

I. RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

- 1** | Même si ce n'est pas toujours explicitement demandé, il est généralement apprécié que l'on justifie que les intégrales et les sommes de séries sont bien définies.

La fonction $t \mapsto 1/(1+t^2)^n$ est continue sur le segment $[0; 1]$ donc I_n est bien définie. Maintenant, pour tout $t \in [0; 1]$, on a

$$\frac{1}{(1+t^2)^n} \geq \frac{1}{2^n}$$

Par croissance de l'intégrale, il s'ensuit

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} dt \geq \int_0^1 \frac{1}{2^n} dt$$

Autrement dit,

$$I_n \geq \frac{1}{2^n}$$

- 2** La fonction $t \mapsto 1/(1+t^2)^n$ est continue sur l'intervalle $[0; +\infty[$. De plus,

$$\frac{1}{(1+t^2)^n} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2n}}$$

et la fonction $t \mapsto 1/t^{2n}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ puisque $2n > 1$ (c'est une intégrale de Riemann). Par comparaison d'intégrales de fonctions positives, la fonction $t \mapsto 1/(1+t^2)^n$ est intégrable au voisinage de $+\infty$. Finalement,

L'intégrale K_n est bien définie.

Calculons maintenant K_1 , en reconnaissant la fonction arctangente comme primitive de l'intégrande :

$$K_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = [\text{Arctan } t]_0^{+\infty}$$

ce qui donne finalement

$$K_1 = \frac{\pi}{2}$$

- 3** Remarquons tout d'abord que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$1+t^2-2t = (1-t)^2 \geq 0$$

Par conséquent, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $1+t^2 \geq 2t$. Par suite, la fonction $x \mapsto x^n$ étant croissante et la fonction inverse décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, pour tout $t \in [1; +\infty[$,

$$\frac{1}{(1+t^2)^n} \leq \frac{1}{(2t)^n}$$

La propriété à démontrer est un résultat asymptotique pour n au voisinage de $+\infty$. On peut donc supposer $n > 1$ et la fonction $t \mapsto 1/t^n$ est par conséquent intégrable sur $[1; +\infty[$. Appliquons maintenant la propriété de croissance de l'intégrale à l'inégalité précédente :

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{2^n t^n} dt = \frac{1}{2^n} \frac{-1}{n-1} \left[\frac{1}{t^{n-1}} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{(n-1)2^n}$$

Puisque $n-1 \sim n$, on conclut enfin que

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt = O\left(\frac{1}{n2^n}\right)$$

4 D'après la relation de Chasles,

$$K_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} dt + \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt = I_n + \int_1^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt$$

Autrement dit, pour n au voisinage de $+\infty$, grâce au résultat précédent,

$$K_n = I_n + O\left(\frac{1}{n2^n}\right)$$

Or, d'après la question 1, pour n au voisinage de $+\infty$,

$$0 \leq \frac{1}{n2^n} \leq \frac{I_n}{n} = o(I_n)$$

Par encadrement, on en déduit $1/(n2^n) = o(I_n)$ d'où $K_n = I_n + o(I_n)$, soit finalement

$$\boxed{K_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} I_n}$$

5 Calculons K_n en intégrant par parties. La fonction

$$t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^n} = (1+t^2)^{-n}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction

$$t \mapsto -n(1+t^2)^{-n-1} \times 2t = \frac{-2nt}{(1+t^2)^{n+1}}$$

En outre, la fonction constante égale à 1 admet pour primitive la fonction $t \mapsto t$ et

$$\frac{t}{(1+t^2)^n} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{t^{2n-1}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

Le théorème d'intégration par parties donne alors

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt &= \left[\frac{t}{(1+t^2)^n} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{-2nt}{(1+t^2)^{n+1}} \times t dt \\ &= 2n \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} dt \quad (\text{le crochet étant nul}) \\ &= 2n \int_0^{+\infty} \frac{1+t^2-1}{(1+t^2)^{n+1}} dt \\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt &= 2n \left(\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt - \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}} dt \right) \end{aligned}$$

On en déduit $K_n = 0 + 2n(K_n - K_{n+1})$, autrement dit

$$\boxed{K_n = K_{n+1} + \frac{1}{2n} K_n}$$

6 D'après la question précédente,

$$K_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{2n}\right) K_n = \frac{2n-1}{2n} K_n$$

Avec ce type de relation, on voit souvent (aussi bien dans certains livres que des copies de concours) des calculs rédigés en itérant la relation de récurrence de la manière suivante :

$$K_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} \times \frac{2n-3}{2n-2} K_{n-1} = \frac{(2n-1)(2n-3) \times \dots \times 1}{2n \times (2n-2) \times \dots \times 2} K_1$$

Comme $2n \times (2n-2) \times \dots \times 2 = 2^n n \times (n-1) \times \dots \times 1 = 2^n n!$ et

$$(2n-1)(2n-3) \times \dots \times 1 = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

on obtient

$$K_{n+1} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} K_1$$

Cette rédaction est discutable, car elle esquivé notamment l'écriture d'une récurrence pourtant indispensable. Il est donc préférable de ne s'en servir que pour deviner l'expression de K_n , avant de rédiger ensuite la preuve qui va suivre.

Montrons par récurrence que la proposition

$$\mathcal{P}(n) : K_n = \frac{(2n-2)!}{2^{2(n-1)}((n-1)!)^2} \frac{\pi}{2}$$

est vraie pour tout entier naturel n non nul.

- $\mathcal{P}(1)$ est vraie car, d'après la question 2,

$$\frac{(2 \times 1 - 2)!}{2^{2 \times (1-1)}((1-1)!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{0!}{2^0(0!)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} = K_1$$

- $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$: soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors

$$K_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} K_n \quad (\text{question 5})$$

$$= \frac{2n-1}{2n} \frac{(2n-2)!}{2^{2(n-1)}((n-1)!)^2} \frac{\pi}{2} \quad (\text{par } \mathcal{P}(n))$$

$$= \frac{2n(2n-1)(2n-2)!}{(2n)^2 2^{2n-2}((n-1)!)^2} \frac{\pi}{2}$$

$$K_{n+1} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2}$$

ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- Conclusion : pour tout entier naturel n non nul,

$$K_n = \frac{(2n-2)!}{2^{2(n-1)}((n-1)!)^2} \frac{\pi}{2}$$

Or, d'après la question précédente, pour n au voisinage de $+\infty$, $K_{n+1} = K_n + o(K_n)$ donc $K_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} K_n$. Par transitivité de la relation d'équivalence, on déduit alors de la question 4 que pour n au voisinage de $+\infty$,

$$I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} K_{n+1} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2}$$

On peut cependant difficilement qualifier cet équivalent de « simple ». Cherchons donc un équivalent plus simple à l'aide de la formule de Stirling. Pour n au voisinage de $+\infty$,

$$\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{4\pi n}}{2^{2n} \left(\frac{n}{e}\right)^{2n} (\sqrt{2\pi n})^2} \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$$

En conclusion,

$$\boxed{I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}}}$$

7 Calculons, grâce au changement de variable affine $t = u/\sqrt{n}$,

$$\int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{(1+u^2/n)^n} du = \int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^n} \times \sqrt{n} dt$$

ce qui donne

$$\boxed{\sqrt{n} I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \frac{1}{(1+u^2/n)^n} du}$$

8 Utilisons l'expression précédente et appelons f_n la fonction définie sur $[0; +\infty[$ de la façon suivante :

$$\forall u \in [0; +\infty[\quad f_n(u) = \frac{1}{(1+u^2/n)^n} \chi_{[0; \sqrt{n}]}(u)$$

où $\chi_{[0; \sqrt{n}]}$ est la fonction valant 1 sur l'intervalle $[0; \sqrt{n}]$ et 0 en dehors de cet intervalle.

La fonction $\chi_{[0; \sqrt{n}]}$ est appelée la fonction indicatrice de l'intervalle $[0; \sqrt{n}]$.

Ainsi,

$$\sqrt{n} I_n = \int_0^{+\infty} f_n(u) du$$

L'existence de l'intégrale étant assurée par la continuité par morceaux de f_n et le fait que cette fonction est nulle en dehors d'un segment.

Étudions la convergence simple de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Soit $u \in [0; +\infty[$. Alors

$$\chi_{[0; \sqrt{n}]}(u) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

puisque pour n suffisamment grand, on a $u \in [0; \sqrt{n}]$. Par ailleurs, pour n au voisinage de $+\infty$,

$$\frac{1}{(1+u^2/n)^n} = \left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^{-n} = \exp\left(-n \ln\left(1 + \frac{u^2}{n}\right)\right)$$

Comme la quantité u^2/n est au voisinage de 0 lorsque n est au voisinage de $+\infty$, on peut effectuer un développement limité :

$$\exp\left(-n \ln\left(1 + \frac{u^2}{n}\right)\right) = \exp\left(-n \left(\frac{u^2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) = \exp(-u^2 + o(1))$$

Par continuité de la fonction $\exp$, il s'ensuit

$$\exp\left(-n \ln\left(1 + \frac{u^2}{n}\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp(-u^2)$$

Tout ceci permet donc d'affirmer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $u \mapsto \exp(-u^2)$ sur $[0; +\infty[$.

