

I. L'OPÉRATEUR DE TRANSLATION ET L'OPÉRATEUR DE DIFFÉRENCE

I.A.1 Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme non nul. Il s'écrit $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$, avec $a_k \in \mathbb{R}$ pour tout $k \in \llbracket 0; d \rrbracket$, $d = \deg(P) \in \mathbb{N}$ et $a_d = \text{cd}(P) \neq 0$. Il en découle que

$$\tau(P) = P(X+1) = \sum_{k=0}^d a_k (X+1)^k = a_d (X+1)^d + R_1$$

où $\deg(R_1) < d$. De plus, on a d'après la formule du binôme de Newton

$$(X+1)^d = \sum_{\ell=0}^d \binom{d}{\ell} X^\ell = X^d + R_2$$

avec $\deg(R_2) < d$ également. De ce fait,

$$\tau(P) = a_d X^d + R_1 + a_d R_2 = a_d X^d + R$$

où le polynôme $R = R_1 + a_d R_2$ vérifie $\deg(R) < d$. Comme $a_d \neq 0$, ceci montre que $\tau(P)$ est un polynôme non nul de degré d et de coefficient dominant a_d . Ainsi,

Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$ non nul, $\deg(\tau(P)) = \deg(P)$ et $\text{cd}(\tau(P)) = \text{cd}(P)$.

I.A.2 Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Considérons la propriété $\mathcal{P}$ définie pour $k \in \mathbb{N}$ par

$$\mathcal{P}(k): \ll \tau^k(P) = P(X+k) \gg$$

- $\mathcal{P}(0)$ est vraie puisque $\tau^0(P) = P = P(X+0)$.
- $\mathcal{P}(k) \implies \mathcal{P}(k+1)$: supposons que la propriété $\mathcal{P}$ est vraie au rang $k \in \mathbb{N}$. D'après la proposition $\mathcal{P}(k)$, on a $\tau^k(P) = P(X+k)$ d'où

$$\tau^{k+1}(P) = \tau(\tau^k(P)) = \tau(P(X+k)) = P(X+k+1)$$

Ainsi, la proposition $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

- **Conclusion**: d'après le principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$, ce qui signifie que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \tau^k(P) = P(X+k)$$

I.A.3 Par convention, on pose $\binom{m}{p} = 0$ dès que $p > m$.

Pour déterminer cette matrice M , il faut calculer les images par τ des différents éléments de la base $(P_k)_{k \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket}$. Soit $j \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket$. Comme $P_j = X^{j-1}$, on déduit de la formule du binôme de Newton que

$$\tau(P_j) = (X+1)^{j-1} = \sum_{k=0}^{j-1} \binom{j-1}{k} X^k = \sum_{i=1}^j \binom{j-1}{i-1} P_i = \sum_{i=1}^{n+1} \binom{j-1}{i-1} P_i$$

en utilisant le changement d'indice $i = k+1$ et la convention rappelée plus haut. Les coefficients de la matrice M de τ dans la base $(P_k)_{k \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket}$ sont donc

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket^2 \quad M_{i,j} = \binom{j-1}{i-1}$$

On reconnaît ici les coefficients binomiaux apparaissant dans le triangle de Pascal. En fait, M est tout simplement la transposée de ce triangle.

I.A.4 Comme $M_{i,j} = 0$ pour $i > j$ d'après la question I.A.3, la matrice M est triangulaire supérieure. Son spectre (qui est aussi celui de l'endomorphisme τ) est alors constitué de ses termes diagonaux. Or,

$$\forall i \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket \quad M_{i,i} = \binom{i-1}{i-1} = 1$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{L'ensemble des valeurs propres de } \tau \text{ est } \text{sp}(\tau) = \{1\}.$$

On peut remarquer que tout polynôme constant vérifie $\tau(P) = P(X+1) = P$. De ce fait, le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 contient $\mathbb{R}_0[X]$.

Raisonnons par l'absurde et supposons que l'endomorphisme τ est diagonalisable. Comme sa seule valeur propre est 1, il admet I_{n+1} pour matrice dans une base de vecteurs propres, si bien que $\tau = \text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$ d'où $M = I_{n+1}$. Ceci contredit le résultat de la question I.A.3. On a ainsi prouvé par l'absurde que

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } \tau \text{ n'est pas diagonalisable.}}$$

I.A.5 Pour tous P et Q dans $\mathbb{R}_n[X]$, on a

$$\begin{aligned} Q = \tau(P) &\iff Q(X) = P(X+1) \\ &\iff Q(X-1) = P(X) \\ Q = \tau(P) &\iff P = Q(X-1) \end{aligned}$$

Ceci montre que

$$\boxed{\text{L'application } \tau \text{ est bijective et sa réciproque est } \tau^{-1}: P \mapsto P(X-1).}$$

En procédant par récurrence comme à la question I.A.2, on établit que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \tau^{-k}(P) = (\tau^{-1})^k(P) = P(X-k)$$

Ceci étend aux entiers négatifs la relation prouvée lors de cette question, si bien que

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad \tau^k(P) = P(X+k)}$$

I.A.6 L'endomorphisme τ étant bijectif, sa matrice M est inversible et son inverse M^{-1} est la matrice de l'endomorphisme τ^{-1} dans la base $(P_k)_{k \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket}$. Afin de la déterminer, nous allons calculer, comme à la question I.A.3, les images par τ^{-1} des différents éléments de cette base. Pour tout $j \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket$, on a

$$\tau^{-1}(P_j) = (X-1)^{j-1} = \sum_{k=0}^{j-1} \binom{j-1}{k} (-1)^{j-1-k} X^k = \sum_{i=1}^j \binom{j-1}{i-1} (-1)^{j-i} P_i$$

en utilisant le changement d'indice $i = k+1$, si bien que

$$\tau^{-1}(P_j) = \sum_{i=1}^{n+1} \binom{j-1}{i-1} (-1)^{j-i} P_i$$

Les coefficients de la matrice M^{-1} de τ^{-1} dans la base $(P_k)_{k \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket}$ sont donc

$$\boxed{\forall (i, j) \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket^2 \quad (M^{-1})_{i,j} = (-1)^{j-i} \binom{j-1}{i-1}}$$

Notons que cette matrice est également triangulaire supérieure.

