

1

(**)

Centrale PC 2019

Déterminer les polynômes P tels que

- (a). $(X + 3) \cdot P(X) = X \cdot P(X + 1)$
 (b). $P(X^2) = P(X) \cdot P(X - 1)$

- (a). Soit P un polynôme non nul vérifiant $(X + 3)P(X) = XP(X + 1)$. Si α est une racine de P . Alors,

$$(\alpha + 3) \cdot P(\alpha) = 0 = \alpha \cdot P(\alpha + 1)$$

En particulier, si α est non nulle, on en déduit que $\alpha + 1$ est également une racine de P . On peut alors distinguer plusieurs cas :

- Si P admet une racine α non entière, elle est non nulle et le raisonnement précédent assure que $\alpha + 1$ est également racine, elle aussi non entière. En réitérant le raisonnement, on en déduit que $\alpha + k$ est racine pour tout entier k et donc que P a une infinité de racines ce qui est absurde.
- La raisonnement est identique si P admet une racine entière strictement positive.
- Si P admet une racine entière négative α , on peut cette fois écrire (en remplaçant X par $\alpha - 1$)

$$(\alpha + 2) \cdot P(\alpha - 1) = (\alpha - 1) \cdot P(\alpha) = 0$$

ce qui montre que si $\alpha \neq -2$, alors $\alpha - 1$ est également racine. Un raisonnement similaire au premier cas montre alors que si $\alpha < -2$, alors P admet $\alpha - k$ comme racine pour tout entier k ce qui est encore absurde.

On peut donc conclure de tout ceci que P ne peut admettre que -2 , -1 ou 0 comme racines. Il est donc nécessairement de la forme

$$P = \lambda X^\alpha (X + 1)^\beta (X + 2)^\gamma$$

$$\text{d'où } (X + 3)P(X) = \lambda X^\alpha (X + 1)^\beta (X + 2)^\gamma (X + 3) \quad \text{et} \quad XP(X + 1) = \lambda X(X + 1)^\alpha (X + 2)^\beta (X + 3)^\gamma$$

donc nécessairement $\alpha = \beta = \gamma = 1$. Finalement, $P = \lambda X(X + 1)(X + 2)$ et réciproquement, un polynôme de cette forme convient.

Les polynômes vérifiant $(X + 3)P(X) = XP(X + 1)$ sont ceux de la forme

$$P = \lambda X(X + 1)(X + 2)$$

où λ est un réel quelconque.

- (b). Dans un premier temps, on remarque que P est nécessairement unitaire (car $P(X^2)$ et $P(X - 1)$ ont mêmes coefficients dominants que P). De plus, les seuls polynômes constants solutions sont 0 et 1 .

Supposons maintenant que P vérifie la relation et est non constant. Soit z une racine complexe de P (elle existe d'après d'Alembert-Gauss). Alors,

$$P(z^2) = P(z)P(z - 1) = 0$$

donc z^2 est solution. Par récurrence immédiate, la suite $(z^{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de zéros de P . Si z est non nulle et de module différent de 1 , on a alors une infinité de racines de P , ce qui est absurde car P est non nul. Ainsi, z est nulle ou de module 1 . Remarquons ensuite que

$$P((z + 1)^2) = P(z + 1)P(z + 1 - 1) = P(z + 1)P(z) = 0$$

Par conséquent, $(z + 1)^2$ est également racine de P , donc elle aussi de module 1 ou nulle. On en déduit que z appartient à

$$K = (\mathbb{U} \cup \{0\}) \cap (\{z, |z + 1| = 1\} \cup \{0\})$$

On vérifie facilement (par un dessin par exemple), que l'ensemble K est réduit aux quatre éléments 0 , 1 , $e^{2i\pi/3}$ et $e^{-2i\pi/3}$. Mais si 1 est racine, alors $(1 + 1)^2$ soit 4 est racine de qui est absurde. Donc 1 n'est pas racine, et 0 non plus car sinon $(0 + 1)^2$ soit 1 est racine. Il existe donc deux entiers a et b tels que

$$P = (X - e^{2i\pi/3})^a (X - e^{-2i\pi/3})^b$$

$$\text{et alors } P(X)P(X - 1) = (X - e^{2i\pi/3})^a (X - e^{-2i\pi/3})^b (X - 1 - e^{2i\pi/3})^a (X - 1 - e^{-2i\pi/3})^b$$

$$\text{et } P(X^2) = (X^2 - e^{2i\pi/3})^a (X^2 - e^{-2i\pi/3})^b = (X - e^{i\pi/3})^a (X + e^{i\pi/3})^a (X - e^{-i\pi/3})^b (X + e^{-i\pi/3})^b$$

Remarquons maintenant les égalités

$$e^{i\pi/3} = e^{2i\pi/3} + 1 \quad e^{-i\pi/3} = e^{-2i\pi/3} + 1 \quad -e^{i\pi/3} = e^{-2i\pi/3} \quad \text{et} \quad -e^{-i\pi/3} = e^{2i\pi/3}$$

Pour des raisons de multiplicités, on a donc $a = b$ et réciproquement, si cette condition est vérifiée, le polynôme P vérifie (b). Sachant que $(X - e^{2i\pi/3})(X - e^{-2i\pi/3}) = X^2 + X + 1$, il vient

Les polynômes vérifiant (b) sont le polynôme nul et ceux de la forme $(X^2 + X + 1)^p$ avec $p \in \mathbb{N}$.

2 _____ (**) _____

Monter que pour tout entier n , il existe un unique polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$P_n(X+1) + P_n(X) = 2X^n$$

Quel est son degré ? Déterminer P_2 . Montrer les deux relations suivantes :

$$P'_n = nP_{n-1} \quad \text{et} \quad P_n(1-X) + (-1)^{n+1}P_n(X) = 0$$

Posons

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}[X] &\longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P &\longmapsto P(X+1) + P(X) \end{aligned}$$

Il est clair que φ définit un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$. Soit $P \in \text{Ker } \varphi$. Alors, pour tout entier k ,

$$P(k+1) + P(k) = 0 \quad \text{soit} \quad P(k+1) = -P(k)$$

d'où par récurrence immédiate

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(k) = (-1)^k \cdot P(0)$$

Si $P(0) = 0$, alors $P(k) = 0$ pour tout k . Sinon, $P(k+1)$ et $P(k)$ sont de signes opposés (strictement) ce qui par théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'au moins une racine de P dans l'intervalle $]k; k+1[$, là encore pour tout k . Dans les deux cas, P a une infinité de racines donc c'est le polynôme nul. Ainsi, $\text{Ker } \varphi = \{0\}$, ce qui prouve que φ est injectif. Pour tout polynôme Q , l'équation $\varphi(P) = Q$ d'inconnue $P \in \mathbb{R}[X]$ admet donc au plus une solution dans $\mathbb{R}[X]$ et en particulier pour $Q = 2X^n$ pour tout entier n .

Remarquons maintenant que $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par φ ce qui permet de définir l'induit φ_n par φ sur ce sous-espace vectoriel. Puisqu'il s'agit d'un endomorphisme injectif en dimension finie, φ_n est bien bijectif. En particulier, l'équation $\varphi(P) = 2X^n$ admet une solution dans $\mathbb{R}_n[X]$ donc dans $\mathbb{R}[X]$. On peut donc conclure

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists ! P_n \in \mathbb{R}[X], \quad P_n(X+1) + P_n(X) = 2X^n$$

D'après la preuve précédente, P_n est un élément de $\mathbb{R}_n[X]$. Mais si P_n est de degré strictement inférieur à n , alors il en est de même de $\varphi(P_n)$, ce qui contredit l'égalité $\varphi(P_n) = 2X^n$. Ainsi,

Pour tout entier n , P_n est de degré n .

Pour déterminer P_2 , on peut commencer par remarquer que pour tout polynôme P , son image $\varphi(P)$ a le même degré que P et un coefficient dominant égal au double de celui de P . Cela démontre que P_n est nécessairement unitaire pour tout entier n . Ensuite, si l'on note $P_2 = X^2 + aX + b$, alors

$$2X^2 = P_2(X+1) + P_2(X) = (X^2 + 2X + 1) + b(X+1) + c + X^2 + bX + c = 2X^2 + 2(b+1)X + (1+b+2c)$$

donc $b = -1$ et $c = 0$ par unicité des coefficients d'un polynôme. Finalement

$$P_2 = X^2 - X$$

Fixons maintenant $n \in \mathbb{N}$. Par définition,

$$P_n(X+1) + P_n(X) = 2X^n$$

donc par dérivation

$$P'_n(X+1) + P'_n(X) = 2nX^{n-1}$$

soit
$$\left(\frac{1}{n}P'_n\right)(X+1) + \left(\frac{1}{n}P'_n\right)(X) = 2X^{n-1}$$

Par unicité de P_{n-1} , il vient donc $\frac{1}{n}P'_n = P_{n-1}$ soit bien

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P'_n = nP_{n-1}$$

La seconde égalité s'écrit

$$P_n(1-X) = -(-1)^{n+1}P_n(X) \quad \text{soit encore} \quad P_n(X) = (-1)^n P_n(1-X)$$

Pour la justifier, notons $Q = (-1)^n P_n(1 - X)$. Il suffit de montrer que $\varphi(Q) = 2X^n$ puisque l'équation $\varphi(P) = 2X^n$ admet P_n comme unique solution. Alors,

$$\begin{aligned} Q(X+1) + Q(X) &= (-1)^n P_n(1 - (X+1)) + (-1)^n P_n(1 - X) \\ &= (-1)^n [P_n(1 + (-X)) + P_n(-X)] \\ &= (-1)^n [2(-X)^n] \\ Q(X+1) + Q(X) &= 2X^n \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure que $Q = P_n$ puis

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n(1 - X) + (-1)^{n+1} P_n(X) = 0}$$

3 _____ (*) _____ **X PC 2014**

Soit E un espace vectoriel et F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels différents de E . Peut-on avoir $F_1 \cup F_2 = E$?