Justifions maintenant que l'on peut permuter limite et intégrale. Pour cela, cherchons une fonction intégrable indépendante de n qui domine les fonctions f_n . Soit un réel $u \in [0; +\infty[$. Posons, pour tout $x \in [1; +\infty[$,

$$g_u(x) = -x \ln\left(1 + \frac{u^2}{x}\right)$$

La fonction g_u est dérivable et, pour tout $x \in [1; +\infty[$,

$$g_u'(x) = -\ln\left(1 + \frac{u^2}{x}\right) - x \times \frac{-u^2/x^2}{1+u^2/x} = -\ln\left(1 + \frac{u^2}{x}\right) + \frac{u^2}{x+u^2}$$

La fonction g_u' est à nouveau dérivable : pour tout $x \in [1; +\infty[$,

$$g_u''(x) = -\frac{-u^2/x^2}{1+u^2/x} - u^2 \frac{1}{(x+u^2)^2} = \frac{u^2}{x(u^2+x)} - \frac{u^2}{(u^2+x)^2} = \frac{u^4}{x(u^2+x)^2}$$

Cette quantité est positive ou nulle pour tout $x \in [1; +\infty[$. Par conséquent la fonction g_u' est croissante sur l'intervalle $[1; +\infty[$. En outre,

$$g_u'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

ce qui prouve que $g_u'(x) \leq 0$ pour tout $x \in [1; +\infty[$. Ainsi, la fonction g_u est décroissante sur $[1; +\infty[$. On a donc, pour tout $x \in [1; +\infty[$,

$$g_u(x) \leq g_u(1) = -\ln(1+u^2)$$

Par suite, pour tout entier naturel n non nul, la fonction exponentielle étant croissante,

$$\exp\left(-n \ln\left(1 + \frac{u^2}{n}\right)\right) = \exp(g_u(n)) \leq \exp(-\ln(1+u^2)) = \frac{1}{1+u^2}$$

En résumé, pour tout entier naturel n non nul et tout $u \in [0; +\infty[$,

$$f_n(u) \leq \frac{1}{1+u^2}$$

et la fonction $u \mapsto 1/(1+u^2)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Comme les fonctions f_n sont toutes continues par morceaux et que la fonction $u \mapsto \exp(-u^2)$ est continue sur $[0; +\infty[$, le théorème de convergence dominée assure l'intégrabilité de $u \mapsto e^{-u^2}$ sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(u) \, du = \int_0^{+\infty} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(u) \right) \, du$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \, I_n = \int_0^{+\infty} e^{-u^2} \, du$$

9 D'après la question 6, $\sqrt{n} \, I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

On en déduit, grâce à la question 8,

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2} \, du = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} \, I_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

⌋ Cette intégrale, appelée l'intégrale de Gauss, est un grand classique des concours. Il existe de multiples manières de la calculer.

Pour la seconde partie de la question, commençons par remarquer que la fonction définie par $u \mapsto e^{-u^2/2}$ est paire : par conséquent,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2} \, du = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2/2} \, du$$

Effectuons maintenant le changement de variable affine $s = u/\sqrt{2}$. Il vient

$$\int_0^{+\infty} e^{-u^2/2} \, du = \int_0^{+\infty} e^{-s^2} \sqrt{2} \, ds = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$$

et il s'ensuit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2} \, du = \sqrt{2\pi}$$

10 Soit $t \geq x$. Comme $t/x \geq 1$ et $\varphi(t) \geq 0$,

$$\varphi(t) \leq \frac{t}{x} \varphi(t)$$

Notons que $t \mapsto t \varphi(t)$ est continue, et intégrable sur $[x; +\infty[$ (et plus généralement sur $\mathbb{R}$) puisque par croissances comparées

$$t^3 \varphi(t) = \frac{t^3}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \xrightarrow{|t| \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{soit} \quad t \varphi(t) = \underset{|t| \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{t^2} \right)$$

Il s'ensuit, par croissance de l'intégrale,

$$\int_x^{+\infty} \varphi(t) dt \leq \int_x^{+\infty} \frac{t}{x} \varphi(t) dt = \frac{1}{x} \int_x^{+\infty} t \varphi(t) dt$$

$$\text{Or} \quad \int_x^{+\infty} t \varphi(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{+\infty} t e^{-t^2/2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-t^2/2} \right]_x^{+\infty}$$

$$\text{Comme} \quad e^{-A^2/2} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{on peut en déduire que} \quad \int_x^{+\infty} t \varphi(t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} = \varphi(x)$$

d'où finalement

$$\boxed{\int_x^{+\infty} \varphi(t) dt \leq \frac{\varphi(x)}{x}}$$

11 Posons, pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$h(x) = \int_x^{+\infty} \varphi(t) dt - \frac{x}{x^2 + 1} \varphi(x)$$

Remarquons que la fonction

$$x \mapsto \int_x^{+\infty} \varphi(t) dt = \int_0^{+\infty} \varphi(t) dt - \int_0^x \varphi(t) dt$$

est dérivable d'après le théorème fondamental de l'analyse, de dérivée $-\varphi$. La fonction h est donc dérivable et, pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$h'(x) = -\varphi(x) - \frac{1 \times (x^2 + 1) - 2x \times x}{(x^2 + 1)^2} \varphi(x) - \frac{x}{x^2 + 1} \varphi'(x)$$

Or, pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} x e^{-x^2/2} = -x \varphi(x)$$

d'où

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(-1 - \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} + \frac{x^2}{x^2 + 1} \right) \varphi(x) \\ &= \frac{-(x^2 + 1)^2 - (1 - x^2)(x^2 + 1) + x^2}{(x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

$$h'(x) = -\frac{2}{(x^2 + 1)^2} \varphi(x)$$

ce qui prouve que

$$\forall x \in]0; +\infty[\quad h'(x) \leq 0$$

Par conséquent, la fonction h est décroissante sur $]0; +\infty[$. En outre, la fonction φ étant intégrable,

$$\int_x^{+\infty} \varphi(t) \, dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

Par suite, $h(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Ainsi, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $h(x) \geq 0$, c'est-à-dire

$$\forall x \in]0; +\infty[\quad \frac{x}{x^2 + 1} \varphi(x) \leq \int_x^{+\infty} \varphi(t) \, dt$$

12 D'après la relation de Chasles pour les intégrales et la question 9,

$$\Phi(x) + \int_x^{+\infty} \varphi(t) \, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) \, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2/2} \, dt = 1$$

ce qui entraîne
$$1 - \Phi(x) = \int_x^{+\infty} \varphi(t) \, dt$$

On en déduit, grâce aux questions 10 et 11, que pour tout $x > 0$,

$$\frac{x}{x^2 + 1} \varphi(x) \leq 1 - \Phi(x) \leq \frac{\varphi(x)}{x}$$

Or, pour x au voisinage de $+\infty$,

$$\frac{x}{x^2 + 1} \varphi(x) = \frac{1}{x} \frac{1}{1 + 1/x^2} \varphi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\varphi(x)}{x}$$

Le théorème d'encadrement permet de conclure que

$$1 - \Phi(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\varphi(x)}{x}$$

I. RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

1 Montrons par récurrence que la propriété :

$$\mathcal{P}(n) : \quad \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \left| \left(\prod_{k=1}^n (1 + x_k) \right) - 1 \right| \leq \left(\prod_{k=1}^n (1 + |x_k|) \right) - 1$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- $\mathcal{P}(1)$ est vérifiée car $|x_1| = |x_1|$ pour tout $x_1 \in \mathbb{R}$.
- $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$: supposons que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, et montrons $\mathcal{P}(n+1)$. Soit $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$,

$$\begin{aligned} \left| \left(\prod_{k=1}^{n+1} (1 + x_k) \right) - 1 \right| &= \left| \left(\prod_{k=1}^n (1 + x_k) \right) (1 + x_{n+1}) - 1 \right| \\ &= \left| \left(\left(\prod_{k=1}^n (1 + x_k) \right) - 1 \right) (1 + x_{n+1}) + x_{n+1} \right| \end{aligned}$$

donc l'inégalité triangulaire donne que

$$\left| \left(\prod_{k=1}^{n+1} (1 + x_k) \right) - 1 \right| \leq \left| \left(\prod_{k=1}^n (1 + x_k) \right) - 1 \right| (1 + |x_{n+1}|) + |x_{n+1}|$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient alors que

$$\begin{aligned} \left| \left(\prod_{k=1}^{n+1} (1 + x_k) \right) - 1 \right| &\leq \left(\left(\prod_{k=1}^n (1 + |x_k|) \right) - 1 \right) (1 + |x_{n+1}|) + |x_{n+1}| \\ &\leq \left(\prod_{k=1}^{n+1} (1 + |x_k|) \right) - 1 \end{aligned}$$

et on en déduit $\mathcal{P}(n+1)$.