I.A.7 Posons $U = (u_0, u_1, \dots, u_n)^\top$ et $V = (v_0, v_1, \dots, v_n)^\top \in \mathbb{R}^{n+1}$. On a

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad v_k = \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} u_\ell = \sum_{\ell=0}^n \binom{k}{\ell} u_\ell$$

soit, en effectuant les changements d'indices $j = k + 1$ et $i = \ell + 1$,

$$\forall j \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket \quad v_{j-1} = \sum_{i=1}^{n+1} \binom{j-1}{i-1} u_{i-1}$$

On reconnaît ici l'écriture du produit matriciel $V = MU$, si bien que

$$\boxed{\text{La matrice } Q = M \text{ satisfait l'équation.}}$$

I.A.8 Reprenons les notations U et V introduites à la question I.A.7. On sait que $V = MU$ d'après le résultat de cette question et que M est inversible d'après la question I.A.6. De ce fait, $U = M^{-1}V$ soit

$$\forall j \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket \quad u_{j-1} = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{j-i} \binom{j-1}{i-1} v_{i-1}$$

En effectuant les changements d'indices $k = j - 1$ et $\ell = i - 1$, on obtient

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad u_k = \sum_{\ell=0}^n (-1)^{k-\ell} \binom{k}{\ell} v_\ell = \sum_{\ell=0}^k (-1)^{k-\ell} \binom{k}{\ell} v_\ell$$

Enfin, ceci étant valable pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on en déduit que

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \quad u_k = \sum_{\ell=0}^k (-1)^{k-\ell} \binom{k}{\ell} v_\ell}$$

I.A.9 Dans cette question, $u_j = \lambda^j$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. D'après la relation (I.1), on a

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad v_k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \lambda^j = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \lambda^j 1^{k-j} = (\lambda + 1)^k$$

grâce à la formule du binôme de Newton. Ainsi, la suite $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est définie par

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \quad v_k = (\lambda + 1)^k}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a d'après la formule du binôme de Newton

$$\sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (\lambda + 1)^j (-1)^{k-j} = (\lambda + 1 - 1)^k = u_k$$

donc

$$\boxed{\text{Les suites } (u_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ et } (v_k)_{k \in \mathbb{N}} \text{ vérifient bien la relation (I.2).}}$$

I.B.1 Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme non constant. Il s'écrit $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$, avec $a_k \in \mathbb{R}$ pour tout $k \in \llbracket 0; d \rrbracket$, $d = \deg(P) \in \mathbb{N}^*$ et $a_d = \text{cd}(P) \neq 0$. Par linéarité de δ ,

$$\delta(P) = \sum_{k=0}^d a_k \delta(X^k) = \sum_{k=1}^d a_k \delta(X^k)$$

car $\delta(1) = 0$. Or, d'après la formule du binôme de Newton, pour tout $k \in \llbracket 1; d \rrbracket$,

$$\delta(X^k) = (X+1)^k - X^k = \sum_{\ell=0}^{k-1} \binom{k}{\ell} X^\ell = kX^{k-1} + \sum_{\ell=0}^{k-2} \binom{k}{\ell} X^\ell$$

est un polynôme de degré $k-1$ et de coefficient dominant k . On en déduit que le terme dominant de $\delta(P)$ est celui de $a_d \delta(X^d)$. Ceci montre que $\delta(P)$ est un polynôme non nul de degré $d-1$ et de coefficient dominant da_d . Ainsi,

Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ non constant, on a $\deg(\delta(P)) = \deg(P) - 1$ et $\text{cd}(\delta(P)) = \deg(P) \text{cd}(P)$.

I.B.2 D'après la question I.B.1, si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est non constant, alors $\delta(P) \neq 0$. Par contraposée, $\delta(P) = 0$ implique que P est constant. Réciproquement, si P est constant, on a $P(X+1) = P(X)$ d'où $\delta(P) = 0$. Il s'ensuit que $\delta(P) = 0$ si, et seulement si, P est constant. Autrement dit,

$\text{Ker}(\delta) = \mathbb{R}_0[X]$

Intéressons-nous maintenant à $\text{Im}(\delta)$.

- Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Si le polynôme P est constant, $\delta(P) = 0$. Sinon, $\delta(P)$ est un polynôme de degré $\deg(P) - 1 \leq n - 1$. Dans tous les cas, on a $\delta(P) \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, si bien que $\text{Im}(\delta) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
- Appliquons le théorème du rang à l'endomorphisme δ : on obtient

$$n + 1 = \dim \mathbb{R}_n[X] = \dim \text{Ker}(\delta) + \text{rg}(\delta) = 1 + \dim \text{Im}(\delta)$$

$$\text{d'où} \quad \dim \text{Im}(\delta) = n = \dim \mathbb{R}_{n-1}[X]$$

Comme $\text{Im}(\delta) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et que $\dim \text{Im}(\delta) = \dim \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on peut affirmer que

$\text{Im}(\delta) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$

I.B.3 Soit P un polynôme non nul de degré d .