Raisonnons par l'absurde en supposant que $E = F_1 \cup F_2$ et commençons par justifier que $F_1 \subset F_2$ ou $F_2 \subset F_1$. Supposons par exemple que F_1 n'est pas inclus dans F_2 . Il existe alors $x \in F_1$ tel que $x \notin F_2$. Considérons alors $y \in F_2$. Alors,

$$x + y \in E = F_1 \cup F_2 \quad \text{donc} \quad \exists z \in F_1 \cup F_2, \quad x + y = z$$

Si $z \in F_2$, alors on peut écrire $x = z - y$ avec $z, y \in F_2$ et donc $x \in F_2$ ce qui est contraire aux hypothèses. On a donc $z \in F_1$ et par suite, $y = z - x$ avec $z, x \in F_1$ et donc $y \in F_1$. Ceci étant vrai pour tout y , on a $F_2 \subset F_1$. Par suite, $F_1 \cup F_2 = F_1 = E$ ce qui est absurde car on a supposé que F_1 était distinct de E . Le cas où F_2 n'est pas inclus dans F_1 est similaire en montrant dans un premier temps que $F_1 \subset F_2$. Pour conclure,

$$\boxed{\text{Si } F_1 \text{ et } F_2 \text{ sont deux sous-espaces vectoriels distincts de } E, \text{ alors } F_1 \cup F_2 \neq E.}$$

4 _____ (*) _____

Soit E un espace vectoriel et f, g deux symétries telles que $\text{Ker}(f - I_d) = \text{Ker}(g - I_d)$. On pose $h = g \circ f - I_d$.

- Exprimer h comme combinaison linéaire de f et g (on pourra comparer $\text{Im}(f + I_d)$ et $\text{Ker}(g - I_d)$).
- En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que f et g commutent.

- Soit $x \in \text{Im}(f + I_d)$. Alors, il existe $a \in E$ tel que $x = f(a) + a$. Par suite,

$$f(x) = f^2(a) + f(a) = a + f(a) = x \quad \text{d'où} \quad x \in \text{Ker}(f - I_d)$$

Par hypothèse, on a donc $x \in \text{Ker}(g - I_d)$ d'où $\text{Im}(f + I_d) \subset \text{Ker}(g - I_d)$. On en déduit aussitôt que $(g - I_d) \circ (f + I_d) = 0$ soit en développant

$$\boxed{h = g \circ f - I_d = f - g}$$

- Si f et g commutent, on a $h = f \circ g - I_d$. Par symétrie des rôles, on prouve de la même manière que $h = g - f$. Au final, $f - g = g - f$ donc $f = g$. Réciproquement, il est évident que si $f = g$, les deux endomorphismes commutent.

$$\boxed{\text{Si } \text{Ker}(f - I_d) = \text{Ker}(g - I_d), \text{ } f \text{ et } g \text{ commutent si et seulement si } f = g.}$$

5 _____ (**) _____

On considère

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}[X] &\longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P &\longmapsto P' - XP \end{aligned}$$

- Justifier que φ est un endomorphisme. Est-il injectif? Surjectif?
- Déterminer la parité de $\varphi(P)$ en fonction de celle de P .
- Montrer que pour tout entier n , X^{2n+1} est dans l'image de φ .
- On pose pour tout entier q , $U_q = \varphi(X^{2q+1})$ et $F = \text{Vect}\{U_q, q \in \mathbb{N}\}$. Montrer que pour tout entier $q \geq 1$, il existe un réel μ_q tel que $X^{2q} - \mu_q \in F$.
- Prouver que $\text{Im } \varphi = \text{Vect}\{X^{2n+1}, n \in \mathbb{N}\} \oplus \text{Vect}\{X^{2q} - \mu_q, q \in \mathbb{N}^*\}$

- (a). Il est clair que φ est un endomorphisme par linéarité de la dérivation et de la multiplication par un polynôme. Étant donné $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul, on a

$$\deg P' < \deg XP = \deg P + 1 \quad \text{d'où} \quad \deg \varphi(P) = \deg P + 1$$

Cette relation assure notamment que $\varphi(P)$ est non nul lorsque P est non nul d'où l'injectivité de φ , mais également que $\text{Im } \varphi$ ne contient aucun polynôme constant autre que 0, d'où la non-surjectivité de φ .

L'application φ est linéaire, injective et non-surjective.

- (b). Si P est pair, il s'écrit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^{2k}$ de sorte que

$$\varphi(P) = \sum_{k=1}^n (2k) a_k X^{2k-1} - \sum_{k=0}^n X^{2k+1} \text{ est impair}$$

De la même manière, on prouve qu'un polynôme impair a une image paire.

Un polynôme pair (resp. impair) a une image impaire (resp. paire) par φ .

- (c). On procède par récurrence sur n . Pour $n = 0$, il suffit de constater que $X = \varphi(-1)$. Si n est un entier tel que $X^{2n+1} \in \text{Im } \varphi$, on a alors

$$\varphi(X^{2n+2}) = (2n+1)X^{2n+1} - X^{2n+3} \quad \text{soit} \quad X^{2n+3} = -\varphi(X^{2n+2}) - (2n+1)X^{2n+1} \in \text{Im } \varphi$$

Le principe de récurrence prouve donc que

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X^{2n+1} \in \text{Im } \varphi$.

- (d). A nouveau, on effectue une récurrence sur $q \in \mathbb{N}^*$. Pour $q = 1$, on remarque que $U_1 = \varphi(X) = 1 - X^2$. Il suffit donc de poser $\mu_1 = -1$ pour avoir $X^2 - \mu_1 = -U_1 \in F$. Puis, étant donné $q \in \mathbb{N}^*$ et μ_q tel que $X^{2q} - \mu_q \in F$, on écrit de même

$$\varphi(X^{2q+1}) = (2q+1)X^{2q} - X^{2q+2} \quad \text{d'où} \quad X^{2q+2} + (2q+1)\mu_q = -U_{q+1} - (2q+1)[X^{2q} - \mu_q] \in F \in \text{Im } \varphi$$

Il suffit donc de poser $\mu_{q+1} = (2q+1)\mu_q$ pour valider la propriété au rang $q+1$. Finalement, par récurrence,

Pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, il existe un réel μ_q tel que $X^{2q} - \mu_q \in F$.

- (e). Il suffit de montrer que la famille $\mathcal{F} = \{X^{2n+1}, n \in \mathbb{N}\} \cup \text{Vect}\{X^{2q} - \mu_q, q \in \mathbb{N}^*\}$ est une base de $\text{Im } \varphi$. D'après ce qui précède, il s'agit déjà d'une famille d'éléments de $\text{Im } \varphi$. De plus, les polynômes sont de degrés deux à deux distincts donc cette famille est libre. Reste à montrer le caractère générateur.

Soit $Q \in \text{Im } \varphi$ que l'on note $Q = \sum_{k=0}^d a_k X^k$. On écrit alors

$$\begin{aligned} Q &= \sum_{k=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} a_{2k} X^{2k} + \sum_{k=0}^{\lfloor (d-1)/2 \rfloor} a_{2k+1} X^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} a_{2k} [X^{2k} - \mu_k] + \sum_{k=0}^{\lfloor (d-1)/2 \rfloor} a_{2k+1} X^{2k+1} + \left[\sum_{k=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} a_{2k} \mu_k \right] \end{aligned}$$

Puisque $Q \in \text{Im } \varphi$ de même que $X^{2k} - \mu_k$ et X^{2k+1} pour tout k , on en déduit que le polynôme constant $\sum_{k=0}^{\lfloor d/2 \rfloor} a_{2k} \mu_k$ appartient également à $\text{Im } \varphi$. Mais on a vu à la question (a) que le seul polynôme constant de l'image est le polynôme nul. Ce terme est donc nul ce qui prouve que Q est bien combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{F}$. C'est finalement une base de $\text{Im } \varphi$ ce qui permet de conclure.

$\text{Im } \varphi = \text{Vect}\{X^{2n+1}, n \in \mathbb{N}\} \oplus \text{Vect}\{X^{2q} - \mu_q, q \in \mathbb{N}^*\}$

6

(**)

Mines PC 2014

Soit E un espace vectoriel, $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{K}$ une application linéaire et $f \in \mathcal{L}(E)$. On note $H = \text{Ker } \varphi$. Justifier l'équivalence

$$H \text{ stable par } f \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, \quad \varphi \circ f = \lambda \varphi$$

$\Leftarrow$ Soit $x \in H = \text{Ker } \varphi$. Alors $\varphi(x) = 0$ donc $\varphi \circ f(x) = \lambda f(x) = 0$ soit $\varphi(f(x)) = 0$. Par suite, $f(x) \in \text{Ker } \varphi = H$ ce qui prouve bien que H est stable par f .

$\Rightarrow$ Si φ est nulle, le résultat est évident : il suffit de prendre n'importe quel réel λ . Supposons donc φ non nulle. Alors, H est un hyperplan de E . Notons a un élément qui n'appartient pas à H de sorte que $E = H \oplus \overrightarrow{\{a\}}$ et $\varphi(a) \neq 0$. Sous réserve d'existence de λ , on a

$$\varphi \circ f(a) = \lambda \varphi(a) \quad \text{d'où} \quad \lambda = \frac{\varphi(f(a))}{\varphi(a)}$$

Vérifions maintenant que ce réel convient. Soit x un élément de E . Il existe $h \in H$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ tels que $x = h + \alpha a$. Dès lors,

$$\varphi(x) = \alpha \varphi(a) \quad \text{et} \quad \varphi \circ f(x) = \varphi(f(h)) + \alpha \varphi(f(a))$$

Puisque H est stable par f , $f(h) \in \text{Ker } \varphi$ et donc

$$\varphi \circ f(x) = \alpha \varphi(f(a)) = \lambda \alpha \varphi(a) = \lambda \varphi(x)$$

Ceci étant vrai pour tout réel x , on a bien $\varphi \circ f = \lambda \varphi$.