- Conclusion :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\left| \left(\prod_{k=1}^n (1 + x_k) \right) - 1 \right| \leq \left(\prod_{k=1}^n (1 + |x_k|) \right) - 1.$$

2 Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in [-1; +\infty[^n$. En utilisant l'inégalité de convexité $1+u \leq e^u$ qui est valable pour tout $u \in \mathbb{R}$, on obtient que $1+x_k \leq e^{x_k}$ pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. De plus, comme les x_k sont choisis dans $[-1; +\infty[$ on a $1+x_k \geq 0$ pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, et cela permet d'effectuer la majoration

$$\prod_{k=1}^n (1 + x_k) \leq \prod_{k=1}^n e^{x_k} = \exp \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)$$

Ainsi, $\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in [-1; +\infty[^n \quad \prod_{k=1}^n (1 + x_k) \leq \exp \left(\sum_{k=1}^n x_k \right)$

3 Soit $t \in \mathbb{C}$. La fonction exponentielle est développable en série entière sur $\mathbb{C}$, et son développement s'écrit

$$e^t = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!}$$

Grâce à cette expression, et à l'inégalité triangulaire, on obtient

$$|(1+t) - e^t| = \left| -\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \right| = \left| \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{|t|^k}{k!}$$

Mais remarquons que $(k-2)! \leq k!$ pour tout $k \geq 2$, donc en passant à l'inverse,

$$\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{(k-2)!}$$

En injectant cette inégalité dans l'inégalité précédente, il vient

$$|(1+t) - e^t| \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{|t|^k}{(k-2)!} = |t|^2 \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{|t|^{k-2}}{(k-2)!} = |t|^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|t|^n}{n!}$$

avec le changement d'indice $n = k - 2$ pour obtenir la dernière série. On reconnaît alors la série définissant $e^{|t|}$ et on en déduit bien que

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{C} \quad |(1+t) - e^t| \leq |t|^2 e^{|t|}}$$

4 Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$, et posons $M = \max\{|a|, |b|\}$. En utilisant la factorisation de $a^n - b^n$ par $a - b$, c'est-à-dire l'égalité

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$$

et l'inégalité triangulaire, on obtient que

$$|a^n - b^n| = |a - b| \left| \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k \right| \leq |a - b| \sum_{k=0}^{n-1} |a|^{n-1-k} |b|^k$$

Mais par définition de M on a $|a| \leq M$ et $|b| \leq M$, donc le k -ième terme de la somme ci-dessus peut être majoré par $M^{n-1-k} M^k = M^{n-1}$. Comme cette majoration est indépendante de k , et qu'il y a n termes dans la somme, on en conclut bien que

$$\boxed{\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad |a^n - b^n| \leq n M^{n-1} |a - b|}$$

5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $z \in \mathbb{C}$. Par propriétés de l'exponentielle, on a $e^z = (e^{z/n})^n$ donc, d'après la question 4,

$$\left| \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n - e^z \right| = \left| \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n - (e^{z/n})^n \right| \leq n M^{n-1} \left| 1 + \frac{z}{n} - e^{z/n} \right|$$

où M est défini par

$$M = \max \left\{ \left| 1 + \frac{z}{n} \right|, |e^{z/n}| \right\}$$

D'une part, en utilisant encore une fois l'inégalité de convexité $1 + u \leq e^u$ qui est valable pour tout $u \in \mathbb{R}$, et l'inégalité triangulaire, on a

$$\left| 1 + \frac{z}{n} \right| \leq 1 + \frac{|z|}{n} \leq e^{|z|/n}$$

D'autre part, grâce à l'inégalité triangulaire et au développement en série entière de l'exponentielle,

$$|e^{z/n}| = \left| \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{z}{n}\right)^k \right| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left| \frac{z}{n} \right|^k = e^{|z|/n}$$

et on déduit de ces deux inégalités que $M \leq e^{|z|/n}$. Enfin, en utilisant le résultat de la question 3 avec $t = z/n$, on a

$$\left| 1 + \frac{z}{n} - e^{z/n} \right| \leq \frac{|z|^2}{n^2} e^{|z|/n}$$

Si on injecte cette inégalité ainsi que la borne sur M dans l'inégalité initiale, on obtient que

$$\left| \left(1 + \frac{z}{n} \right)^n - e^z \right| \leq n e^{(n-1)\frac{|z|}{n}} \frac{|z|^2}{n^2} e^{|z|/n}$$

d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad \left| \left(1 + \frac{z}{n} \right)^n - e^z \right| \leq \frac{|z|^2}{n} e^{|z|}$$

6 À la question 5, on a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |u_n - e^z| \leq \frac{|z|^2 e^{|z|}}{n}$$

Le terme de droite dans cette inégalité tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini par croissance comparée, donc un passage à la limite quand $n \rightarrow +\infty$ montre que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^z$$

II. EXEMPLES DE CALCUL DE PRODUIT INFINI

7 Calculons le premier produit infini en définissant son produit partiel

$$\forall N \geq 2 \quad P_N = \prod_{n=2}^N \left(1 - \frac{1}{n^2} \right)$$

et en essayant d'évaluer sa limite lorsque N tend vers l'infini. En écrivant que

$$1 - \frac{1}{n^2} = \frac{n^2 - 1}{n^2} = \frac{n-1}{n} \frac{n+1}{n}$$

on remarque que si on définit la suite $(u_n)_{n \geq 2}$ par $u_n = \frac{n}{n-1}$, alors on a

$$P_N = \prod_{n=2}^N \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

On reconnaît ici un produit télescopique, que l'on sait calculer :

$$P_N = \frac{u_{N+1}}{u_2} = \frac{N+1}{2N} \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2}$$

En faisant tendre N vers l'infini, on obtient finalement que

$$\prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2} \right) = \frac{1}{2}$$

Calculons de la même manière le second produit. Définissons son produit partiel

$$\forall N \geq 2 \quad \tilde{P}_N = \prod_{n=2}^N \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right)$$

et suivons l'indication en nous intéressant à $\tilde{P}_{2N}$. Le $(-1)^{n+1}$ qui est présent dans le terme général de ce produit partiel suggère qu'il faut distinguer selon la parité de l'indice n . En scindant $\tilde{P}_{2N}$ en deux produits, le premier portant sur les indices $n \in \llbracket 2; 2N \rrbracket$ qui sont pairs, et le second sur les impairs, on peut écrire

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{2N} &= \prod_{n=2}^{2N} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right) \\ &= \prod_{k=1}^N \left(1 + \frac{(-1)^{2k+1}}{2k} \right) \times \prod_{k=2}^N \left(1 + \frac{(-1)^{2k-1+1}}{2k-1} \right) \\ \tilde{P}_{2N} &= \prod_{k=1}^N \left(1 - \frac{1}{2k} \right) \times \prod_{k=2}^N \left(1 + \frac{1}{2k-1} \right) \end{aligned}$$

Regroupons à présent ces deux produits en un seul, en isolant le terme pour $k=1$ du premier produit :

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{2N} &= \frac{1}{2} \prod_{k=2}^N \left(1 - \frac{1}{2k} \right) \left(1 + \frac{1}{2k-1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \prod_{k=2}^N \left(\frac{2k-1}{2k} \times \frac{2k}{2k-1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \prod_{k=2}^N 1 \\ \tilde{P}_{2N} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

La sous-suite $(\tilde{P}_{2N})_{N \geq 2}$ est donc constante égale à $1/2$, ainsi

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \tilde{P}_{2N} = \frac{1}{2}$$

Attention, à ce stade on ne peut pas en déduire la valeur du produit infini, c'est-à-dire la limite de la suite $(\tilde{P}_N)_{N \geq 2}$. En effet, on connaît seulement la limite de la sous-suite $(\tilde{P}_{2N})_{N \geq 2}$. Pour conclure, on doit également trouver la limite de l'autre sous-suite $(\tilde{P}_{2N+1})_{N \geq 2}$.