- D'après la question I.B.1, si P est non constant, $\deg(\delta(P)) = \deg(P) - 1$.
- D'après la question I.B.2, si P est constant, $\delta(P) = 0$.

On en déduit, par une récurrence immédiate, que $\delta^k(P)$ est de degré $d - k$ (et donc non nul) pour tout $k \in \llbracket 0; d \rrbracket$ et que $\delta^k(P) = 0$ pour tout $k > d$.

Soit maintenant $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

- Pour tout polynôme P non nul, on a d'après ce qui précède

$$\delta^j(P) = 0 \iff j > \deg(P) \iff P \in \mathbb{R}_{j-1}[X]$$

si bien que $\text{Ker}(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X]$ puisque $0 \in \text{Ker}(\delta) \cap \mathbb{R}_{j-1}[X]$.

- Appliquons le théorème du rang à l'endomorphisme δ^j de $\mathbb{R}_n[X]$: on obtient

$$n + 1 = \dim \text{Ker}(\delta^j) + \text{rg}(\delta^j) = j + \dim \text{Im}(\delta^j)$$

$$\text{d'où} \quad \dim \text{Im}(\delta^j) = n + 1 - j = \dim \mathbb{R}_{n-j}[X]$$

- Soit enfin $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Si $\deg(P) < j$, on a $\delta^j(P) = 0$. Sinon,

$$\deg(\delta^j(P)) = \deg(P) - j \leq n - j$$

Dans tous les cas, $\delta^j(P) \in \mathbb{R}_{n-j}[X]$, ce qui montre que $\text{Im}(\delta^j) \subset \mathbb{R}_{n-j}[X]$. Ces deux sous-espaces vectoriels ayant la même dimension, on en déduit que $\text{Im}(\delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[X]$. Par conséquent,

$$\forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \text{Ker}(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X] \quad \text{et} \quad \text{Im}(\delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[X]$$

I.B.4 Par définition, $\delta = \tau - \text{Id}$. Comme ces deux endomorphismes commutent, on déduit de la formule du binôme de Newton que

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \delta^k = (\tau - \text{Id})^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \tau^j (-\text{Id})^{k-j} = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \tau^j$$

d'où

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \delta^k(P) = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \tau^j(P)$$

I.B.5 Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. D'après la question I.B.3, on a $\mathbb{R}_{n-1}[X] = \text{Ker}(\delta^n)$ donc $\delta^n(P) = 0$. On déduit alors des questions I.B.4 et I.A.2 que

$$0 = \delta^n(P) = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \tau^j(P) = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(X+j)$$

En appliquant cette relation pour $X = 0$, on obtient

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \quad \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(j) = 0$$

I.B.6.a Par hypothèse, $\delta = u^2$ donc $\delta^2 = u^4$ d'où

$$u \circ \delta^2 = u \circ u^4 = u^5 = u^4 \circ u = \delta^2 \circ u$$

De ce fait,

$$\boxed{\text{Les applications } u \text{ et } \delta^2 \text{ commutent.}}$$

Plus généralement, si u est un endomorphisme d'un espace vectoriel E , on montre que tout polynôme en u commute avec u .

I.B.6.b D'après la question I.B.4, on a $\mathbb{R}_1[X] = \text{Ker}(\delta^2)$. Les endomorphismes u et δ^2 commutant d'après la question I.B.6.a, le noyau et l'image de l'un sont stables par l'autre. En particulier,

$$\boxed{\text{Le sous-espace vectoriel } \mathbb{R}_1[X] \text{ est stable par } u.}$$

I.B.6.c Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

telle que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Il s'ensuit que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2 + bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où $a^2 + bc = 0 \quad b(a+d) = 1 \quad c(a+d) = 0 \quad \text{et} \quad d^2 + bc = 0$

Comme $b(a+d) = 1$, alors $a+d \neq 0$. Par conséquent, $c(a+d) = 0$ implique $c = 0$. On en déduit que $a^2 = d^2 = 0$ d'où

$$a = d = 0 \quad \text{et} \quad b(a+d) = 0$$

Ceci contredit $b(a+d) = 1$. De ce fait,

Il n'existe pas de matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

I.B.6.d D'après la question I.B.6.b, le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_1[X]$ est stable par u . Notons $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ la matrice dans la base $\{1, X\}$ de l'endomorphisme induit par u sur $\mathbb{R}_1[X]$. Comme $u^2 = \delta$, A^2 est la matrice dans la base $\{1, X\}$ de l'endomorphisme induit par δ sur $\mathbb{R}_1[X]$. Or, $\delta(1) = 0$ et $\delta(X) = 1$. Il en découle que

$$A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui contredit le résultat de la question I.B.6.c. Ceci achève le raisonnement par l'absurde de la question I.B.6 et permet d'affirmer que

Il n'existe pas d'endomorphisme u de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $u \circ u = \delta$.

I.B.7.a Soit P un polynôme non nul de degré $d \leq n$. On a vu à la question I.B.3 que $\delta^k(P)$ est de degré $d-k$ pour tout $k \in \llbracket 0; d \rrbracket$. Puisque la famille $(P, \delta(P), \dots, \delta^d(P))$ est ainsi constituée de polynômes de degrés échelonnés,

Pour tout polynôme non nul P de degré $d \leq n$, la famille $(P, \delta(P), \dots, \delta^d(P))$ est libre.