7 _____ (**) _____

Soit f, g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E . Montrer les équivalences de

- (i) $f \circ g \in \mathcal{GL}(E)$
- (ii) f surjective, g injective, $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } g$
- (iii) f surjective, g injective, $\text{Im } (g \circ f) = \text{Im } ((g \circ f)^2)$ et $\text{Ker } (g \circ f) = \text{Ker } ((g \circ f)^2)$

(i) $\Rightarrow$ (ii) Soit $y \in E$. Puisque $f \circ g$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = (f \circ g)(x)$ soit $y = f(g(x))$. Ainsi, f est surjective.

Soit $x \in \text{Ker } g$. Alors $g(x) = 0$ donc $(f \circ g)(x) = 0$. Puisque $f \circ g$ est injective, on en déduit que $x = 0$. Ainsi, $\text{Ker } g = \{0\}$ et g est injective.

Soit maintenant $x \in \text{Ker } f \cap \text{Im } g$. Alors $f(x) = 0$ et il existe $a \in E$ tel que $x = g(a)$. En composant, il vient $(f \circ g)(a) = 0$ donc $a = 0$ par bijectivité de $f \circ g$ et donc $x = g(a) = 0$. On a bien $\text{Ker } f \cap \text{Im } g = \{0\}$.

Pour finir, soit $x \in E$. Alors en notant $h = (f \circ g)^{-1}$, on a

$$f(x - (g \circ h \circ f)(x)) = f(x) - [(f \circ g) \circ h \circ f](x) = f(x) - f(x) = 0$$

On peut donc écrire

$$x = \underbrace{[x - (g \circ h \circ f)(x)]}_{\in \text{Ker } f} + \underbrace{(g \circ h \circ f)(x)}_{\in \text{Im } g}$$

ce qui justifie finalement que $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } g$. On peut conclure

$$\boxed{f \text{ est surjective, } g \text{ est injective et } E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } g.}$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Les inclusions $\text{Im } (g \circ f)^2 \subset \text{Im } (g \circ f)$ et $\text{Ker } (g \circ f) \subset \text{Ker } (g \circ f)^2$ sont évidentes.

Soit $x \in \text{Im } g \circ f$. Il existe $a \in E$ tel que $x = (g \circ f)(a)$. On peut alors écrire $a = b + c$ avec $b \in \text{Ker } f$ et $c \in \text{Im } g$. Alors $f(b) = 0$ et il existe $d \in E$ tel que $c = g(d)$. Enfin, par surjectivité, il existe $e \in E$ tel que $d = f(e)$. Finalement,

$$x = g(f(b)) + g(f(g(f(e))) = (g \circ f)^2(e)$$

Cela valide l'inclusion $\text{Im } (g \circ f) \subset \text{Im } (g \circ f)^2$.

Soit maintenant $x \in \text{Ker } (g \circ f)^2$. Alors $g(f(g(f(x)))) = 0$ d'où $f(g(f(x))) = 0$ par injectivité de g . Ainsi, $g(f(x)) \in \text{Ker } f$. Mais il est clair que cet élément appartient aussi à $\text{Im } g$. Comme $\text{Ker } f \cap \text{Im } g = \{0\}$, il vient $g(f(x)) = 0$ soit $x \in \text{Ker } (g \circ f)$. On a bien établi

$$\boxed{\text{Im } (g \circ f) = \text{Im } (g \circ f)^2 \quad \text{et} \quad \text{Ker } (g \circ f) = \text{Ker } (g \circ f)^2}$$

(iii) $\Rightarrow$ (i) Soit $x \in \text{Ker } (f \circ g)$. Par surjectivité de g , il existe $a \in E$ tel que $x = f(a)$. Alors, $(f \circ g)(x) = (f \circ g \circ f)(a) = 0$ puis en composant par g , $(g \circ f)^2(a) = 0$. Par hypothèse, il s'ensuit que $(g \circ f)(a) = 0$ et g étant injective, que $f(a) = 0$ soit $x = 0$. Ainsi, $\text{Ker } (f \circ g) = \{0\}$ donc $f \circ g$ est injective.

Soit maintenant $y \in E$. Il existe $a \in E$ tel que $y = f(a)$. Alors, $(g \circ f)(a) \in \text{Im } (g \circ f)^2$ donc il existe $b \in E$ tel que $(g \circ f)(a) = (g \circ f)^2(b)$. Puisque g est injective, il vient $f(a) = (f \circ g \circ f)(b)$, soit $y = (f \circ g \circ f)(b) = (f \circ g)(f(b))$. Cela prouve la surjectivité de $(f \circ g)$. Ainsi,

$$\boxed{(f \circ g) \text{ est bijective.}}$$

8 _____ (**) _____ **Mines PC 2011**

Soit $\Phi : P \mapsto P(X+1) - P(X)$ dans $\mathbb{R}[X]$.

(a) Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ et calculer $\Phi^n(P)$ pour tout entier n et tout polynôme P .

- (b) Calculer pour tous entiers n et p avec $p \leq n$ la somme $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k k^p$.

- (a) La linéarité de Φ est évidente compte tenu de celle de $P \mapsto P(X+1)$. Un calcul rapide montre que pour tout polynôme P ,

$$\Phi^2(P) = P(X+2) - 2P(X+1) + P(X) \quad \text{et} \quad \Phi^3(P) = P(X+3) - 3P(X+2) + 3P(X+1) - P(X)$$

On reconnaît une formule du type binôme de Newton. Une preuve classique sur n utilisant les propriétés habituelles des coefficients binomiaux montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall P \in \mathbb{K}[X], \quad \Phi^n(P) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} P(X+k)$$

- (b) Commençons par remarquer grâce au résultat précédent que

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k k^p = (\Phi^n(X^p))(0)$$

Déterminons par conséquent $\Phi^n(X^p)$ en commençant par étudier Φ^n .

Il est clair que $\Phi(1) = 0$. Par ailleurs, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\Phi(X^p) = (X+1)^p - X^p = \left(\sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k} X^k \right) - X^p = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k} X^k$$

Il s'ensuit que $\Phi(X^p)$ est de degré $p-1$ et de coefficient dominant $\binom{p}{p} = 1$ c'est-à-dire p . Par linéarité de Φ , on en déduit que pour tout polynôme P de degré $p > 0$ et de coefficient dominant a_p , son image $\Phi(P)$ par Φ est de degré $p-1$ et de coefficient dominant a_p . Un polynôme constant est pour finir dans le noyau de Φ .

Une récurrence immédiate permet ensuite de montrer que si P est un polynôme quelconque de degré p et de coefficient dominant a_p , alors $\Phi^n(P)$ est de degré $p-n$ et de coefficient dominant $p(p-1) \cdots (p-n+1) a_p$ tant que $n \leq p$, et que $\Phi^n(P)$ est nul sinon.

En appliquant ce résultat au polynôme $P = X^p$, il vient immédiatement

$$\forall n > p, \quad \Phi^n(X^p) = 0 \quad \text{et} \quad \Phi^n(X^n) = n!$$

On en déduit aussitôt la valeur cherchée.

$$\forall n > p, \quad \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n = n!$$

9 (*)

Soit A l'élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments diagonaux sont égaux à a et tous les autres coefficients égaux à b .

- (a). Calculer A^2 . En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que cette matrice soit inversible. Déterminer alors son inverse. Application pour $a = 0$ et $b = 1$.
- (b). Calculer A^m pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Notons J la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Alors

$$A = (a-b)I_n + bJ$$

Puisque J et I_n commutent, on peut appliquer la formule du binôme ce qui donne pour tout $p \in \mathbb{N}$

$$A^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (a-b)^k b^{m-k} J^{m-k}$$

On peut alors remarquer que $J^2 = nJ$ d'où par récurrence immédiate, $J^k = n^{k-1}J$ pour tout $k \geq 1$. Ainsi,

$$A^m = (a-b)^m I_n + \left(\sum_{k=0}^{m-1} \binom{m}{k} (a-b)^k b^{m-k} n^{m-k-1} \right) J$$

soit

$$A^m = (a-b)^m I_n + \frac{1}{n} [((a-b) + nb)^m - (a-b)^m] J$$

On remarque alors que I_n, A et A^2 appartiennent à l'espace de dimension 2 engendré par I_n et J . Elles sont donc liées. Précisément,

$$\begin{aligned}
A^2 &= (a-b)^2 I_n + [2b(a-b) + nb^2] J \\
&= (a-b)^2 I_n + (2a-2b+nb) bJ \\
A^2 &= (a-b)^2 I_n + (2a-2b+nb) [A - (a-b)I_n]
\end{aligned}$$

et finalement

$$A[A - (2a-2b+nb)I_n] = (b-a)(a+(n-1)b)I_n$$

Si $b-a$ et $a+(n-1)b$ sont non nuls, on en déduit aussitôt que A est inversible d'inverse

$$A^{-1} = \frac{1}{(b-a)(a+(n-1)b)} (A - (2a-2b+nb)I_n)$$

Si en revanche $a=b$, il est clair que A est de rang 1 donc non inversible, et si $a+(n-1)b=0$, il en est de même puisqu'alors le vecteur ${}^t(1, 1, \dots, 1)$ est un élément non nul de $\text{Ker } A$.

$$A \text{ est inversible si et seulement si } (b-a)(a+(n-1)b) \neq 0.$$

En ce qui concerne le cas particulier $a=0$ et $b=1$, on a donc A inversible et

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{n-1} \begin{pmatrix} (2-n) & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & (2-n) \end{pmatrix}$$

10

(**)

Une matrice M est dite magique si la somme sur chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale est la même. On la note alors $s(M)$.