Pour tout $N \geq 2$,

$$\tilde{P}_{2N+1} = \left(1 + \frac{(-1)^{2N+2}}{2N+1} \right) \tilde{P}_{2N} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2N+1} \right)$$

et avec cette expression, on en déduit également que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \tilde{P}_{2N+1} = \frac{1}{2}$$

Comme les deux sous-suites $(\tilde{P}_{2N})_{N \geq 2}$ et $(\tilde{P}_{2N+1})_{N \geq 2}$ convergent et partagent la même limite, on en déduit que la suite $(\tilde{P}_N)_{N \geq 2}$ converge vers cette limite, et donc finalement

$$\boxed{\prod_{n=2}^{+\infty} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right) = \frac{1}{2}}$$

8 Soit $n \in \mathbb{N}$. Intégrons par parties l'intégrale définissant W_{n+2} , en dérivant la fonction $u \mapsto \cos^{n+1} u$ (qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; \pi/2]$) et en intégrant la fonction $u \mapsto \cos u$ (dont la primitive $u \mapsto \sin u$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; \pi/2]$) :

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= [\sin u \times \cos^{n+1} u]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin u \times (n+1)(-\sin u) \cos^n u \, du \\ &= (n+1) \int_0^{\pi/2} \sin^2 u \cos^n u \, du \end{aligned}$$

En remarquant que $\sin^2 u = 1 - \cos^2 u$, il vient

$$W_{n+2} = (n+1)(W_n - W_{n+2})$$

d'où

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad (n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n}$$

De cette relation de récurrence, on obtient en remplaçant n par $2n-1$ que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$W_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} W_{2n-1}$$

et en itérant,

$$\begin{aligned} W_{2n+1} &= \frac{2n(2n-2)}{(2n+1)(2n-1)} W_{2n-3} \\ &\vdots \\ &= \frac{(2n) \times (2n-2) \times \cdots \times 2}{(2n+1) \times (2n-1) \times \cdots \times 3} W_1 \\ W_{2n+1} &= \frac{[(2n) \times (2n-2) \times \cdots \times 2]^2}{[(2n+1) \times (2n-1) \times \cdots \times 3] \times [(2n) \times (2n-2) \times \cdots \times 2]} W_1 \end{aligned}$$

En factorisant par 2 chaque terme du produit, on voit que le numérateur est égal à $(2^n n!)^2$, tandis qu'au dénominateur on reconnaît $(2n+1)!$. Enfin, un simple calcul montre que

$$W_1 = \int_0^{\pi/2} \cos u \, du = [\sin u]_0^{\pi/2} = 1$$

donc finalement,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad W_{2n+1} = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!}}$$

9 Pour déterminer un équivalent de la suite $(W_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$, on utilise l'expression prouvée à la question 8 et la formule de Stirling qui donne un équivalent de la factorielle

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

On obtient alors en remarquant que $(2n+1)! = (2n+1) \cdot (2n)!$:

$$W_{2n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2^{2n}}{2n+1} \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} 2\pi n}{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{2\pi \times 2n}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n} \frac{2\pi n}{\sqrt{4\pi n}}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{W_{2n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}}}$$

Une preuve plus classique de ce résultat consiste à d'abord remarquer que la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante puisque $\cos u$ est à valeurs dans $[0; 1]$ lorsque $u \in [0; \pi/2]$. Par conséquent, d'après la formule de récurrence de la question 8,

$$\frac{W_{n+2}}{W_n} = \frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$$

d'où $W_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} W_n$. Remarquons que cette formule de récurrence donne également que la suite $((n+1)W_{n+1}W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante, égale à son terme initial qui vaut $\pi/2$. Ainsi,

$$(n+1)W_{n+1}W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} nW_n^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2}$$

et alors

$$W_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

On obtient le même résultat qu'avant en remplaçant n par $2n+1$.

Soit $N \geq 1$, considérons le produit partiel

$$P_N = \prod_{n=1}^N \left(1 + \frac{1}{4n^2 - 1} \right)$$

Il peut être réécrit sous la forme :

$$P_N = \prod_{n=1}^N \left(\frac{4n^2}{4n^2 - 1} \right) = \prod_{n=1}^N \left(\frac{2n}{2n-1} \frac{2n}{2n+1} \right) = \left(\prod_{n=1}^N \frac{2n}{2n-1} \right) \times \left(\prod_{n=1}^N \frac{2n}{2n+1} \right)$$

Mais remarquons que par un changement d'indice,

$$\prod_{n=1}^N (2n-1) = \prod_{n=2}^N (2n-1) = \prod_{n=1}^{N-1} (2n+1) = \frac{1}{2N+1} \prod_{n=1}^N (2n+1)$$

donc il vient

$$\prod_{n=1}^N \frac{2n}{2n-1} = (2N+1) \prod_{n=1}^N \frac{2n}{2n+1}$$

si bien que

$$P_N = (2N+1) \left(\prod_{n=1}^N \frac{2n}{2n+1} \right)^2$$

Il suffit maintenant de calculer le produit qui est à droite de cette égalité. Comme dans la question 8, si l'on substitue n par $2n-1$ dans la relation de récurrence satisfaite par la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on obtient que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad (2n+1)W_{2n+1} = 2nW_{2n-1}$$

Par conséquent,

$$\prod_{n=1}^N \frac{2n}{2n+1} = \prod_{n=1}^N \frac{W_{2n+1}}{W_{2(n-1)+1}} = \frac{W_{2N+1}}{W_1}$$

car on reconnaît ici un produit télescopique. Dès lors, en se rappelant que $W_1 = 1$ et en utilisant l'équivalent de la suite $(W_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ que l'on vient de prouver, on en déduit que

$$P_N = (2N+1)W_{2N+1}^2 \underset{N \rightarrow +\infty}{\sim} 2N \sqrt{\frac{\pi}{4N}}^2 = \frac{\pi}{2}$$

En conclusion,

$$\boxed{\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{1}{4n^2 - 1} \right) = \frac{\pi}{2}}$$

10 Soient $n, N \in \mathbb{N}$ tels que $N \geq n$. Puisque $-P(A_p) \geq -1$ pour tout $p \in \mathbb{N}$, l'inégalité démontrée en question 2 donne

$$0 \leq \prod_{p=n}^N (1 - P(A_p)) \leq \exp \left(- \sum_{p=n}^N P(A_p) \right)$$

Puisque par hypothèse, la série $\sum_{n \geq 0} P(A_n)$ diverge et est à termes positifs, on a

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{p=n}^N P(A_p) = +\infty$$

donc en faisant tendre N vers l'infini dans l'inégalité ci-dessus, par encadrement et continuité de l'exponentielle, on obtient effectivement que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \prod_{p=n}^{+\infty} (1 - P(A_p)) = 0$$

11 Par passage au complémentaire,

$$\begin{aligned} P \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{p \geq n} A_p \right) &= 1 - P \left(\overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{p \geq n} A_p} \right) \\ &= 1 - P \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{p \geq n} \overline{A_p} \right) \end{aligned}$$

Ensuite, par positivité et sous-additivité de la probabilité, on a

$$0 \leq P \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{p \geq n} \overline{A_p} \right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} P \left(\bigcap_{p \geq n} \overline{A_p} \right)$$

Comme les événements $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ sont supposés indépendants, la suite des complémentaires $(\overline{A_p})_{p \in \mathbb{N}}$ est également une suite d'événements indépendants. En particulier,

$$P \left(\bigcap_{p \geq n} \overline{A_p} \right) = \prod_{p \geq n} P(\overline{A_p}) = \prod_{p \geq n} (1 - P(A_p))$$

et d'après la question 10, ce produit converge et vaut 0. Chaque terme de la série à droite de l'inégalité ci-dessus étant nul, on en déduit que sa somme est nulle, d'où par encadrement

$$P \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{p \geq n} \overline{A_p} \right) = 0$$

ou encore

$$P \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{p \geq n} A_p \right) = 1$$

Ce résultat est l'une des deux versions d'un résultat bien connu en probabilités, appelé le lemme de Borel-Cantelli. Dans cette version, il peut être interprété de la manière suivante: si l'on a une suite infinie d'événements indépendants dont la série des probabilités diverge, alors avec probabilité 1, une infinité d'entre eux se réalise.

III. ÉTUDE D'UNE FONCTION DÉFINIE PAR UN PRODUIT INFINI

12 Soient $x \in \mathcal{S}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition de $Q_n(x)$, on a

$$\begin{aligned} Q_{n+1}(x) - Q_n(x) &= (1 + |f_{n+1}(x)|) Q_n(x) - Q_n(x) \\ &= |f_{n+1}(x)| Q_n(x) \end{aligned}$$

Comme les fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ sont à valeurs dans $] -1; +\infty[$, l'inégalité démontrée en question 2 donne

$$Q_n(x) = \prod_{k=1}^n (1 + |f_k(x)|) \leq \exp \left(\sum_{k=1}^n |f_k(x)| \right)$$

La somme à l'intérieur de l'exponentielle est une somme de termes positifs, on peut donc la majorer par la somme de sa série qui vaut $R_0(x)$, d'où $Q_n(x) \leq e^{R_0(x)}$ par croissance de l'exponentielle. Par suite,

- les fonctions $(|f_n|)_{n \geq 1}$ sont continues sur $\mathcal{S}$ car les fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ le sont ;
- la série $\sum |f_n|$ converge uniformément vers R_0 sur $\mathcal{S}$.