Cette famille $\mathcal{F}$ est de cardinal $d+1$. De plus, elle est contenue dans $\mathbb{R}_d[X]$, qui est un espace vectoriel de dimension $d+1$. C'est donc une base de cet espace. En particulier, elle est génératrice d'où $\text{Vect}(\mathcal{F}) = \mathbb{R}_d[X]$. Il en découle que

Pour tout polynôme non nul P de degré $d \leq n$, on a $\text{Vect}(P, \delta(P), \dots, \delta^d(P)) = \mathbb{R}_d[X]$.

I.B.7.b Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ stable par δ et non réduit à $\{0\}$. Considérons la restriction de l'application $\deg: Q \mapsto \deg(Q)$ à l'ensemble non vide $V' = V \setminus \{0\}$. Elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs, car celles-ci appartiennent toutes à $\llbracket 0; n \rrbracket$. De ce fait, elle atteint un maximum. Soit alors $P \in V'$ tel que

$$d = \deg(P) = \max \{ \deg(Q) \mid Q \in V' \}$$

On a $d \leq n$ puisque $P \in \mathbb{R}_n[X]$. De plus, V étant stable par δ , les polynômes $P, \delta(P), \dots, \delta^d(P)$ appartiennent à V . Ils engendrent donc un sous-espace de V qui, d'après la question I.B.7.a, est $\mathbb{R}_d[X]$. De ce fait, $\mathbb{R}_d[X] \subset V$. Réciproquement, comme les polynômes non nuls de V sont de degré inférieur ou égal à d , on a $V \subset \mathbb{R}_d[X]$. Par conséquent, $V = \mathbb{R}_d[X]$. Ainsi,

Si V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ stable par δ et non réduit à $\{0\}$, il existe un entier $d \in \llbracket 0; n \rrbracket$ tel que $V = \mathbb{R}_d[X]$.

Pour déterminer les sous-espaces de $\mathbb{R}_n[X]$ stables par δ , on a uniquement utilisé la relation $\deg(\delta(P)) = \deg(P) - 1$ (si P est un polynôme non constant). De la même façon, on montre que les seuls sous-espaces de $\mathbb{R}_n[X]$ stables par l'opérateur de dérivation $D: P \mapsto P'$ sont les $\mathbb{R}_d[X]$, avec $d \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

II. APPLICATIONS EN COMBINATOIRE

II.A.1 Soient A et B deux ensembles finis. D'après le cours, s'il existe une surjection de A sur B, alors $\text{Card } A \geq \text{Card } B$. Par contraposée, on en déduit qu'il n'existe pas de surjection de $\llbracket 1; p \rrbracket$ sur $\llbracket 1; n \rrbracket$ lorsque $p < n$. En conséquence,

$$\forall p \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket \quad S(p, n) = 0$$

II.A.2 Soient A et B deux ensembles finis de même cardinal. D'après le cours, toute surjection de A sur B est une bijection. De ce fait, $S(n, n)$ est le nombre de permutations de $\llbracket 1; n \rrbracket$, si bien que

$$S(n, n) = n!$$

II.A.3 Une application est une surjection de $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$ sur $\llbracket 1; n \rrbracket$ si, et seulement si, chaque élément de $\llbracket 1; n \rrbracket$ possède au moins un antécédent dans $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$. Pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, notons a_k le nombre d'antécédents de l'élément k . Déjà, $a_k \geq 1$. De plus, comme tout élément de $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$ possède une image dans $\llbracket 1; n \rrbracket$, on a

$$\sum_{k=1}^n a_k = n+1 \quad \text{d'où} \quad \sum_{k=1}^n (a_k - 1) = 1$$

Ceci montre qu'un des nombres positifs $a_k - 1$ vaut 1 et que tous les autres sont nuls. Ainsi, un seul élément de $\llbracket 1; n \rrbracket$ possède deux antécédents tandis que les autres n'en possèdent qu'un. Voici maintenant comment construire une telle surjection.

- On commence par choisir l'élément e de $\llbracket 1; n \rrbracket$ ayant deux antécédents, ce qui nous donne n possibilités.
- On choisit ensuite ses deux antécédents a_1 et a_2 dans $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$, ce qui nous laisse $\binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ possibilités.
- On attribue enfin à chacun des $n-1$ éléments de $\llbracket 1; n+1 \rrbracket \setminus \{a_1; a_2\}$ une image dans $\llbracket 1; n \rrbracket \setminus \{e\}$, ce qui revient à construire une bijection entre deux ensembles de cardinal $n-1$. Il y a donc $(n-1)!$ possibilités.

Il en découle que

$$S(n+1, n) = n \times \frac{n(n+1)}{2} \times (n-1)! = \frac{n(n+1)n!}{2}$$

II.B.1 Soient A et B deux ensembles finis. D'après le cours, il existe $(\text{Card } B)^{\text{Card } A}$ applications de A dans B. De ce fait,

$$\text{Il y a } n^p \text{ applications de } \llbracket 1; p \rrbracket \text{ dans } \llbracket 1; n \rrbracket.$$

II.B.2 Fixons p et n dans $\mathbb{N}^*$ tels que $p \geq n$. Pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on note F_k le nombre (éventuellement nul) d'applications φ de $\llbracket 1; p \rrbracket$ dans $\llbracket 1; n \rrbracket$ telles que $\text{Card } \varphi(\llbracket 1; p \rrbracket) = k$. Voyons comment construire une telle application.

- Il faut d'abord choisir $\varphi(\llbracket 1; p \rrbracket)$, qui est une partie de cardinal k de $\llbracket 1; n \rrbracket$. On a $\binom{n}{k}$ possibilités.