On note E l'ensemble des matrices magiques de taille 3, E_0 l'ensemble des éléments M de E tels que $s(M)=0$. Pour finir, on note J la matrice dont tous les éléments sont égaux à 1.

- Montrer que E et E_0 sont des sous-espaces vectoriels de $M_3(\mathbb{R})$.
- Déterminer $E_0 \cap S_3(\mathbb{R})$ et $E_0 \cap A_3(\mathbb{R})$.
- Montrer que $E = E_0 \oplus \text{Vect}\{J\}$ et $E_0 = E_0 \cap S_3(\mathbb{R}) \oplus E_0 \cap A_3(\mathbb{R})$. En déduire la dimension de E .
- Déterminer toutes les matrices de taille 3 dont les coefficients sont les entiers de 1 à 9.

(a). Evident.

(b). Soit A un élément de $E_0 \cap S_3(\mathbb{R})$. On note

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} a+b+c=0 \\ b+d+e=0 \\ c+e+f=0 \\ a+d+f=0 \\ 2c+d=0 \end{cases}$$

On procède par pivot de Gauss en éliminant successivement les variables a, b, c, d dans les égalités, puis en remontant le système triangulaire obtenu. Les systèmes successifs deviennent

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ b+d+e=0 \\ c+e+f=0 \\ -b-c+d+f=0 \\ 2c+d=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a+b+c=0 \\ b+d+e=0 \\ c+e+f=0 \\ d+e+f=0 \\ e+f=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a=-f \\ b=f \\ c=0 \\ d=0 \\ e=-f \end{cases}$$

Au final,

$$E_0 \cap S_3(\mathbb{R}) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

De la même manière, on notant $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$ un élément de $E_0 \cap A_3(\mathbb{R})$, on trouve

$$E_0 \cap A_3(\mathbb{R}) = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

- (c). Par définition, E_0 est le noyau de la forme linéaire définie sur E qui à M associe $s(M)$. Puisque J n'est pas dans ce noyau, on a immédiatement $E = E_0 \oplus \text{Vect}\{J\}$.

Soit maintenant M un élément de E_0 . On sait que l'on peut écrire

$$M = S_M + A_M \quad \text{avec} \quad S_M = \frac{M + {}^t M}{2} \in S_3(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad A_M = \frac{M - {}^t M}{2} \in A_3(\mathbb{R})$$

Mais puisque M est magique, il est clair que ${}^t M$ puis S_M et A_M le sont. Cela justifie que E_0 est bien la somme de $E_0 \cap S_3(\mathbb{R})$ et $E_0 \cap A_3(\mathbb{R})$. L'intersection de ces deux espaces étant réduite à $\{0\}$ (car $S_3 \cap A_3 = \{0\}$ ou encore via la question (b)), il vient

$$E = (E_0 \cap S_3(\mathbb{R})) \oplus (E_0 \cap A_3(\mathbb{R})) \oplus \text{Vect}\{J\}$$

Ces trois espaces étant de dimension 1 chacun, E est de dimension 3 et une base de E est donnée par J et les deux matrices de la question (b).

- (d). Soit A un élément de $\mathbb{M}$ dont les éléments sont les entiers de 1 à 9. D'après ce qui précède, il existe trois réels α, β et γ tels que

$$A = \begin{pmatrix} -\beta + \gamma & \alpha + \beta + \gamma & -\alpha + \gamma \\ -\alpha + \beta + \gamma & \gamma & \alpha - \beta + \gamma \\ \alpha + \gamma & -\alpha - \beta + \gamma & \beta + \gamma \end{pmatrix}$$

La somme de tous les éléments de la matrice est alors égale à 45 mais aussi à $3s(A)$. On en déduit que $s(A) = 15$ d'où $3\gamma = 15$ puis $\gamma = 5$. Cherchons maintenant la place du 9 et du 1. Supposons que 9 soit « en haut à gauche ». On a alors $\beta = -4$ et la matrice est de la forme

$$\begin{pmatrix} 9 & \alpha + 1 & 5 - \alpha \\ -\alpha + 1 & 5 & \alpha + 9 \\ \alpha + 5 & -\alpha + 9 & 1 \end{pmatrix}$$

de sorte que quel que soit le choix de α non nul, la matrice comporte un coefficient supérieur à 9 à l'emplacement $(2, 3)$ ou $(3, 2)$. Si α est nul, la matrice n'est pas non plus de la forme voulue. En raisonnant de la même manière pour les 3 autres « coins », on constate que le coefficient 9 ne peut être qu'aux emplacements d'indices $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(2, 3)$ et $(3, 2)$. Supposons maintenant que 9 soit « en haut au milieu ». On a alors $\alpha + \beta = 4$ et en notant $\delta = \frac{\alpha - \beta}{2}$, on a $\alpha = 2 + \delta$ et $\beta = 2 - \delta$ et la matrice est de la forme

$$\begin{pmatrix} 3 + \delta & 9 & 3 - \delta \\ 5 - 2\delta & 5 & 5 + 2\delta \\ 7 + \delta & 1 & 7 - \delta \end{pmatrix}$$

On constate alors immédiatement sur cette forme que seuls $\delta = 1$ ou $\delta = -1$ conviennent. Un raisonnement similaire lorsque 9 est dans les autres emplacements $(2, 1)$, $(2, 3)$ et $(3, 2)$ montre que les matrices magiques de taille 3 dont les éléments sont les entiers de 1 à 9 sont les 8 éléments

$$\begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 9 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 7 & 2 \\ 1 & 5 & 9 \\ 8 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

11

(**)

Soit $A = (a_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1;n \rrbracket}$ une matrice réelle d'inverse $B = (b_{i,j})_{i,j \in \llbracket 1;n \rrbracket}$ telle que

$$\forall i, j \in \llbracket 1;n \rrbracket, \quad a_{i,j} \geq 0 \quad \text{et} \quad b_{i,j} \geq 0$$

Montrer que A a un et un seul élément non nul par ligne et par colonne.

Fixons $i \in \llbracket 1;n \rrbracket$. La ligne L_i de A comporte au moins un coefficient non nul, sans quoi A ne pourrait être inversible. Notons a_{i,σ_i} ce coefficient. Alors, pour tout $j \neq i$,

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j} = 0$$

On a ici une somme de termes positifs dont la somme est nulle donc tous les termes sont nuls. Notamment, puisque $a_{i,\sigma_i} \neq 0$, cela impose $b_{\sigma_i,j} = 0$. Par suite, $b_{\sigma_i,i}$ est le seul coefficient éventuellement non nul de la ligne L_{σ_i} de B .

Justifions maintenant l'unicité du coefficient non nul a_{i,σ_i} de la ligne L_i de A . Par l'absurde, si on suppose qu'il en existe un autre a_{i,μ_i} , le même raisonnement montre que la ligne L_{μ_i} de B ne comporte également que $b_{\mu_i,i}$ comme coefficient éventuellement

non nul. On peut alors remarquer que les deux lignes L_{σ_i} et L_{μ_i} sont colinéaires, ce qui contredit l'inversibilité de B . Par suite, le coefficient non nul a_{i,σ_i} de la ligne L_i de A est unique.

Résumons : on a justifié que si A est inversible à coefficients positifs et d'inverse également à coefficient positifs, alors chaque ligne de A a un unique coefficient non nul par ligne. Si on applique ce résultat à tA d'inverse tB qui vérifient ces mêmes hypothèses, on en déduit que cette propriété sur les lignes de A est également vérifiée par ses colonnes.

La matrice A a exactement un coefficient non nul par ligne et par colonne.

12

(**)

Soit $A \in \mathcal{M}_{3n}(\mathbb{K})$ telle que $A^3 = 0$ et $\text{rg } A = 2n$. Montrer que $\text{Im } A^2 = \text{Ker } A$, puis que A est semblable à la matrice par blocs :

$$\begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Commençons par remarquer que puisque $A^3 = 0$, on a $\text{Im } A^2 \subset \text{Ker } A$ et d'après le théorème du rang,

$$\dim \text{Ker } A = 3n - \text{rg } A = n$$

Par suite, $\text{rg } A^2 \leq n$. Appliquons maintenant le théorème du rang à la restriction de A à $\text{Im } A$. Le noyau de cette application est égal à $\text{Im } A \cap \text{Ker } A$, et son image n'est autre que $\text{Im } A^2$ si bien que

$$\dim(\text{Im } A \cap \text{Ker } A) + \text{rg } A^2 = \text{rg } A \quad \text{d'où} \quad \text{rg } A^2 = \text{rg } A - \dim(\text{Im } A \cap \text{Ker } A) \geq \text{rg } A - \dim \text{Ker } A = n$$

Par encadrement, on a donc $\text{rg } A^2 = n$ et par inclusion et égalité des dimensions, $\text{Im } A^2 = \text{Ker } A$.

Considérons donc une base $(e_1, \dots, e_n)$ de $\text{Im } A^2$. Il existe donc des vecteurs $(g_1, \dots, g_n)$ tels que $A^2 g_i = e_i$ pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. On pose alors $f_i = A g_i$ pour tout i et on note $\mathcal{B}$ la famille $(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n)$. Il ne reste plus qu'à justifier qu'il s'agit d'une famille libre de $\mathbb{K}^{3n}$, et donc d'une base de $\mathbb{K}^{3n}$, pour conclure car alors la matrice dans cette base sera de la forme voulue.