Par le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions, on en déduit donc que la fonction R_0 est continue sur le segment $\mathcal{S}$. En particulier elle est bornée et cela donne l'existence d'un $M > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathcal{S} \quad 0 \leq R_0(x) \leq M$$

Par croissance de l'exponentielle, on obtient alors que $Q_n(x) \leq e^M$ pour tout $x \in \mathcal{S}$, et l'égalité initiale donne

$$\boxed{\exists M > 0 \quad \forall x \in \mathcal{S} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad Q_{n+1}(x) - Q_n(x) \leq e^M |f_{n+1}(x)|}$$

13 Soit $x \in \mathcal{S}$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculons

$$\begin{aligned} |P_{n+1}(x) - P_n(x)| &= \left| (1 + f_{n+1}(x) - 1) \prod_{k=1}^n (1 + f_k(x)) \right| \\ &= |f_{n+1}(x)| \prod_{k=1}^n |1 + f_k(x)| \end{aligned}$$

Par l'inégalité triangulaire, pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a $0 \leq |1 + f_k(x)| \leq 1 + |f_k(x)|$ donc on peut effectuer la majoration

$$|P_{n+1}(x) - P_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)| \prod_{k=1}^n (1 + |f_k(x)|) = |f_{n+1}(x)| Q_n(x)$$

Mais, comme à la question précédente,

$$|f_{n+1}(x)| Q_n(x) = (1 + |f_{n+1}(x)|) Q_n(x) - Q_n(x) = Q_{n+1}(x) - Q_n(x)$$

donc finalement,

$$\boxed{\forall x \in \mathcal{S} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad |P_{n+1}(x) - P_n(x)| \leq Q_{n+1}(x) - Q_n(x)}$$

14 Pour tout $x \in \mathcal{S}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $1 + f_n(x) > 0$ donc son logarithme est bien défini et on a l'identité

$$P_n(x) = \exp \left(\sum_{k=1}^n \ln(1 + f_k(x)) \right)$$

Fixons $x \in \mathcal{S}$. La convergence uniforme de la série $\sum |f_n|$ entraîne la convergence absolue de la série numérique $\sum f_n(x)$ qui, à son tour, entraîne la convergence $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Par conséquent,

$$|\ln(1 + f_n(x))| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} |f_n(x)|$$

Comme ce sont des suites positives et comme $|f_n(x)|$ est le terme général d'une série convergente par hypothèse, le théorème de comparaison donne que la série $\sum \ln(1 + f_n(x))$ converge absolument. Par continuité de l'exponentielle, la suite $(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et alors la fonction P est bien définie.

La suite de fonctions $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction P par définition, l'objectif est de montrer que cette convergence est uniforme, c'est-à-dire que

$$\|P - P_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Soient $x \in \mathcal{S}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On peut écrire

$$|P(x) - P_n(x)| = \left| \sum_{k=n}^{+\infty} (P_{k+1}(x) - P_k(x)) \right| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} |P_{k+1}(x) - P_k(x)|$$

grâce à l'inégalité triangulaire. Maintenant, appliquons successivement les résultats des questions 13 et 12 pour obtenir

$$|P(x) - P_n(x)| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} (Q_{k+1}(x) - Q_k(x)) \quad (\text{question 13})$$

$$\leq e^M \sum_{k=n}^{+\infty} |f_{k+1}(x)| \quad (\text{question 12})$$

À droite de cette inégalité, on reconnaît $R_n(x)$ telle que définie dans l'énoncé, qui existe bien par convergence de la série de fonctions $\sum |f_n|$. Puisque ce sont des sommes de termes positifs, on a $0 \leq R_n(x) \leq R_0(x)$ pour tout $x \in \mathcal{S}$. Or, on a montré à la question 12 que la fonction R_0 était bornée sur $\mathcal{S}$ donc on en déduit que la fonction R_n est également bornée sur $\mathcal{S}$. Par conséquent, sa norme infinie existe bien et en la majorant par celle-ci, cela donne

$$|P(x) - P_n(x)| \leq e^M \|R_n\|_\infty$$

Comme cette inégalité est vraie pour tout $x \in \mathcal{S}$, on peut passer au supremum à gauche et obtenir

$$\|P - P_n\|_\infty \leq e^M \|R_n\|_\infty$$

Par hypothèse, la série $\sum |f_n|$ converge uniformément vers la fonction R_0 , cela signifie que $\|R_n\|_\infty$ converge vers 0 lorsque n tend vers l'infini. En passant à la limite sur n dans l'inégalité ci-dessus, on voit donc que

La suite de fonctions $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathcal{S}$ vers la fonction P .

15 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction P_n est continue comme produit de fonctions continues. On a démontré à la question 14 que ces fonctions convergent uniformément sur $\mathcal{S}$ vers la fonction P donc par théorème,

La fonction P est continue sur $\mathcal{S}$.

Montrons à présent que la fonction P ne s'annule pas sur $\mathcal{S}$. Les fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont choisies à valeurs dans $] -1 ; +\infty[$, donc la fonction P est un produit infini de fonctions strictement positives.

Néanmoins, comme ce produit est *infini*, on ne peut pas en déduire que P est à valeurs strictement positives. Par exemple, le produit infini des termes de la suite $(e^{-1/n})_{n \in \mathbb{N}^*}$, qui sont tous strictement positifs, est nul. En effet,

$$\forall N \in \mathbb{N}^* \quad \prod_{n=1}^N e^{-1/n} = \exp\left(-\sum_{n=1}^N \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$$

car la série harmonique diverge vers $+\infty$. Cela nous force à travailler un peu plus, en exploitant l'hypothèse que la série $\sum |f_n|$ converge uniformément.

Soit $x \in \mathcal{S}$. En question 14, en exploitant la convergence uniforme de la série $\sum |f_n|$, on a montré que la série $\sum \ln(1+f_n(x))$ converge absolument. En particulier, cette série converge et on peut noter $\ell(x) \in \mathbb{R}$ la valeur de sa somme. Par continuité de l'exponentielle, en laissant n tendre vers l'infini dans l'identité,

$$P_n(x) = \exp\left(\sum_{k=1}^n \ln(1+f_k(x))\right)$$

on en déduit donc que $P(x) = e^{\ell(x)}$, et alors $P(x) > 0$ comme étant l'exponentielle d'un nombre réel. On en conclut que

La fonction P ne s'annule pas sur $\mathcal{S}$.

16 Fixons $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, définissons la fonction

$$g_n : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto -e^{-nx^2} \end{cases}$$

La suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions continues, prenant des valeurs plus grandes que -1 . Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la série $\sum |g_n(x)|$ est une série géométrique de raison $e^{-x^2} \in]0; 1[$, donc elle converge. Pour vérifier les hypothèses de la partie III.A, montrons que la série de fonctions $\sum |g_n|$ converge uniformément sur tout segment $[a; b]$ avec $0 < a < b$, c'est-à-dire que sous réserve d'existence, le reste

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} |g_k(x)|$$

converge uniformément vers 0. Or, c'est une série géométrique convergente, donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} e^{-kx^2} = \frac{e^{-(n+1)x^2}}{1 - e^{-x^2}}$$

Fixons a, b tels que $0 < a < b$, et prenons $x \in [a; b]$. À droite, en minorant le dénominateur par $1 - e^{-a^2}$ et en majorant le numérateur par $e^{-(n+1)a^2}$, on voit que

$$R_n(x) \leq \frac{e^{-(n+1)a^2}}{1 - e^{-a^2}}$$

Comme cette inégalité est vraie pour tout $x \in [a; b]$, en passant au supremum sur x à gauche, on obtient que

$$\|R_n\|_{\infty, [a; b]} \leq \frac{e^{-(n+1)a^2}}{1 - e^{-a^2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Cette convergence vers zéro signifie que la série $\sum |g_n|$ converge uniformément sur tout ensemble de la forme $[a; b]$ avec $0 < a < b$. Le résultat de la question 15 donne que la fonction f est continue sur chacun de ces ensembles. Étant donné l'arbitraire sur a et b , on en conclut que

La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

17 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, définissons le produit partiel

$$f_n: \begin{cases} \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \prod_{k=1}^n (1 + g_k(x)) \end{cases}$$

Tout d'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $1 + g_n$ prend ses valeurs dans $]0; 1[$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad 0 < \prod_{k=1}^n (1 + g_k(x)) < 1$$

et en faisant tendre n vers l'infini on obtient que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad 0 \leq f(x) \leq 1$$

D'après la question 15, la fonction f ne s'annule pas donc on a même mieux :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad 0 < f(x) \leq 1$$

Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $x \leq y$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $1 + g_n$ est croissante et positive, on obtient que $f_n(x) \leq f_n(y)$, et en passant à la limite sur n cela montre que la fonction f est croissante. Notons

$$\ell_0 = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad \text{et} \quad \ell_\infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

qui existent bien d'après le théorème de la limite monotone, puisque f est une fonction monotone et bornée. Le tableau de variations de la fonction f a donc l'allure suivante :

x	0	$+\infty$
$f(x)$	ℓ_0	ℓ_∞
	$\nearrow$	

Calculons à présent les limites ℓ_0 et ℓ_∞ . Comme remarqué précédemment, les fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et f prennent des valeurs strictement positives, on peut donc définir leur logarithme. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\ln f_n(x) = \sum_{k=1}^n \ln(1 - e^{-kx^2}) \leq - \sum_{k=1}^n e^{-kx^2} = -e^{-x^2} \frac{1 - e^{-nx^2}}{1 - e^{-x^2}}$$

en utilisant l'inégalité de convexité $\ln(1+u) \leq u$ valable pour tout $u > -1$. Par continuité du logarithme, si on fait tendre n vers l'infini dans cette inégalité, on obtient

$$\ln f(x) \leq - \frac{e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}}$$

Cette inégalité montre que $\lim_{x \rightarrow 0} \ln f(x) = -\infty$

donc par passage à l'exponentielle,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

Calculons à présent ℓ_∞ . Pour cela, on va utiliser le théorème de la double limite et on a alors besoin de montrer la convergence uniforme de $\ln f_n$ vers $\ln f$ sur un intervalle $[a; +\infty[$. On choisit a de sorte que lorsque $x \in [a; +\infty[$, on a $e^{-nx^2} \leq 1/2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Comme on a $e^{-nx^2} \leq e^{-x^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il suffit que $e^{-x^2} \leq 1/2$ d'où $x \geq \sqrt{\ln 2}$. De cette manière, $g_n(x)$ appartient à $[-1/2; 0[\subset [-1/2; 1/2]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $u \mapsto \ln(1+u)$ est continue et dérivable sur $[-1/2; 1/2]$, et sa dérivée satisfait

$$\forall u \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \quad 0 \leq \frac{1}{1+u} \leq 2$$

donc d'après l'inégalité des accroissements finis,

$$\forall u \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \quad |\ln(1+u)| = |\ln(1+u) - \ln(1+0)| \leq 2|u|$$

Par conséquent, en appliquant cette inégalité après l'inégalité triangulaire, on voit que pour tout $x \geq \sqrt{\ln 2}$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} |\ln f(x) - \ln f_n(x)| &\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |\ln(1+g_k(x))| \\ &\leq 2 \sum_{k=n+1}^{+\infty} |g_k(x)| \\ |\ln f(x) - \ln f_n(x)| &\leq 2\|R_n\|_{\infty, [\sqrt{\ln 2}; +\infty[} \end{aligned}$$

Cette inégalité étant vérifiée pour tout $x \geq \sqrt{\ln 2}$, on peut passer au supremum sur x à gauche et obtenir que

$$\|\ln f - \ln f_n\|_{\infty, [\sqrt{\ln 2}; +\infty[} \leq 2\|R_n\|_{\infty, [\sqrt{\ln 2}; +\infty[} \leq \frac{e^{-(n+1)\ln 2}}{1 - e^{-\ln 2}} = \frac{1}{2^n}$$

d'après la majoration uniforme de R_n prouvée dans la question 16, lorsque $a = \sqrt{\ln 2}$. Cela montre que la série $\sum \ln(1+g_n)$ converge uniformément vers la fonction $\ln f$ sur $[\sqrt{\ln 2}; +\infty[$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+g_n(x)) = 0$$

donc d'après le théorème de la double limite, on a

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \ln(1+g_n(x)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+g_n(x)) = 0$$

d'où, par composition par la fonction exponentielle,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1}$$

18 Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $1+f_n$ prend des valeurs strictement positives, c'est également le cas du produit partiel P_n et on peut prendre son logarithme. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathcal{S}$, on a donc

$$\ln P_n(x) = \sum_{k=1}^n \ln(1+f_k(x))$$

La fonction P_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{S}$ comme produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, donc par composition $\ln P_n$ est également de classe $\mathcal{C}^1$. De la même manière, comme somme de compositions de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, le terme de droite dans l'identité ci-dessus est également de classe $\mathcal{C}^1$. En dérivant les deux côtés de cette égalité, on obtient

$$\frac{P'_n(x)}{P_n(x)} = \sum_{k=1}^n \frac{f'_k(x)}{1+f_k(x)}$$

ce qui se réécrit, comme voulu,

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathcal{S} \quad P'_n(x) = P_n(x) \sum_{k=1}^n \frac{f'_k(x)}{1+f_k(x)}$$

| On aurait également pu procéder par récurrence.

19 Repartons de l'égalité

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathcal{S} \quad \ln P_n(x) = \sum_{k=1}^n \ln(1+f_k(x))$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $\ln(1+f_n)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ par composition.
- La série $\sum \ln(1+f_n)$ converge simplement vers la fonction $\ln P$ par continuité du logarithme et d'après la question 14.
- La série des dérivées

$$\sum_{n \geq 1} (\ln(1+f_n))' = \sum_{n \geq 1} \frac{f'_n}{1+f_n}$$

converge uniformément sur $\mathcal{S}$ par hypothèse.

Par théorème de dérivation de la somme d'une série de fonctions, on en déduit que $\ln P$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, et que sa dérivée est donnée par

$$\forall x \in \mathcal{S} \quad (\ln P)'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f'_n(x)}{1+f_n(x)}$$

En composant avec la fonction exponentielle qui est de classe $\mathcal{C}^1$, on trouve que

$$\boxed{\text{La fonction } P \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathcal{S}.}$$

En dérivant $\ln P$ dans l'expression ci-dessus, on a ainsi

$$\boxed{\forall x \in \mathcal{S} \quad \frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f'_n(x)}{1+f_n(x)}}$$

IV. EXPRESSION DE LA FONCTION SINUS COMME PRODUIT INFINI

20 D'après la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned} P_n(X) &= \frac{1}{2i} \left(\sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \left(\frac{iX}{2n+1} \right)^k - \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (-1)^k \left(\frac{iX}{2n+1} \right)^k \right) \\ &= \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (1 - (-1)^k) \left(\frac{iX}{2n+1} \right)^k \\ P_n(X) &= \frac{1}{i} \left(\frac{i}{2n+1} \right)^{2n+1} X^{2n+1} + \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n+1}{k} (1 - (-1)^k) \left(\frac{iX}{2n+1} \right)^k \end{aligned}$$

Le polynôme P_n s'écrit comme la somme de polynômes de degrés inférieurs ou égaux à $2n+1$, donc $\deg P_n \leq 2n+1$. Mais dans la formule précédente on voit que le coefficient devant X^{2n+1} dans $P_n(X)$ est non nul, alors

$$\deg P_n = 2n+1$$

21 Prenons $k \in \llbracket 0; 2n \rrbracket$, et montrons que x_k tel que défini dans l'énoncé est racine de P_n , c'est-à-dire que $P_n(x_k) = 0$. D'une part,

$$\begin{aligned} 1 + \frac{ix_k}{2n+1} &= 1 + i \tan \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right) \\ &= \frac{\cos \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right) + i \sin \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right)}{\cos \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right)} \\ &= \frac{e^{i k \pi / (2n+1)}}{\cos \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right)} \end{aligned}$$

et d'autre part, par le même calcul

$$1 - \frac{ix_k}{2n+1} = \frac{e^{-i k \pi / (2n+1)}}{\cos \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right)}$$

Par conséquent, en utilisant la formule d'Euler pour le sinus,

$$P_n(x_k) = \frac{1}{2i} \frac{e^{i k \pi} - e^{-i k \pi}}{\cos \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right)^{2n+1}} = \frac{\sin(k\pi)}{\cos \left(\frac{k\pi}{2n+1} \right)^{2n+1}} = 0$$

puisque $\sin(k\pi) = 0$ pour tout entier k . Comme la fonction tangente est positive sur $[0; \pi/2[$, négative sur $] \pi/2; \pi]$, et qu'elle est strictement croissante sur chacun de ces intervalles, ces racines sont distinctes. On dispose de $2n+1$ racines *distinctes* pour le polynôme P_n qui est de degré $2n+1$ (d'après la question 20), donc on a bien décrit l'ensemble des racines de P_n . Ainsi,

$$\text{L'ensemble des racines de } P_n \text{ est } \{x_k \mid k \in \llbracket 0; 2n \rrbracket\}.$$