- Une fois cet ensemble choisi, il nous reste à déterminer φ , qui est une surjection de $\llbracket 1; p \rrbracket$ sur $\varphi(\llbracket 1; p \rrbracket)$. Comme cet ensemble est de cardinal k , il est en bijection avec $\llbracket 1; k \rrbracket$. On a donc $S(p, k)$ possibilités.

Par conséquent,
$$F_k = \binom{n}{k} S(p, k)$$

Enfin, $\sum_{k=1}^n F_k$ étant le nombre d'applications de $\llbracket 1; p \rrbracket$ dans $\llbracket 1; n \rrbracket$, on déduit de la question II.B.1 que

$$n^p = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} S(p, k)$$

Comme $S(p, 0) = 0$ par convention, on peut sommer à partir de $k = 0$. De plus, la relation obtenue est encore valable pour $n = 0$, si bien que

$$\boxed{\forall p \geq n \quad n^p = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S(p, k)}$$

La condition $p \geq n$ n'intervient pas du tout dans le raisonnement qui précède. En fait, le résultat établi est valable pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

II.B.3 Fixons $p \in \mathbb{N}^*$, puis posons $v_n = n^p$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_k = S(p, k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Le résultat de la question II.B.2, qui est valable pour tout $n \in \mathbb{N}$, s'écrit

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_k$$

Autrement dit, les suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ vérifient la relation (I.1). D'après la formule d'inversion établie à la question I.A.8, on a

$$u_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} v_k$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. En particulier,

$$\boxed{\forall p \geq n \quad S(p, n) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p}$$

II.B.4 Supposons que $p < n$. D'après la question II.A.1, $S(p, n) = 0$. Par ailleurs, le polynôme $P = X^p$ appartient à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. On déduit alors de la question I.B.5 que

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} P(k) = 0$$

donc

$$S(p, n) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p$$

Autrement dit,

Le résultat de la question II.B.3 est encore valable lorsque $p < n$.

II.C D'après les résultats des questions II.B.3, II.A.2 et II.A.3, on a

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n = S(n, n) = n!$$

et

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^{n+1} = S(n+1, n) = \frac{n(n+1)n!}{2}$$

III. ÉTUDE D'UNE FAMILLE DE POLYNÔMES

| Les polynômes étudiés dans cette partie sont appelés *polynômes de Hilbert*.

III.A.1 Par définition, on a $\deg(H_k) = k$ pour tout entier $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$. La famille $(H_k)_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ est ainsi constituée de polynômes de degrés deux à deux distincts, donc c'est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$. Son cardinal étant égal à $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$, c'est même une base. Par conséquent,

La famille $(H_k)_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

III.A.2 Le polynôme H_0 est constant donc $\delta(H_0) = 0$. Soit maintenant $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Calculons $\tau(H_k)$, en réorganisant les facteurs pour faire apparaître H_k et H_{k-1} :

$$\begin{aligned} \tau(H_k) &= \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} (X+1-j) \\ &= \frac{1}{k!} \prod_{\ell=-1}^{k-2} (X-\ell) && \text{en posant } \ell = j-1 \\ &= \frac{1}{k!} (X+1) \prod_{\ell=0}^{k-2} (X-\ell) \\ &= \frac{1}{k!} \left[(X+1-k) \prod_{\ell=0}^{k-2} (X-\ell) + k \prod_{\ell=0}^{k-2} (X-\ell) \right] \\ &= \frac{1}{k!} \prod_{\ell=0}^{k-1} (X-\ell) + \frac{1}{(k-1)!} \prod_{\ell=0}^{k-2} (X-\ell) \\ \tau(H_k) &= H_k + H_{k-1} \end{aligned}$$

si bien que $\delta(H_k) = H_{k-1}$. Ainsi,

$$\delta(H_0) = 0 \text{ et } \delta(H_k) = H_{k-1} \text{ pour tout } k \in \llbracket 1; n \rrbracket.$$

III.A.3 On déduit de la question précédente que $\tau(H_0) = H_0$ et $\tau(H_k) = H_k + H_{k-1}$ pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. De ce fait, l'endomorphisme τ admet M' pour matrice dans la base $(H_k)_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket}$.

Or, d'après la question I.A.3, τ admet M pour matrice dans la base $(P_k)_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket}$. Comme elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes,

Les matrices M et M' sont semblables.

III.A.4 Par récurrence immédiate, on déduit de la question III.A.2 que

$$\forall (k, \ell) \in \llbracket 0; n \rrbracket^2 \quad \delta^k(H_\ell) = \begin{cases} 0 & \text{si } k > \ell \\ H_{\ell-k} & \text{sinon} \end{cases}$$

En particulier, $\delta^k(H_\ell)(0)$ vaut 0 si $k > \ell$, $H_0(0) = 1$ si $k = \ell$ et $H_{\ell-k}(0) = 0$ si $k > \ell$, puisque tous les polynômes H_j , pour $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, admettent 0 pour racine simple. Ceci étant vrai pour tout $\ell \in \llbracket 0; n \rrbracket$, il en découle que

$$\forall (k, \ell) \in \llbracket 0; n \rrbracket^2 \quad \delta^k(H_\ell)(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = \ell \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

III.A.5 Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Comme la famille $(H_k)_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ d'après la question III.A.1, il existe des réels $a_0, \dots, a_n$ uniques tels que $P = \sum_{\ell=0}^n a_\ell H_\ell$.

Pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on a alors $\delta^k(P) = \sum_{\ell=0}^n a_\ell \delta^k(H_\ell)$ par linéarité de δ , d'où

$$\delta^k(P)(0) = \sum_{\ell=0}^n a_\ell \delta^k(H_\ell)(0) = a_k$$

d'après la question III.A.4. Par conséquent,

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \quad P = \sum_{k=0}^n \delta^k(P)(0) H_k$$

Ainsi, les coordonnées d'un polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ dans la base $(H_k)_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ sont $(\delta^k(P)(0))_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket}$.

III.B.1 Il faut commencer par calculer les images de ce polynôme par δ^k pour $k \in \llbracket 0; 3 \rrbracket$. Pour cela, appliquons les résultats de la partie I dans le cas $n = 3$. L'endomorphisme τ a pour matrice dans la base canonique

$$M = \left(\binom{j-1}{i-1} \right)_{1 \leq i, j \leq 4} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donc l'endomorphisme $\delta = \tau - \text{id}$ a pour matrice

$$\Delta = M - I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Posons $Q = X^3 + 2X^2 + 5X + 7$. Comme les coordonnées de Q dans la base canonique sont $(7, 5, 2, 1)^\top$, celles de $\delta(Q)$ sont

$$\Delta \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Celles de $\delta^2(Q) = \delta(\delta(Q))$ sont

$$\Delta \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Et celles de $\delta^3(Q) = \delta(\delta^2(Q))$ sont

$$\Delta \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\delta(Q) = 3X^2 + 7X + 8$, $\delta^2(Q) = 6X + 10$ et $\delta^3(Q) = 6$. On déduit alors de la question III.A.5 que

Les coordonnées du polynôme $Q = X^3 + 2X^2 + 5X + 7$ dans la base (H_0, H_1, H_2, H_3) de $\mathbb{R}_3[X]$ sont $(7, 8, 10, 6)$.

III.B.2 D'après la question III.B.1, on cherche $P \in \mathbb{R}_5[X]$ tel que

$$\delta^2(P) = 7H_0 + 8H_1 + 10H_2 + 6H_3$$

Or, on a vu au cours de la question III.A.4 que $\delta^k(H_\ell) = H_{\ell-k}$ pour $0 \leq k \leq \ell \leq n$. En particulier, $H_i = \delta^2(H_{i+2})$ pour tout $i \in \llbracket 0; 3 \rrbracket$ d'où

$$7H_0 + 8H_1 + 10H_2 + 6H_3 = \delta^2(7H_2 + 8H_3 + 10H_4 + 6H_5)$$

Enfin, le polynôme $7H_2 + 8H_3 + 10H_4 + 6H_5$ appartient bien à $\mathbb{R}_5[X]$ car $\deg(H_i) = i$ pour tout $i \in \llbracket 0; 5 \rrbracket$. Par conséquent,

Le polynôme $P = 7H_2 + 8H_3 + 10H_4 + 6H_5 \in \mathbb{R}_5[X]$ vérifie bien la relation $\delta^2(P) = X^3 + 2X^2 + 5X + 7$.

III.B.3 On sait que les solutions d'une telle équation s'obtiennent en ajoutant une solution particulière aux solutions de l'équation sans second membre.

- Soit E le sous-espace des suites $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $u_{k+2} - 2u_{k+1} + u_k = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Comme le polynôme $P = X^2 - 2X + 1$ admet 1 pour racine double, l'espace E est engendré par les suites $(1)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(k)_{k \in \mathbb{N}}$.
- Cherchons une solution de la forme $u_k = P(k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, où $P \in \mathbb{R}[X]$. Le polynôme P doit alors vérifier

$$\begin{aligned} X^3 + 2X^2 + 5X + 7 &= P(X+2) - 2P(X+1) + P(X) \\ &= [P(X+2) - P(X+1)] - [P(X+1) - P(X)] \\ &= \delta(P)(X+1) - \delta(P)(X) \\ X^3 + 2X^2 + 5X + 7 &= \delta^2(P)(X) \end{aligned}$$

D'après la question III.B.2, le polynôme $P = 7H_2 + 8H_3 + 10H_4 + 6H_5$ convient.

- On en déduit ainsi que

Les suites réelles vérifiant la relation donnée sont les suites $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de terme général

$$ak + b + 7H_2(k) + 8H_3(k) + 10H_4(k) + 6H_5(k)$$

où a et b sont deux réels quelconques.

III.C.1 Par définition, le polynôme $H_n = \frac{1}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (X-j)$ admet $0, 1, \dots, n-1$ pour racines simples. Soit alors $k \in \mathbb{Z}$.

- Si $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, c'est une racine de H_n donc $H_n(k) = 0$.
- Si $k \geq n$, on obtient en effectuant le changement d'indice $\ell = k - j$

$$H_n(k) = \frac{1}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (k-j) = \frac{1}{n!} \prod_{\ell=k+1-n}^k \ell = \frac{k!}{n!(k-n)!} = \binom{k}{n}$$

- Si $k < 0$, on pose $p = -k \in \mathbb{N}^*$ de sorte que

$$\begin{aligned} H_n(k) &= \frac{1}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (-p-j) \\ &= \frac{(-1)^{p+n-1}}{n!} \prod_{\ell=p}^{p+n-1} \ell && \text{en posant } \ell = p+j \\ &= \frac{(-1)^n (p+n-1)!}{n!(p-1)!} \\ &= (-1)^n \binom{p+n-1}{n} \\ H_n(k) &= (-1)^n \binom{n-k-1}{n} \end{aligned}$$

Ceci montre que

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad H_n(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \\ \binom{k}{n} & \text{si } k \geq n \\ (-1)^n \binom{n-k-1}{n} & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

III.C.2 D'après le résultat de la question III.C.1, on a en particulier $H_n(k) \in \mathbb{Z}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. En conséquence,

$$H_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$$

On travaille depuis le début du sujet avec un entier $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. En fait, le résultat de cette question est valable pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, et même pour $n = 0$ puisque $H_0 = 1$. Cela va s'avérer indispensable par la suite.

