cdot q^{k-1} + p^{k-1} \cdot q^2$$

Définition 15

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé, Y une variable aléatoire discrète et A un évènement. On appelle loi conditionnelle de Y sachant A la probabilité $P_Y(\cdot | A)$ définie sur $Y(\Omega)$ et définie par

$$\forall y \in Y(\Omega), \quad P_Y(\{y\} | A) = P((Y = y) | A)$$

5 Evènements indépendants

Définition 16

Deux évènements A et B sont dits indépendants lorsque

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Plus généralement, une famille au plus dénombrable $(A_i)_{i \in I}$ d'évènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est dite indépendante lorsque pour toute partie finie $J \subset I$,

$$P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j)$$

Remarque 16

- Si $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B équivaut à l'égalité $P(A|B) = P(A)$.
- Il est clair que l'indépendance des évènements implique l'indépendance deux à deux. En revanche, lorsque $n \geq 3$, la réciproque est fautive en général.

Exemple : On lance un dé 2 fois de suite et on considère les évènements suivants :

- A : « Le premier lancer est à 1. »
- B : « Les deux lancers sont égaux. »
- C : « Le second lancer est égal à 2. »

Proposition 9

Etant donné deux évènements A et B , si A et B sont indépendants, il en est de même de A et $\overline{B}$. Plus généralement, si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille au plus dénombrable d'évènements indépendants et $(B_i)_{i \in I}$ une suite d'évènements tels que

$$\forall i \in I, \quad B_i = A_i \quad \text{ou} \quad B_i = \overline{A_i}$$

Alors, la famille d'évènements $(B_i)_{i \in I}$ est indépendante.

6 Variables aléatoires indépendantes

Définition 17

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathcal{P})$. On dit que X et Y sont indépendantes lorsque pour tout $A \subset X(\Omega)$ et tout $B \subset Y(\Omega)$, les évènements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants. On note alors $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Proposition 10

Deux variables aléatoires discrètes X et Y sont indépendantes si et seulement si

$$\forall x \in X(\Omega), \quad \forall y \in Y(\Omega), \quad P(X = x, Y = y) = P(X = x) \cdot P(Y = y)$$

Définition 18

Plus généralement,

- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes. Les variables aléatoires sont dites indépendantes lorsque

$$\forall J \subset \llbracket 1; n \rrbracket, \quad \forall (A_j)_{j \in J} \subset (X_j(\Omega))_{j \in J}, \quad P\left(\bigcap_{j \in J} (X_j \in A_j)\right) = \prod_{j \in J} P(X_j \in A_j)$$

ou, ce qui revient au même,

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega), \quad P(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i = x_i)$$

- Etant donnée une suite (infinie) $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires discrètes, on dit que la suite est une suite de variables aléatoires indépendantes si et seulement si pour toute partie finie $J \subset \mathbb{N}$, la famille $(X_j)_{j \in J}$ l'est (c'est à dire si toute sous-famille finie de la suite l'est).
- Si de plus pour finir les variables $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ont toutes la même loi, on dit que les variables aléatoires sont indépendantes et identiquement distribuées (en abrégé i.i.d.).

Exercice 3

Le nombre de client X d'un magasin suit une loi de poisson de paramètre $\lambda > 0$. On estime que chaque client a, de façon indépendante, une probabilité p d'acheter le produit α (et il en prend un alors en général). On note Y la variable aléatoire donnant le nombre de produits achetés dans la journée. Montrer que Y suit une loi de Poisson de paramètre λp .

Proposition 11

Si $X_1, \dots, X_n$ sont n variables aléatoires discrètes réelles indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathcal{P})$, et si $f_1, \dots, f_n$ sont n fonctions réelles avec f_i définies sur $X_i(\Omega)$, alors $f_1 \circ X_1, \dots, f_n \circ X_n$ sont n variables aléatoires discrètes indépendantes.

Proposition 12 (Lemme des coalitions)

Si $X_1, \dots, X_n$ sont n variables aléatoires discrètes réelles indépendantes, alors pour tout $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, $f : \mathbb{R}^p \mapsto \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^{n-p} \mapsto \mathbb{R}$, les variables aléatoires $f(X_1, \dots, X_k)$ et $g(X_{k+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

Remarque 17

Le résultat se généralise avec un nombre quelconque de coalitions, le programme officiel précisant explicitement que la généralisation peut être utilisée.