22 Dans la question 21, on a montré que P_n est scindé à racines simples et que ses racines sont exactement les x_k pour $k \in \llbracket 0; 2n \rrbracket$. Cela veut dire que P_n s'écrit

$$P_n(X) = \alpha \prod_{k=0}^{2n} (X - x_k)$$

pour un certain $\alpha \in \mathbb{C}$. Déjà, remarquons que $x_0 = 0$, donc on peut isoler un facteur X , et que toutes les autres racines sont non nulles. Ensuite, pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, puisque la tangente est impaire et π -périodique, on a

$$\begin{aligned} x_k &= (2n+1) \tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = -(2n+1) \tan\left(-\frac{k\pi}{2n+1}\right) \\ &= -(2n+1) \tan\left(\pi - \frac{k\pi}{2n+1}\right) \\ &= -(2n+1) \tan\left(\frac{(2n+1-k)\pi}{2n+1}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{x_k = -x_{2n+1-k}}$$

donc chaque racine dans $\llbracket 1; n \rrbracket$ est l'opposé d'une racine dans $\llbracket n+1; 2n \rrbracket$, et on peut les mettre par paires. Plus précisément,

$$\begin{aligned} P_n(X) &= \alpha X \left(\prod_{k=1}^n (X - x_k) \right) \left(\prod_{k=n+1}^{2n} (X - x_k) \right) \\ &= \alpha X \left(\prod_{k=1}^n (X - x_k) \right) \left(\prod_{j=1}^n (X - x_{2n+1-j}) \right) \end{aligned}$$

en effectuant le changement d'indice $j = 2n+1-k$ dans le second produit. Maintenant, en utilisant l'égalité $x_j = -x_{2n+1-j}$ que l'on vient de démontrer, et en regroupant les deux produits, il vient :

$$\begin{aligned} P_n(X) &= \alpha X \prod_{j=1}^n (X - x_j)(X + x_j) \\ &= \alpha X \prod_{j=1}^n (X^2 - x_j^2) \\ &= \alpha X \left(\prod_{j=1}^n (-x_j^2) \right) \prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{X^2}{x_j^2} \right) \end{aligned}$$

donc en posant $\lambda = \alpha \prod_{j=1}^n (-x_j^2) \in \mathbb{C}$, on obtient comme désiré que

$$\boxed{P_n(X) = \lambda X \prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{X^2}{x_j^2} \right) \text{ pour un certain } \lambda \in \mathbb{C}.}$$

23 Suivons l'indication et calculons $P'_n(0)$. D'une part, en utilisant l'expression de $P_n(X)$ démontrée à la question 22, on a

$$P'_n(X) = \lambda \prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{X^2}{x_j^2} \right) + \lambda X \left(\prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{X^2}{x_j^2} \right) \right)'$$

d'où $P'_n(0) = \lambda$. Mais d'autre part, par un calcul direct avec la définition de P_n ,

$$\begin{aligned} P'_n(X) &= \frac{1}{2i} \left((2n+1) \frac{i}{2n+1} \left(1 + \frac{iX}{2n+1} \right)^{2n} - (2n+1) \frac{-i}{2n+1} \left(1 - \frac{iX}{2n+1} \right)^{2n} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\left(1 + \frac{iX}{2n+1} \right)^{2n} + \left(1 - \frac{iX}{2n+1} \right)^{2n} \right) \end{aligned}$$

et en évaluant en zéro, $P'_n(0) = 1$. Par conséquent, $\lambda = 1$ et finalement,

$$P_n(X) = X \prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{X^2}{x_j^2} \right)$$

24 Fixons $x \in \mathbb{R}$, et définissons les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = \left(1 + \frac{ix}{n} \right)^n \quad \text{et} \quad v_n = \left(1 - \frac{ix}{n} \right)^n$$

D'après la question 6, ces suites convergent et leurs limites sont données par

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e^{ix} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = e^{-ix}$$

Dès lors, les deux sous-suites $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent respectivement vers les mêmes limites, et donc en remarquant que

$$P_n(x) = \frac{1}{2i} (u_{2n+1} - v_{2n+1})$$

on en déduit que
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sin x$$

d'après la formule d'Euler. Cela étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, il vient que

La suite de fonctions $(P_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction sinus.

25 Soit $t \in \mathbb{R}_+$ et soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq 2$. Comme les fonctions v_k et v_{k-1} ont des définitions différentes selon la valeur de t , on distingue trois cas. Plus précisément :

- Lorsque $t < k-1$, $v_k(t)$ et $v_{k-1}(t)$ sont tous deux égaux à $P_{[t]}(x)$ donc

$$|v_k(t) - v_{k-1}(t)| = 0$$

et le résultat est satisfait dans ce cas.

- Lorsque $k-1 \leq t < k$, on a par définition

$$v_k(t) = P_{[t]}(x) = x \prod_{j=1}^{[t]} \left(1 - \frac{x^2}{\left(\tan \left(\frac{j\pi}{2[t]+1} \right) (2[t]+1) \right)^2} \right)$$

et
$$v_{k-1}(t) = x \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{x^2}{\left(\tan \left(\frac{j\pi}{2[t]+1} \right) (2[t]+1) \right)^2} \right)$$

Mais puisque dans ce cas $\lfloor t \rfloor = k - 1$, ces deux quantités sont égales et on a encore une fois

$$|v_k(t) - v_{k-1}(t)| = 0$$

donc le résultat est vrai.

- Enfin, lorsque $t \geq k$, par définition on a

$$v_k(t) = \left(1 - \frac{x^2}{\left(\tan \left(\frac{k\pi}{2\lfloor t \rfloor + 1} \right) (2\lfloor t \rfloor + 1) \right)^2} \right) v_{k-1}(t)$$

d'où

$$|v_k(t) - v_{k-1}(t)| = \frac{x^2}{\left(\tan \left(\frac{k\pi}{2\lfloor t \rfloor + 1} \right) (2\lfloor t \rfloor + 1) \right)^2} |v_{k-1}(t)|$$

Montrons l'inégalité suivante :

$$\forall u \in \left[0; \frac{\pi}{2} \right[\quad \tan u \geq u$$

La fonction $g : u \mapsto \tan u - u$ est continue et dérivable sur $[0; \pi/2[$, et sa dérivée est donnée par $g'(u) = \tan^2 u$. Sa dérivée est à valeurs positives, donc la fonction g est croissante sur $[0; \pi/2[$ et comme $g(0) = 0$ on a $g(u) \geq 0$ pour tout $u \in [0; \pi/2[$, ce qui prouve l'inégalité.

Puisque $t \geq k$, on a également $\lfloor t \rfloor \geq k$ et alors

$$0 \leq \frac{k\pi}{2\lfloor t \rfloor + 1} < \frac{k\pi}{2\lfloor t \rfloor} \leq \frac{\pi}{2}$$

Ainsi, on peut utiliser l'inégalité que l'on vient de prouver pour minorer la tangente au dénominateur de l'expression précédente. Cela donne

$$|v_k(t) - v_{k-1}(t)| \leq \frac{x^2}{\left(\frac{k\pi}{2\lfloor t \rfloor + 1} (2\lfloor t \rfloor + 1) \right)^2} |v_{k-1}(t)| = \frac{x^2}{k^2\pi^2} |v_{k-1}(t)|$$

En conclusion, on a bien montré que

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \forall k \geq 2 \quad |v_k(t) - v_{k-1}(t)| \leq \frac{x^2}{k^2\pi^2} |v_{k-1}(t)|}$$

26 Soit $t \in \mathbb{R}_+$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. Distinguons deux cas :

- Si $t < k$, alors

$$\begin{aligned} |v_k(t)| &= |P_{\lfloor t \rfloor}(x)| = |x| \prod_{j=1}^{\lfloor t \rfloor} \left| 1 - \frac{x^2}{\left(\tan \left(\frac{j\pi}{2\lfloor t \rfloor + 1} \right) (2\lfloor t \rfloor + 1) \right)^2} \right| \\ &\leq |x| \prod_{j=1}^{\lfloor t \rfloor} \left(1 + \frac{x^2}{\left(\tan \left(\frac{j\pi}{2\lfloor t \rfloor + 1} \right) (2\lfloor t \rfloor + 1) \right)^2} \right) \end{aligned}$$

d'après l'inégalité triangulaire. Dans l'ordre, en appliquant l'inégalité $\tan u \geq u$ valable pour $u \in [0; \pi/2[$ (prouvée à la question précédente), l'inégalité démontrée à la question 2, le fait que $\lfloor t \rfloor < k$, et la croissance de l'exponentielle, il vient

$$|v_k(t)| \leq |x| \prod_{j=1}^{\lfloor t \rfloor} \left(1 + \frac{x^2}{j^2 \pi^2}\right) \leq |x| \exp \left(\sum_{j=1}^{\lfloor t \rfloor} \frac{x^2}{j^2 \pi^2} \right) \leq |x| \exp \left(\sum_{j=1}^k \frac{x^2}{(j\pi)^2} \right)$$

- Lorsque $t \geq k$, la preuve est la même au détail près que dans ce cas on a déjà k au lieu de $\lfloor t \rfloor$ dans la borne supérieure du produit.