Etant donnés $(\lambda_i)_{i \in \llbracket 1; 3n \rrbracket}$ tels que

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n + \lambda_{n+1} f_1 + \dots + \lambda_{2n} f_n + \lambda_{2n+1} g_1 + \dots + \lambda_{3n} g_n = 0$$

on obtient en multipliant par A et A^2 les relations

$$\lambda_{n+1} e_1 + \dots + \lambda_{2n} e_n + \lambda_{2n+1} f_1 + \dots + \lambda_{3n} f_n = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_{2n+1} e_1 + \dots + \lambda_{3n} e_n = 0$$

La liberté de la famille $(e_1, \dots, e_n)$ assure successivement la nullité de $\lambda_{2n+1}, \dots, \lambda_{3n}$, puis $\lambda_{n+1}, \dots, \lambda_{2n}$ et enfin $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. On peut donc conclure :

Les espaces $\text{Im } A^2$ et $\text{Ker } A$ sont égaux et il existe une base de $\mathbb{K}^{3n}$ dans laquelle la matrice de A est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & I_n & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

13

(**)

Mines PC 2008

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer le rang de l'endomorphisme $M \mapsto AM$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Méthode 1 : Notons r le rang de A . Alors, il existe deux matrices inversibles P et Q telles que $A = PJ_r Q$ où J_r est la matrice dont les r premiers coefficients diagonaux valent 1 et tous les autres sont nuls. Dès lors, on peut remarquer qu'en notant $\varphi_A : M \mapsto AM$, on a

$$\varphi_A = \varphi_P \circ \varphi_{J_r} \circ \varphi_Q$$

Les endomorphismes φ_Q et φ_P sont bijectifs, d'inverses $\varphi_{Q^{-1}}$ et $\varphi_{P^{-1}}$ donc ils ne modifient pas le rang de φ_{J_r} . Pour déterminer de dernier, on remarque que $\text{Im } \varphi_{J_r}$ est l'ensemble des matrices dont les $n - r$ dernières lignes sont nulles. Ainsi, le rang de φ_{J_r} est égal à la dimension de cet espace soit nr ou encore $n \text{rg } A$. Au final,

Le rang de $M \mapsto AM$ est égal à $n \text{rg } A$.

Méthode 2 : Déterminons Pour tous $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a

$$\varphi(E_{i,j}) = \left(\sum_{1 \leq p, q \leq n} a_{p,q} E_{p,q} \right) \cdot E_{i,j} = \sum_{1 \leq p, q \leq n} a_{p,q} \delta_{q,i} E_{p,j} = \sum_{p=1}^n a_{p,i} E_{p,j}$$

Cette égalité assure que la matrice de φ respectivement à la base canonique ordonnée dans le sens

$$\text{Can} = (E_{1,1}, E_{2,1}, \dots, E_{n,1}, E_{1,2}, \dots, E_{n,2}, \dots, E_{n,n})$$

est de la forme

$$\text{Mat}_{\text{Can}}(\varphi) = \begin{pmatrix} A & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & A \end{pmatrix}$$

Si l'on note r le rang de A , alors ses vecteurs colonnes engendrent un espace de dimension r . Il est alors clair que ceux de A engendrent un espace de dimension $n \cdot r$. Par suite,

$$\boxed{\text{Le rang de } M \mapsto AM \text{ est égal à } n \text{ rg } A.}$$

14 _____ (**) _____ **Centrale PC 2008**

Soit $\alpha \in \mathbb{N}, \alpha \geq 2$.

(a). Justifier l'existence et l'unicité d'une suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout entier p ,

$$(1+x)^{1/\alpha} \underset{x \rightarrow 0}{=} a_0 + a_1 x + \dots + a_p \cdot x^p + o(x^p)$$

Déterminer cette suite.

Soit $p \in \mathbb{N}$ fixé. On note $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k$

(b). Montrer que $P^\alpha - 1 - X$ est divisible par X^{p+1} .

(c). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente. Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A + I_n = B^\alpha$.

(d). Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Existe-t-il nécessairement une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $B^\alpha = A$?

(a). L'application $x \mapsto (1+x)^{1/\alpha}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $I =]-1; +\infty[$ donc elle admet un développement limité à tout ordre en tout point de I (notamment en 0) et ce dernier est unique. Précisément au voisinage de 0, on a pour tout entier p

$$\boxed{(1+x)^{1/\alpha} = 1 + \frac{1}{\alpha} x + \dots + \prod_{k=0}^{p-1} \left(\frac{1}{\alpha} - k \right) \frac{x^p}{p!} + o(x^p)}$$

(b). Par définition, on a $(1+x)^{1/\alpha} = P(x) + o(x^p)$

En élevant ce DL à la puissance α , il vient puisque $P(x) = O(1)$ au voisinage de 0,

$$1+x = (P(x) + o(x^p))^\alpha = P(x)^\alpha + o(x^p) \quad \text{soit} \quad P(x)^\alpha - 1 - x = o(x^p)$$

Un polynôme non nul étant équivalent en 0 à son terme de plus petit degré, on en déduit que $P^\alpha - 1 - X$ est soit nul, soit de la forme $a_r X^r + \dots + a_d X^d$ avec $r \geq p+1$. En particulier,

$$\boxed{P^\alpha - 1 - X \text{ est divisible par } X^{p+1}.}$$

(c). Il suffit de poser $B = P(A)$, P étant défini comme dans la question précédente avec p tel que $A^p = 0$. On sait qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P^\alpha - 1 - X = QX^{p+1}$ et ainsi

$$B^\alpha = P(A)^\alpha = I_n + A + Q(A)A^{p+1} = I_n + A$$

$$\boxed{\text{Il existe } B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } B^\alpha = I_n + A.}$$

(d). Il suffit de prendre A réelle de déterminant négatif et α entier pair. S'il existait B tel que $B^\alpha = A$, on aurait notamment $(\det B)^\alpha = \det A$ mais $(\det B)^\alpha > 0$ ce qui est absurde. Ainsi,

$$\boxed{\text{Il n'existe pas nécessairement } B \text{ telle que } B^\alpha = A \text{ pour une matrice } A \text{ arbitraire dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).}$$

15 _____ (**) _____ **Petites Mines PC 2019**

Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A + A^{-1} = I_n$$

Calculer $A^k + A^{-k}$ pour tout entier k où l'on note $A^{-k} = (A^{-1})^k$.

En élevant l'égalité au carré, il vient

$$A^2 + 2I_n + A^{-2} = I_n \quad \text{soit} \quad A^2 + A^{-2} = -I_n$$

En multipliant cette égalité par la première, il vient

$$-I_n = (A + A^{-1}) \cdot (A^2 + A^{-2}) = A^3 + A + A^{-1} + A^{-3}$$

et donc

$$A^3 + A^{-3} = -2I_n$$

Montrons par récurrence sur k que pour tout entier k , il existe un réel a_k tel que $A^k + A^{-k} = a_k I_n$.

- La propriété est vraie jusqu'au rang 3 avec $a_0 = 2$, $a_1 = 1$, $a_2 = -1$ et $a_3 = -2$.
- Supposons la propriété vraie au rang $k \geq 3$. Alors, d'une part

$$(A^k + A^{-k}) \cdot (A + A^{-1}) = a_k I_n \cdot I_n = a_k I_n$$

et d'autre part

$$(A^k + A^{-k}) \cdot (A + A^{-1}) = A^{k+1} + A^{-(k+1)} + A^{k-1} + A^{-(k-1)} = A^{k+1} + A^{-(k+1)} + a_{k-1} I_n$$

soit

$$A^{k+1} + A^{-(k+1)} = (a_k - a_{k-1}) I_n$$

Il suffit donc de poser $a_{k+1} = a_k - a_{k-1}$ pour obtenir la relation souhaitée.

Par récurrence, on en déduit donc que $\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^k + A^{-k} = a_k I_n$

où la suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 définie par

$$a_0 = 2 \quad a_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad a_{k+2} = a_{k+1} - a_k$$

L'équation caractéristique de la récurrence est donnée par

$$r^2 - r + 1 = 0$$

de racines

$$r_1 = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\pi/3} \quad \text{et} \quad r_2 = \overline{r_1} = e^{-i\pi/3}$$

Il existe donc deux complexes λ et μ tels que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_k = \lambda e^{ik\pi/3} + \mu e^{-ik\pi/3}$$

Les valeurs de la suite pour $k = 0$ et $k = 1$ donnent le système

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 2 \\ \lambda e^{i\pi/3} + \mu e^{-i\pi/3} = 1 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} \lambda(e^{-i\pi/3} - e^{i\pi/3}) = 2e^{-i\pi/3} - 1 \\ \mu(e^{-i\pi/3} - e^{i\pi/3}) = 1 - 2e^{i\pi/3} \end{cases}$$

soit après simplifications

$$\lambda = \mu = 1$$

Finalement

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad a_k = e^{ik\pi/3} + e^{-ik\pi/3} = 2 \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right)$$

et donc

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^k + A^{-k} = 2 \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) I_n}$$

16

(*)

Calculer le déterminant de la matrice de taille n et de coefficient d'indice (i, j) égal à $|i - j|$.

On commence par supposer $n \geq 3$. Notons $A = (|i - j|)_{1 \leq i, j \leq n}$. Alors

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & (n-1) \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 2 & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ (n-1) & \cdots & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

On commence par ajouter la dernière ligne à la première. On obtient

$$\det A = \begin{vmatrix} (n-1) & (n-1) & (n-1) & \cdots & (n-1) \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & (n-2) \\ 2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ (n-1) & \cdots & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & (n-2) \\ 2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ (n-1) & \cdots & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Dès lors, il suffit d'appliquer les opérations élémentaires $L_i \leftarrow L_i - L_{i-1} - L_1$ pour i décroissant de n à 3, et enfin $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ pour être ramené à une matrice triangulaire supérieure, précisément,

$$\det A = (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & \star & \cdots & \star \\ \vdots & \ddots & -2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

Finalement,

$$\boxed{\det A = -(n-1)(-2)^{n-2}}$$

On remarquera pour finir par un calcul élémentaire que la formule reste vraie pour $n = 1$ ou $n = 2$.