III.C.3 Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a donc $P(k) \in \mathbb{Z}$ et $P(k+1) \in \mathbb{Z}$, d'où $\delta(P)(k) = P(k+1) - P(k) \in \mathbb{Z}$. Ainsi,

Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est à valeurs entières sur les entiers, $\delta(P)$ aussi.

III.C.4 Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

- Supposons que le polynôme P est à valeurs entières sur les entiers. D'après la question III.C.3, il en va de même pour $\delta(P)$ et, par une récurrence immédiate, pour $\delta^k(P)$ pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$. En particulier, les nombres $\delta^k(P)(0)$, pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, sont tous des entiers. D'après la question III.A.5, ceci signifie que les coordonnées de P dans la base $(H_k)_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ sont entières.
- Réciproquement, supposons que les coordonnées du polynôme P dans cette base sont entières. Ce dernier s'écrit alors $P = \sum_{k=0}^n a_k H_k$, avec $a_k \in \mathbb{Z}$ pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Soit maintenant $m \in \mathbb{Z}$. Le résultat de la question III.C.2 étant valable pour tout entier naturel n , $H_k(m) \in \mathbb{Z}$ pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$ d'où

$$P(m) = \sum_{k=0}^n a_k H_k(m) \in \mathbb{Z}$$

Ainsi, P est à valeurs entières sur les entiers.

On a donc prouvé par double implication que

Un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ est à valeurs entières sur les entiers si, et seulement si, ses coordonnées dans la base $(H_k)_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ sont entières.

III.C.5 Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $d \in \mathbb{N}$ tel que P est à valeurs entières sur les entiers.

- Si $d = 0$, c'est un polynôme constant. De plus, cette constante est entière donc $P = d!P$ est à coefficients entiers.
- Si $d \geq 1$, on peut utiliser le résultat de la question III.C.4 dans le cas $n = d$. De ce fait, les coordonnées du polynôme P dans la base $(H_k)_{k \in \llbracket 0; d \rrbracket}$ sont entières. Autrement dit, il existe des entiers $a_0, \dots, a_d$ tels que

$$P = \sum_{k=0}^d a_k H_k \quad \text{d'où} \quad d!P = d! \sum_{k=0}^d a_k H_k = \sum_{k=0}^d \frac{d!}{k!} a_k k! H_k$$

Soit $k \in \llbracket 0; d \rrbracket$. Par définition, $k! H_k \in \mathbb{Z}[X]$. De plus, $k!$ divise $d!$ donc $d!/k!$ est un entier, comme a_k . En tant que somme d'éléments de $\mathbb{Z}[X]$, le polynôme $d!P$ est donc à coefficients entiers.

Le polynôme $P = X^2/2$ montre que la réciproque est fautive. En effet, $2!P = X^2$ est à coefficients entiers, mais $P(1) \notin \mathbb{Z}$. Par conséquent,

Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $d \in \mathbb{N}$, si P est à valeurs entières sur les entiers, alors $d!P$ est un polynôme à coefficients entiers, mais la réciproque est fautive.

IV. GÉNÉRALISATION DE L'OPÉRATEUR DE DIFFÉRENCE ET APPLICATION

IV.A.1 Comme f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $\delta(f)$ aussi en tant que composée et différence de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$. Pour tout $x > 0$, on a de plus

$$\delta(f)(x) = f(x+1) - f(x)$$

d'où par dérivation

$$\delta(f)'(x) = f'(x+1) - f'(x) = \delta(f')(x)$$

Ainsi

$$\boxed{\delta(f) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \delta(f)' = \delta(f')}$$

Autrement dit, l'opérateur de différence commute avec l'opérateur de dérivation sur l'espace $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.

IV.A.2 Puisque les endomorphismes τ et id de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ commutent, on a encore

$$\delta^k = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \tau^j$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$, comme à la question I.B.4. On en déduit que pour tout $x > 0$,

$$\delta^k(f)(x) = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \tau^j(f)(x) = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(x+j)$$

soit

$$\boxed{\forall x > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \delta^n(f)(x) = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f(x+j)}$$

IV.A.3 Soit $x > 0$. Comme la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, elle est dérivable sur l'intervalle $[x; x+1]$. On déduit du théorème des accroissements finis qu'il existe un réel $x_1 \in]x; x+1[$ tel que

$$\delta(f)(x) = f(x+1) - f(x) = (x+1-x) f'(x_1) = f'(x_1)$$

Si l'on pose $y_1 = x_1 - x$, on a alors $y_1 \in]0; 1[$ et $x_1 = x + y_1$. Ainsi,

$$\boxed{\forall x > 0 \quad \exists y_1 \in]0; 1[\quad \delta(f)(x) = f'(x + y_1)}$$

Depuis le début de la quatrième partie, on travaille avec une fonction f fixée. Les résultats de cette question et des deux précédentes sont en fait valables pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, ce qui va nous être utile par la suite.