17 _____ (*) _____

Soit $a, b \in K$ et $n \geq 2$. Calculer le déterminant de la matrice de taille n suivante :

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ a & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a & b \end{pmatrix}$$

Pour tout $n \geq 2$, on effectue un développement par rapport à la première colonne de $\det A_n$. Il vient

$$\det A_n = \begin{vmatrix} b & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a & b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a & b \end{vmatrix} - a \begin{vmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ a & b & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a & b \end{vmatrix}$$

où les matrices sont cette fois de taille $n-1$. On a donc la relation de récurrence, en notant $\Delta_n = \det A_n$ et par convention $A_1 = (1)$,

$$\forall n \geq 2, \quad \Delta_n = b^{n-1} - a\Delta_{n-1}$$

Lorsque $a = 0$, on obtient directement $\Delta_n = b^{n-1}$. Sinon, si l'on note $\delta_n = \Delta_n / (-a)^n$, cette relation se réécrit

$$\forall n \geq 2, \quad \delta_n - \delta_{n-1} = \frac{-1}{a} \left(\frac{-b}{a} \right)^{n-1}$$

En sommant cette relation, on obtient finalement par télescopage,

$$\delta_n = \delta_1 - \frac{1}{a} \sum_{k=2}^n \left(\frac{-b}{a} \right)^{k-1}$$

Or, le terme δ_1 est égal à $-1/a$ donc finalement,

$$\boxed{\det A_n = (-a)^{n-1} \sum_{k=1}^n \left(\frac{-b}{a} \right)^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} b^k (-a)^{n-1-k}}$$

18 _____ (**) _____ **Mines PC 2019**

Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ des complexes et $\omega = e^{2i\pi/n}$. On note $P = a_1 + a_2X + \cdots + a_nX^{n-1}$ et on définit les matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_n & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_3 \\ a_3 & \ddots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_n & a_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \cdots & \omega^{(n-1)^2} \end{pmatrix}$$

Calculer AM et en déduire $\det A$. On exprimera le résultat à l'aide de P .

Commençons par remarquer que pour tous $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$,

$$A_{i,j} = \begin{cases} a_{j-i+1} & \text{si } j \geq i \\ a_{n+j-i+1} & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad M_{i,j} = \omega^{(i-1)(j-1)}$$

Rappelons également que $\omega^n = 1$. Par produit matriciel, pour tous $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$,

$$\begin{aligned} (A \cdot M)_{i,j} &= \sum_{k=1}^n A_{i,k} M_{k,j} \\ &= \sum_{k=1}^{i-1} a_{n+k-i+1} \omega^{(k-1)(j-1)} + \sum_{k=i}^n a_{k-i+1} \omega^{(k-1)(j-1)} \end{aligned}$$

Effectuons les changements de variable $p = n + k - i + 1$ dans la première somme et $p = k - i + 1$ dans la deuxième. On obtient

$$(A \cdot M)_{i,j} = \sum_{p=n-i+2}^n a_p \omega^{(p+i-n-2)(j-1)} + \sum_{p=1}^{n-i+1} a_p \omega^{(p+i-2)(j-1)}$$

Notons ensuite que

$$\begin{aligned} \omega^{(p+i-n-2)(j-1)} &= \omega^{(p-1)(j-1)} \cdot \omega^{(i-1)(j-1)} \cdot (\omega^n)^{j-1} \\ &= \omega^{(p-1)(j-1)} \cdot \omega^{(i-1)(j-1)} \\ \omega^{(p+i-2)(j-1)} &= \omega^{(p+i-2)(j-1)} \end{aligned}$$

ce qui permet de rassembler les deux sommes en une :

$$(A \cdot M)_{i,j} = \sum_{p=1}^n a_p \omega^{(p-1)(j-1)} \cdot \omega^{(i-1)(j-1)} = P(\omega^{j-1}) \cdot \omega^{(i-1)(j-1)}$$

Pour résumer,

Si l'on note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de la matrice M , alors

$$(A \cdot M) = [P(1) \cdot C_1, P(\omega) \cdot C_2, \dots, P(\omega^{n-1}) \cdot C_n]$$

Par multilinéarité du déterminant, on peut donc en déduire que

$$\det(A \cdot M) = P(1) \cdot P(\omega) \cdots P(\omega^{n-1}) \cdot \det[C_1, \dots, C_n] = P(1) \cdot P(\omega) \cdots P(\omega^{n-1}) \det M$$

Or,

$$\det(A \cdot M) = \det A \cdot \det M$$

et M est une matrice de vandermonde associée à la famille des n racines de l'unités $1, \omega, \dots, \omega^{n-1}$ qui sont 2 à 2 distinctes. Elle est donc inversible et son déterminant non nul. En simplifiant par $\det M$, il vient pour finir

$$\det A = P(1) \cdot P(\omega) \cdots P(\omega^{n-1}) = \prod_{k=0}^{n-1} P(\omega^k)$$

Remarque : L'allure de $A \cdot M$ se visualise beaucoup plus facilement sur un dessin, ce qui peut suffire le jour de l'oral. Une autre solution (plus classique) pour calculer le déterminant de A consiste à remarquer que A se décompose en

$$A = a_1 I_n + a_2 J + \cdots + a_{n-1} J^{n-1}$$

où J est la matrice circulante définie par

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \ddots & & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et utiliser ensuite la diagonalisabilité de cette dernière : son polynôme caractéristique est $X^n - 1$ qui est scindé à racines simples et ses racines sont les racines n -ièmes de l'unité.

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, $u \in E$ et $\varphi : E \rightarrow \mathbb{K}$ une application linéaire. On définit $f : x \mapsto \varphi(x)u$. Montrer que $\det(I_d + f) = 1 + \varphi(u)$.

Si u est nul, alors f est nulle et le résultat est évident. On suppose donc u non nul et on complète $\{u\}$ en une base $\mathcal{B} = \{u, e_2, \dots, e_n\}$ de E . La matrice de $I_d + f$ dans cette base est alors donnée par

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 + \varphi(u) & \varphi(e_2) & \cdots & \cdots & \varphi(e_n) \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On reconnaît une matrice triangulaire supérieure dont le déterminant est égal au produit des éléments diagonaux. Ainsi,

$$\det(I_d + f) = \det \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi) = 1 + \varphi(u)$$

20

(**)

(a). A l'aide du calcul du déterminant d'une matrice triangulaire par blocs, montrer que

$$\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad \det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A + B) \det(A - B)$$

(b). Généraliser à $\det \begin{pmatrix} A & B & C \\ C & A & B \\ B & C & A \end{pmatrix}$ avec A, B, C quelconques dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

(a). Notons $M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$ la matrice de l'énoncé. On effectue les opérations élémentaires $L_{i+n} \leftarrow L_{i+n} + L_i$ pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Ainsi,

$$\det M = \det \begin{pmatrix} A & B \\ A + B & A + B \end{pmatrix}$$

Après quoi, on effectue les opérations $C_i \leftarrow C_i - C_{i+n}$ et on a

$$\det M = \det \begin{pmatrix} A - B & B \\ 0 & A + B \end{pmatrix}$$

On est ramené à un déterminant de matrice triangulaire supérieure par blocs, ce qui permet de conclure

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} = \det(A + B) \det(A - B)$$

(b). On note $N \in \mathcal{M}_{3n}(\mathbb{K})$ la matrice de l'énoncé. Effectuons dans un premier temps les opérations élémentaires $C_i \leftarrow C_i + C_{i+n} + C_{i+2n}$ pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, En notant $D = A + B + C$, cela donne

$$\det N = \begin{vmatrix} D & B & C \\ D & A & B \\ D & C & A \end{vmatrix}$$

On peut alors retrancher la ligne L_i à L_{i+n} et L_{i+2n} pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Ainsi,

$$\det N = \begin{vmatrix} D & B & C \\ 0 & A - B & B - C \\ 0 & C - B & A - C \end{vmatrix}$$

On va maintenant chercher à annuler par opérations élémentaires le bloc d'indice $(3, 2)$. Notons $j = \exp(2i\pi/3)$ de sorte que $1 + j + j^2 = 0$. On effectue les opérations $C_i \leftarrow C_i - j^2 L_{i+n}$ pour $i \in \llbracket n + 1; 2n \rrbracket$, puis $L_i \leftarrow L_i + j^2 L_{i-n}$ pour $i \in \llbracket 2n + 1; 3n \rrbracket$. Il vient successivement

$$\det N = \begin{vmatrix} D & B - j^2 C & C \\ 0 & A + jB + j^2 C & B - C \\ 0 & -j^2 A - B - jC & A - C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} D & B - j^2 C & C \\ 0 & A + jB + j^2 C & B - C \\ 0 & 0 & A + j^2 B + jC \end{vmatrix}$$

Cette dernière forme étant triangulaire supérieure par blocs, on peut conclure :

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ C & A & B \\ B & C & A \end{vmatrix} = \det(A + B + C) \det(A + jB + j^2 C) \det(A + j^2 B + jC)$$

21

(**)

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \geq 1$. Montrer que la famille $(P(X), P(X+1), \dots, P(X+n))$ est libre dans $\mathbb{K}[X]$.

Soit x un réel arbitraire et $p \in \mathbb{N}$. Appliquons la formule de Taylor pour P entre $x+b$ et x Il vient

$$P(x+p) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(x)}{k!} p^k$$

Cette égalité étant valable quel que soit x , on en déduit l'égalité polynomiale

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad P(X+p) = \sum_{k=0}^n \frac{p^k}{k!} P^{(k)}$$

Or, la famille $\mathcal{B} = (P, P', \dots, P^{(n)})$ est échelonnée en degré donc c'est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ et la matrice de la famille $\mathcal{F} = (P(X), \dots, P(X+n))$ dans cette base est

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0^1 & 1^1 & 2^1 & \cdots & n^1 \\ 0^2 & 1^2/2 & 2^2/2 & \cdots & n^2/2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0^n & 1^n/n! & 2^n/n! & \cdots & n^n/n! \end{pmatrix}$$

Par multilinéarité, son déterminant se ramène à un déterminant de Vandermonde. En effet,

$$\det \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \frac{1}{\prod_{k=1}^n k!} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 0^1 & 1^1 & 2^1 & \cdots & n^1 \\ 0^2 & 1^2 & 2^2 & \cdots & n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0^n & 1^n & 2^n & \cdots & n^n \end{vmatrix} = \frac{\prod_{0 \leq i < j \leq n} (j-i)}{\prod_{k=1}^n k!} = 1$$

Puisque son déterminant est non nul, il vient d'après le cours que

La famille $(P(X), \dots, P(X+n))$ est libre.

22

(**)

Mines PC 2008

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de vecteurs colonnes $C_1, \dots, C_n$. On définit M' de vecteurs colonnes $C'_1, \dots, C'_n$ définis par

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad C'_i = \sum_{j \neq i} C_j$$

Exprimer le déterminant de M' en fonction de celui de M .

Notons $J = \sum_{k=1}^n C_k$. Alors,

$$\det M' = \det[J - C_1, \dots, J - C_n]$$

On peut développer ce déterminant par multilinéarité. En utilisant le caractère alterné du déterminant, seuls $n+1$ termes sont non nuls, précisément,

$$\det M' = \det[-C_1, \dots, -C_n] + \sum_{k=1}^n \det[-C_1, \dots, -C_{k-1}, J, -C_{k+1}, \dots, -C_n]$$

Toujours par multilinéarité, on a

$$\det[-C_1, \dots, -C_n] = (-1)^n \det[C_1, \dots, C_n] = (-1)^n \det M$$

Par ailleurs, pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, en ajoutant toutes les colonnes à la k -ième, il vient

$$\det[-C_1, \dots, -C_{k-1}, J, -C_{k+1}, \dots, -C_n] = \det[-C_1, \dots, -C_{k-1}, C_k, -C_{k+1}, \dots, -C_n] = (-1)^{n-1} \det M$$

Ainsi,

$$\det M' = (-1)^{n-1} (n-1) \det M$$

23

(**)

Notons $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et considérons $f_1, \dots, f_n \in E$ formant une famille libre. Montrer qu'il existe $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ tels que la matrice $(f_i(x_j))_{i,j \in \llbracket 1;n \rrbracket}$ soit inversible.

On raisonne par récurrence sur n . Pour $n = 1$, il s'agit de montrer que si $\{f_1\}$ est libre, soit si f_1 est non nulle, il existe x_1 tel que $f_1(x_1) \neq 0$, ce qui est immédiat.

Supposons maintenant le résultat vrai pour toute famille de n éléments. On raisonne par contraposée en considérant une famille $\{f_1, \dots, f_{n+1}\}$ telle que

$$\forall x_1, \dots, x_{n+1}, \quad \begin{vmatrix} f_1(x_1) & \cdots & f_1(x_n) & f_1(x_{n+1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f_n(x_1) & \cdots & f_n(x_n) & f_n(x_{n+1}) \\ f_{n+1}(x_1) & \cdots & f_{n+1}(x_n) & f_{n+1}(x_{n+1}) \end{vmatrix} = 0 \quad (*)$$

On veut montrer que $\{f_1, \dots, f_{n+1}\}$ est liée. Si la famille $\{f_1, \dots, f_n\}$ est liée, c'est terminée. Sinon, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence et en déduire l'existence de $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tels que

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_1(\alpha_1) & \cdots & f_1(\alpha_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n(\alpha_1) & \cdots & f_n(\alpha_n) \end{vmatrix} = 0$$

On applique alors la propriété $(*)$ avec $(x_1, \dots, x_n) = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et $x_{n+1} = x$ arbitraire dans $\mathbb{R}$, puis on développe ce déterminant par rapport à la dernière colonne. Il vient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+n+1} f_k(x) \Delta_k = 0$$

où Δ_k est le déterminant obtenu en supprimant la dernière colonne et la k -ième ligne de la matrice $(f_i(x_j))_{i,j \in \llbracket 1;n+1 \rrbracket}$. En particulier, Δ_k est une quantité indépendante de x , et Δ_{n+1} est le déterminant Δ non nul ci-dessus. On peut donc écrire

$$f_{n+1} = \frac{1}{\Delta_{n+1}} \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \Delta_k f_k$$

ce qui prouve que f_{n+1} est combinaison linéaire de $f_1, \dots, f_n$ et ainsi que la famille est liée. La propriété est donc vraie au rang $n+1$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par principe de récurrence.

Si $\{f_1, \dots, f_n\}$ est une famille libre, il existe $x_1, \dots, x_n$ tels que $(f_i(x_j))_{i,j \in \llbracket 1;n \rrbracket}$ est inversible.

24 _____ (*) _____ **CCP PC 2019**

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $p = f \circ g$. On suppose que p est de rang 2. Déterminer le rang de f et le rang de g .

Par définition, $\text{rg } p = \dim \text{Im } p = \dim p(\mathbb{R}^3) = \dim (f(g(\mathbb{R}^3)))$

Rappelons que pour toute application linéaire $u : E \rightarrow F$, le théorème du rang donne

$$\dim E = \dim \text{Im } u + \dim \text{Ker } u \quad \text{d'où} \quad \dim \text{Im } u = \dim u(E) \leq \dim E$$

Ici, on a donc $2 = \text{rg } p = \dim (f(g(\mathbb{R}^3))) \leq \dim (g(\mathbb{R}^3))$

Mais $g(\mathbb{R}^3)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ donc de dimension au plus 2. Il est donc de dimension 2 exactement par encadrement (et donc égal à $\mathbb{R}^2$), ce qui prouve que g est de rang 2. L'égalité initiale devient donc

$$\dim (f(\mathbb{R}^2)) = 2$$

ce qui prouve que f est également de rang 2. Finalement,

Les 2 endomorphismes f et g sont de rang 2.

25 _____ (*) _____

- (a) Soient F, G deux sevs d'un ev E de dimension n . On suppose que $\dim F + \dim G$ est strictement supérieur à n . Montrer que $F \cap G \neq \{0\}$.
- (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et F un sous-espace vectoriel de dimension k de $\mathbb{K}^n$. Justifier qu'il existe un vecteur non nul de F dont les $k-1$ premières coordonnées sont nulles.

(a). D'après la formule de Grassmann, on a

$$\dim(F \cap G) = \dim F + \dim G - \dim(F + G)$$

Or $\dim F + \dim G > n$ et $\dim(F + G) \leq n$ puisque $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E . Dès lors, $\dim(F \cap G) > 0$ et donc

$$F \cap G \neq \{0\}$$

(b). Notons G le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ constitué des vecteurs dont les $k - 1$ premières coordonnées sont nulles. En notant $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$, on a donc

$$G = \text{Vect}(e_k, \dots, e_n) \quad \text{et} \quad \dim G = n - k + 1 \quad \text{d'où} \quad \dim F + \dim G = n + 1 > n$$

D'après le résultat de la question précédente, $F \cap G \neq \{0\}$, ce qui signifie que F contient un élément de G non nul. En d'autres termes,

$$\boxed{\text{Il existe un vecteur non nul de } F \text{ dont les } k - 1 \text{ premières coordonnées sont nulles.}}$$

26

(**)

Soit E un espace vectoriel de dimension n et u un endomorphisme de E tel que $u^n = 0$. Montrer que u est de rang $n - 1$ si et seulement si u^{n-1} est non nul.

$\Rightarrow$ En vertu du théorème du rang, $\text{Ker } u$ est de dimension 1. Justifions maintenant pour tous endomorphismes v et w de E l'inégalité

$$\dim \text{Ker}(v \circ w) \leq \dim \text{Ker } v + \dim \text{Ker } w$$

On applique pour cela le théorème du rang à la restriction de v à $\text{Im } w$. L'image de cet endomorphisme est égal à $\text{Im}(v \circ w)$ et son noyau est égal à $\text{Im } w \cap \text{Ker } v$. Par suite,

$$\dim(\text{Im } w \cap \text{Ker } v) + \text{rg}(v \circ w) = \text{rg } w$$

En appliquant à nouveau le théorème du rang à v et $v \circ w$, cette égalité se réécrit

$$\dim \text{Ker}(v \circ w) = \dim(\text{Im } w \cap \text{Ker } v) + \dim \text{Ker } w$$

et l'inégalité s'ensuit car $\text{Im } w \cap \text{Ker } v \subset \text{Ker } v$. En appliquant ce résultat, il vient par récurrence immédiate

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \dim \text{Ker } u^k \leq k$$

et notamment $\dim \text{Ker } u^{n-1} \leq n - 1$ d'où $\text{Ker } u^{n-1} \neq E$ et donc

$$\boxed{u^{n-1} \neq 0}$$

$\Leftarrow$ Par hypothèse, on peut trouver $e \in E$ tel que $u^{n-1}(e) \neq 0$ (et donc $u^n(e) = 0$). Un exercice très classique pour qu'alors $\mathcal{B} = (e, u(e), \dots, u^{n-1}(e))$ est une famille libre donc une base de E . Ainsi,

$$\text{Im } u = u(\mathcal{B}) = \text{Vect}\{u(e), \dots, u^{n-1}(e)\}$$

L'image $\text{Im } u$ est donc engendré par une famille libre à $n - 1$ éléments ce qui prouve qu'il est de dimension $n - 1$.

$$\boxed{\text{L'endomorphisme } u \text{ est de rang } n - 1.}$$

27

(**)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et F, G deux sous-espaces vectoriels de E . A quelle condition existe-t-il un endomorphisme u de E tel que $F = \text{Ker } u$ et $G = \text{Im } u$?