IV.A.4 Soit $x > 0$ fixé. Considérons la propriété définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$\mathcal{P}(n): \ll \forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}) \quad \exists y_n \in]0; n[\quad \delta^n(f)(x) = f^{(n)}(x + y_n) \gg.$$

- $\mathcal{P}(1)$ est vraie d'après la question IV.A.3.
- $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$: supposons que la propriété $\mathcal{P}$ est vraie au rang $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$. On a $\delta^{n+1}(f) = \delta^n(\delta(f))$. Comme $\delta(f) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ d'après la question IV.A.1, on déduit de la proposition $\mathcal{P}(n)$ qu'il existe un réel $y_n \in]0; n[$ tel que

$$\delta^{n+1}(f)(x) = \delta^n(\delta(f))(x) = \delta(f)^{(n)}(x + y_n)$$

D'après la question IV.A.1, on a $\delta(f)' = \delta(f')$ d'où, par récurrence immédiate, $\delta(f)^{(n)} = \delta(f^{(n)})$, si bien que

$$\delta^{n+1}(f)(x) = \delta(f)^{(n)}(x + y_n) = \delta(f^{(n)})(x + y_n)$$

Comme $f^{(n)} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ et $x + y_n > 0$, il existe d'après la question IV.A.3 un réel $y_1 \in]0; 1[$ tel que

$$\delta(f^{(n)})(x + y_n) = (f^{(n)})'(x + y_n + y_1) = f^{(n+1)}(x + y_{n+1})$$

en posant $y_{n+1} = y_n + y_1 \in]0; n+1[$. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$, il existe ainsi un réel $y_{n+1} \in]0; n+1[$ tel que $\delta^{n+1}(f)(x) = f^{(n+1)}(x + y_{n+1})$, ce qui montre que la proposition $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- **Conclusion** : d'après le principe de récurrence, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ceci étant vrai pour tout réel $x > 0$, on déduit de la question IV.A.2 que

$$\forall x > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \exists y_n \in]0; n[\quad \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f(x+j) = f^{(n)}(x + y_n)$$

IV.B.1 Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Sa décomposition en facteurs premiers s'écrit $k = \prod_{i=1}^r p_i^{m_i}$, avec $r \in \mathbb{N}^*$, $p_1, \dots, p_r$ des nombres premiers et $m_1, \dots, m_r$ des entiers. Alors

$$k^\alpha = \left(\prod_{i=1}^r p_i^{m_i} \right)^\alpha = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha m_i} = \prod_{i=1}^r (p_i^\alpha)^{m_i} > 0$$

Pour tout $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$, l'entier p_i est premier donc $p_i^\alpha \in \mathbb{N}$ par hypothèse, si bien que $k \in \mathbb{N}$ par produit. De ce fait,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^* \quad k^\alpha \in \mathbb{N}^*}$$

IV.B.2 Comme 2 est premier, on déduit de la définition du réel α que 2^α est un entier, forcément non nul. Par conséquent, $2^\alpha \geq 1$ d'où $\alpha \ln 2 \geq 0$ soit

$$\boxed{\alpha \geq 0}$$

IV.B.3 Dans cette question, on considère la fonction $f_\alpha : x \mapsto x^\alpha$.

- Si $\alpha \in \mathbb{N}$, la fonction f_α est polynomiale de degré α si bien que $f_\alpha^{(\alpha+1)} = 0$. En particulier, $f_\alpha^{(\alpha+1)}(1) = 0$.
- Si $\alpha \notin \mathbb{N}$, on a $f_\alpha^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha+1-n)x^{\alpha-n} \neq 0$ pour tout $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi,

$$\boxed{\alpha \text{ est un entier naturel si, et seulement si, l'une des dérivées successives de } f_\alpha \text{ s'annule sur }]0; +\infty[.}$$

IV.C.1 Soit $j \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Comme $x \in \mathbb{N}^*$, alors $x+j \in \mathbb{N}^*$ et l'on déduit de la question IV.B.1 que $f_\alpha(x+j) \in \mathbb{N}$. Les nombres $(-1)^{n-j}$ et $\binom{n}{j}$ étant des entiers, il en découle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f_{\alpha}(x+j) \in \mathbb{Z}$$

IV.C.2 Soit $x > 0$. D'après les calculs effectués à la question IV.B.3,

$$f_\alpha^{(n)}(x) = \alpha(\alpha - 1) \dots (\alpha + 1 - n)x^{\alpha-n}$$

Comme $n = \lfloor \alpha \rfloor + 1 > \alpha$, alors $\alpha - n < 0$ si bien que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\alpha-n} = 0$ et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\alpha^{(n)}(x) = 0$ par produit de limites. En outre, $y_n > 0$ d'où $x + y_n > x$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + y_n = +\infty$ d'après le théorème de minoration. On obtient par composition de limites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\alpha^{(n)}(x + y_n) = 0$$

Il est quand même un peu abusif de parler de la limite de $f_\alpha^{(n)}(x + y_n)$ alors que y_n , qui dépend de x , n'est pas défini de manière unique a priori. Il aurait mieux valu mentionner le membre de gauche de l'égalité (IV.1).

IV.C.3 Posons $v_x = f_\alpha^{(n)}(x + y_n)$ pour tout $x \in \mathbb{N}^*$.

- D'après les résultats des questions IV.A.4 et IV.C.1, $v_x \in \mathbb{Z}$ pour tout $x \in \mathbb{N}^*$.
- D'après le résultat de la question IV.C.2, $\lim_{x \rightarrow +\infty} v_x = 0$.

Ainsi, $(v_x)_{x \in \mathbb{N}^*}$ est une suite convergente d'entiers. Il s'ensuit qu'elle est stationnaire et atteint sa limite. En particulier, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $v_N = f_\alpha^{(n)}(N + y_n) = 0$. Comme $N + y_n > 0$, on déduit alors de la question IV.B.3 que

$$\alpha \in \mathbb{N}$$