Une condition nécessaire pour l'existence de f est la condition $\dim F + \dim G = \dim E$ en vertu du théorème du rang. Vérifions que c'est une condition suffisante. Notons p la dimension de F et considérons $(f_1, \dots, f_p)$ une base de F et $(g_{p+1}, \dots, g_n)$ une base de G . On complète ces familles libres en deux bases $(f_1, \dots, f_n)$ et $(g_1, \dots, g_n)$ de E . Soit u l'unique endomorphisme défini par

$$\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, \quad u(f_i) = 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket p+1; n \rrbracket, \quad u(f_i) = g_i$$

Par construction, on a clairement l'inclusion $F \subset \text{Ker } u$ et

$$\text{Im } u = \text{Vect}\{u(f_1), \dots, u(f_n)\} = \text{Vect}\{g_{p+1}, \dots, g_n\} = G$$

L'égalité entre F et $\text{Ker } u$ se démontre alors soit « à la main », ou par un argument de dimension (via le théorème du rang).

Il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $F = \text{Ker } u$ et $G = \text{Im } u$ si et seulement si $\dim F + \dim G = \dim E$.

28

(*)

Soit E, F, G trois espaces vectoriels, de dimensions respectives p, q, r , $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$, et $w = v \circ u$.

- (a). Soit v_1 la restriction de v à $\text{Im } u$. Déterminer $\text{Ker } v_1$ et $\text{Im } v_1$ en fonction de u, v et w .
- (b). Montrer que $\text{rg } u + \text{rg } v \leq q + \text{rg } w$. L'inégalité peut-elle être stricte ?

- (a). On vérifie facilement que

$$\text{Ker } v_1 = \text{Ker } v \cap \text{Im } u \quad \text{et} \quad \text{Im } v_1 = \text{Im } (w)$$

- (b). En appliquant le théorème du rang à v_1 , on obtient

$$\text{rg } w + \dim(\text{Ker } v \cap \text{Im } u) = \text{rg } u$$

Par ailleurs,

$$\dim(\text{Ker } v \cap \text{Im } u) \leq \dim \text{Ker } v = \dim F - \text{rg } v$$

En réinjectant cette inégalité dans ce qui précède, on obtient immédiatement le résultat

$$\text{rg } u + \text{rg } v \leq q + \text{rg } w$$

L'inégalité est stricte dès lors que $\text{Ker } v \cap \text{Im } u$ est strictement inclus dans $\text{Ker } v$ ce qui a lieu dès lors que $\text{Ker } v$ n'est pas inclus dans $\text{Im } u$. Il suffit par exemple de prendre u nul et v non injectif pour cela.

29

(**)

Soit E un espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels.

- (a). Justifier que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.
- (b). On suppose que E est de dimension finie et que $\dim F = \dim G$. Montrer en raisonnant par récurrence décroissante sur la dimension commune, que F et G ont un supplémentaire commun.

- (a). On raisonne par l'absurde. Supposons que $F \cup G$ est un espace vectoriel avec F non inclus dans G et réciproquement. Soit $x \in F \subset G$ et $y \in G \subset F$. Alors, $x \in F \cup G$ de même que y donc $x + y \in F \cup G$. Si $x + y \in F$, alors on peut écrire $y = (x + y) - x$ ce qui prouve que $y \in F$ car F est un sous-espace vectoriel. C'est contraire à nos hypothèses. Le cas $x + y \in G$ se traite de la même manière et aboutit aussi à une absurdité. Au final,

$$F \cup G \text{ n'est un sous-espace vectoriel que si } F \subset G \text{ ou } G \subset F.$$

- (b). Notons n la dimension de E et k la dimension commune de F et G . Effectuons une récurrence décroissante sur $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Si $k = n$, alors $F = G = E$ et il suffit de prendre $\{0\}$ comme supplémentaire commun.

Supposons maintenant le résultat vrai pour tous sous-espaces vectoriels F et G de dimension $k+1$ avec k dans $\llbracket 0; n-1 \rrbracket$. On considère F et G de dimension k . On les suppose distincts sans quoi le résultat est évident. Dès lors, on ne peut avoir l'un inclus dans l'autre puisqu'alors, l'égalité des dimensions amènerait à une absurdité. Le résultat de la question (a) assure donc que $F \cup G$ n'est pas un espace vectoriel, et notamment est distinct de E .

On peut donc introduire un vecteur x qui n'appartient ni à F , ni à G puis poser $F' = F \oplus \text{Vect } \{x\}$ et $G' = G \oplus \text{Vect } \{x\}$. Ces deux espaces sont de dimensions $k+1$ donc admettent un supplémentaire commun H par hypothèse de récurrence. On vérifie alors facilement que $H \oplus \text{Vect } \{x\}$ est un supplémentaire commun à F et G , ce qui prouve la propriété au rang k . Par récurrence décroissante, il s'ensuit que le résultat est vrai quel que soit la dimension commune de F et G .

Deux sous-espaces vectoriels de même dimension admettent au moins un supplémentaire commun.

30

(**)

Montrer tout endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie peut s'écrire comme composée d'un projecteur et d'un automorphisme.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie. On munit E d'une base de $\text{Ker } u$, notée $(e_1, \dots, e_k)$, que l'on complète en une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Alors, $(u(e_{k+1}), \dots, u(e_n))$ est une base de $\text{Im } u$ que l'on peut compléter en une nouvelle base de E , notée $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_k, u(e_{k+1}), \dots, u(e_n))$. On peut maintenant définir deux endomorphismes p et a de la manière suivante :

$$\forall i \in \llbracket 1; k \rrbracket, \quad p(e_i) = 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket k+1; n \rrbracket, \quad p(e_i) = e_i$$

puis $\forall i \in \llbracket 1; k \rrbracket, \quad a(e_i) = f_i \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket k+1; n \rrbracket, \quad a(e_i) = u(e_i)$

Il est clair que par construction, on a $(a \circ p)(e_i) = u(e_i)$ et $(p \circ p)(e_i) = p(e_i)$ pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. L'endomorphisme p est bien un projecteur et $u = a \circ p$. De plus, a envoie la base $\mathcal{B}$ sur la base $\mathcal{B}'$ donc a est un automorphisme. On a donc justifié que

Tout endomorphisme est la composée d'un projecteur et d'un automorphisme.

31 _____ (**) _____ **Mines PC 2011**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Déterminer les endomorphismes nilpotents u de E tels que tout sous-espace vectoriel stable par u admette un supplémentaire stable par u .

Soit u nilpotent tel que tout sous-espace vectoriel stable par u admette un supplémentaire stable par u . En particulier, $\text{Ker } u$ étant stable par u , il admet un supplémentaire H stable. Considérons $x \in H$. L'endomorphisme u étant nilpotent, on peut trouver un entier $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^r = 0$ et donc $u^r(x) = 0$. Soit r_0 le plus petit entier tel que $u^{r_0}(x) = 0$. Si $r_0 \geq 1$, alors par définition :

- $u^{r_0-1}(x)$ est non nul, par définition de r_0 ,
- $u^{r_0-1}(x)$ appartient à H , par stabilité de H par u ,
- $u^{r_0-1}(x)$ appartient à $\text{Ker } u$ car $u^{r_0}(x) = 0$.

Ces trois propriétés contredisent le fait que H et $\text{Ker } u$ soient supplémentaires. On a donc $r_0 = 0$ et $x = 0$. Ainsi, $H = \{0\}$ et $\text{Ker } u = \mathbb{K}^n$. En d'autres termes, u est nul. La réciproque étant évidente,

L'endomorphisme nul est l'unique endomorphisme nilpotent pour lequel tout sous-espace vectoriel stable admet un supplémentaire stable.

32 _____ (**) _____ **Mines PC 2011**

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB - BA$ soit de rang 1. Montrer que $(AB - BA)^2 = 0$.

Notons $C = AB - BA$. Alors C est de rang 1 donc son noyau est de dimension $n - 1$. De plus,

$$\text{Tr } C = \text{Tr } (AB) - \text{Tr } (BA) = 0$$

Notons maintenant c l'endomorphisme canoniquement associé à C . On choisit une base $(e_1, \dots, e_{n-1})$ de $\text{Ker } c$, que l'on complète en une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$. Dans cette base, la matrice de c est de la forme

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(c) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & c_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & c_{n,n} \end{pmatrix}$$

Mais C (et donc c) étant de trace nulle, cette nouvelle matrice est également de trace nulle, ce qui implique $c_{n,n} = 0$. Dès lors, un calcul immédiat montre que le carré de la matrice ci-dessus est nul. Il s'ensuit que $c^2 = 0$, d'où $C^2 = 0$, et ainsi,

$$(AB - BA)^2 = 0$$

33 _____ (**) _____ **Mines PC 2011**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E . Montrer que $f^2 = 0$ si et seulement si il existe deux endomorphismes g et h tels que $f = g \circ h$ et $h \circ g = 0$.

$\Leftarrow$ S'il existe g et h tels que $h \circ g = 0$ et $g \circ h = f$, alors par associativité de la composition,

$$f^2 = (g \circ h)^2 = g \circ \underbrace{(h \circ g)}_0 \circ h = 0$$

$\Rightarrow$ Soit f un endomorphisme de E tel que $f^2 = 0$. Cela signifie que $\text{Im } f$ est inclus dans $\text{Ker } f$. Pour trouver g et h tels que $f = g \circ h$ et $h \circ g = 0$, prenons $h = f$ et g un projecteur quelconque sur $\text{Im } f$. Vérifions que ce choix convient.

- Par définition, $\text{Im } g = \text{Im } f \subset \text{Ker } f = \text{Ker } h$, et ainsi $h \circ g = 0$.
- Par ailleurs, pour x quelconque dans E , on a $h(x) = f(x) \in \text{Im } f$. Puisque g est un projecteur sur $\text{Im } f$, il vient $g(f(x)) = f(x)$ soit $(g \circ h)(x) = f(x)$. Ceci étant vrai pour x arbitraire, on a bien $g \circ h = f$.

On peut donc conclure :

Un endomorphisme f vérifie $f^2 = 0$ si et seulement si il existe deux endomorphismes h et g tels que $f = g \circ h$ et $h \circ f = 0$.