Finalement, $\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \forall k \in \mathbb{N}^* \quad |v_k(t)| \leq |x| \exp \left(\sum_{j=1}^k \frac{x^2}{(j\pi)^2} \right)$

27 Pour $n \in \mathbb{N}$ plus grand que 2, et pour $t \in \mathbb{R}_+$, définissons les sommes partielles

$$S_n(t) = \sum_{k=2}^n (v_k(t) - v_{k-1}(t)) \quad \text{et} \quad \tilde{S}_n(t) = \sum_{k=2}^n |v_k(t) - v_{k-1}(t)|$$

Appliquons successivement l'inégalité de la question 25 et celle de la question 26 pour voir que

$$\tilde{S}_n(t) \leq \sum_{k=2}^n \frac{x^2}{k^2 \pi^2} |v_{k-1}(t)| \quad (\text{question 25})$$

$$\leq \frac{x^2}{\pi^2} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} |x| \exp \left(\sum_{j=1}^{k-1} \frac{x^2}{(j\pi)^2} \right) \quad (\text{question 26})$$

La série $\sum_{n \geq 2} 1/n^2$ est une série de Riemann convergente dont on note $c > 0$ la valeur.

Il vient

$$\tilde{S}_n(t) \leq \frac{x^2}{\pi^2} \left(\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \right) |x| \exp \left(\frac{x^2}{\pi^2} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j^2} \right) \leq c \frac{x^2 |x|}{\pi^2} e^{cx^2/\pi^2}$$

Par conséquent, la suite $(\tilde{S}_n(t))_{n \geq 2}$ est une suite croissante (comme somme de termes positifs) et majorée, alors elle converge. Cela veut dire que la suite $(S_n(t))$ converge absolument, et on note $S(t)$ sa valeur. Montrons que cette convergence est uniforme par rapport à $t \in \mathbb{R}_+$, c'est-à-dire montrons que

$$\|S - S_n\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}_+} |S(t) - S_n(t)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Soient $n \geq 2$ et $t \in \mathbb{R}_+$. En appliquant successivement l'inégalité triangulaire, l'inégalité de la question 25 et celle de la question 26, il vient

$$|S(t) - S_n(t)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |v_k(t) - v_{k-1}(t)| \quad (\text{inégalité triangulaire})$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^2}{k^2 \pi^2} |v_{k-1}(t)| \quad (\text{question 25})$$

$$\leq \frac{x^2}{\pi^2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} |x| \exp \left(\sum_{j=1}^{k-1} \frac{x^2}{(j\pi)^2} \right) \quad (\text{question 26})$$

$$|S(t) - S_n(t)| \leq \frac{x^2 |x|}{\pi^2} e^{cx^2/\pi^2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

Cela étant vrai pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on peut passer au supremum à gauche et obtenir

$$\|S - S_n\|_\infty \leq \frac{x^2 |x|}{\pi^2} e^{cx^2/\pi^2} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

À droite de cette inégalité on reconnaît le reste d'une série de Riemann convergente, donc il tend vers 0 et alors $\|S - S_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. En conclusion,

La série de fonctions $\sum_{k \geq 2} (v_k - v_{k-1})$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

28 Commençons par calculer la limite de $v_k(t)$ lorsque t tend vers l'infini, et $k \in \mathbb{N}^*$ est fixé. Comme on va faire tendre t vers l'infini, on peut déjà supposer $t \geq k$, si bien que $v_k(t)$ s'écrit

$$v_k(t) = x \prod_{j=1}^k \left(1 - \frac{x^2}{\left(\tan \left(\frac{j\pi}{2 \lfloor t \rfloor + 1} \right) (2 \lfloor t \rfloor + 1) \right)^2} \right)$$

Comme $\tan u \underset{u \rightarrow 0}{\sim} u$, pour tout $j \in \llbracket 1; k \rrbracket$, on a

$$\tan \left(\frac{j\pi}{2 \lfloor t \rfloor + 1} \right) (2 \lfloor t \rfloor + 1) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{j\pi}{2 \lfloor t \rfloor + 1} (2 \lfloor t \rfloor + 1) = j\pi$$

si bien que, par opération sur les limites,

$$1 - \frac{x^2}{\left(\tan \left(\frac{j\pi}{2 \lfloor t \rfloor + 1} \right) (2 \lfloor t \rfloor + 1) \right)^2} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 1 - \frac{x^2}{j^2 \pi^2}$$

On peut donc passer à la limite dans le produit définissant $v_k(t)$ puisque c'est un produit fini, et cela donne

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} v_k(t) = x \prod_{j=1}^k \left(1 - \frac{x^2}{(j\pi)^2} \right)$$

Ensuite, calculons la limite de $v_k(t)$ lorsque k tend vers l'infini et $t \in \mathbb{R}_+$ est fixé. Puisque cette fois c'est k qui tend vers l'infini, on peut supposer $t < k$ sans perte de généralité. De cette manière, on a $v_k(t) = P_{\lfloor t \rfloor}(x)$ qui ne dépend pas de k , et finalement

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} v_k(t) = P_{\lfloor t \rfloor}(x)$$

29 Tout d'abord, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$S(t) = \sum_{k=2}^{+\infty} (v_k(t) - v_{k-1}(t)) = \lim_{k \rightarrow +\infty} v_k(t) - v_1(t) = P_{\lfloor t \rfloor}(x) - v_1(t)$$

d'après la question 28. Par conséquent, en utilisant la question 24, et encore une fois la question 28, on a

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = \sin x - x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2} \right) \quad (1)$$

Toutefois, on a montré en question 27 que la série $\sum_{k \geq 2} (v_k - v_{k-1})$ converge uniformément, et d'après la question 28,

$$\forall k \geq 2 \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} (v_k(t) - v_{k-1}(t)) = x \prod_{j=1}^k \left(1 - \frac{x^2}{(j\pi)^2}\right) - x \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{x^2}{(j\pi)^2}\right)$$

Le théorème de la double limite s'applique et donne

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \sum_{k=2}^{+\infty} (v_k(t) - v_{k-1}(t)) \\ &= \sum_{k=2}^{+\infty} \lim_{t \rightarrow +\infty} (v_k(t) - v_{k-1}(t)) \\ &= \sum_{k=2}^{+\infty} \left(x \prod_{j=1}^k \left(1 - \frac{x^2}{(j\pi)^2}\right) - x \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{x^2}{(j\pi)^2}\right) \right) \end{aligned}$$

On reconnaît à présent une série télescopique, ainsi

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = x \prod_{j=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{(j\pi)^2}\right) - x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \quad (2)$$

Les égalités (1) et (2) permettent donc de conclure que

$$\boxed{\sin(x) = x \prod_{j=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{(j\pi)^2}\right)}$$

30 Notons $I = [-\pi/2; \pi/2] \setminus \{0\}$ et prenons $x \in I$. D'après la question 29, la fonction $f : x \mapsto \sin(x)/x$ s'écrit

$$\forall x \in I \quad f(x) = \frac{\sin x}{x} = \prod_{n=1}^{+\infty} (1 + f_n(x))$$

où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a défini la fonction

$$f_n : \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto -\frac{x^2}{n^2\pi^2} \end{cases}$$

Les fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , et elles prennent leurs valeurs dans $[-1/4; 0[\subset]-1; +\infty[$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in I$,

$$|f_n(x)| = \frac{x^2}{n^2\pi^2} \leq \frac{1}{4n^2}$$

car $|x| \leq \pi/2$. En passant au supremum sur x à gauche, on obtient donc que

$$\|f_n\|_{\infty}^I \leq \frac{1}{4n^2}$$

Le terme à droite de cette inégalité est le terme général d'une série de Riemann convergente, donc par majoration la série $\sum \|f_n\|_{\infty}^I$ converge. Cela veut dire que la série de fonctions $\sum |f_n|$ converge normalement sur I , et en particulier elle converge uniformément sur I .

De la même manière, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in I$,

$$\left| \frac{f'_n}{1 + f_n} \right| = \frac{2|x|}{n^2\pi^2 - x^2} \leq \frac{2\frac{\pi}{2}}{n^2\pi^2 - \frac{\pi^2}{4}} = \frac{4}{\pi(4n^2 - 1)}$$

donc en passant au supremum sur $x \in I$ à gauche, on obtient

$$\left\| \frac{f'_n}{1 + f_n} \right\|_{\infty, I} \leq \frac{4}{\pi(4n^2 - 1)} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

À droite, on a le terme général d'une série convergente donc par théorème de comparaison on en déduit comme avant que la série de fonctions $\sum f'_n/(1 + f_n)$ converge normalement sur I , et en particulier elle converge uniformément sur I .

On dispose de toutes les hypothèses requises pour pouvoir appliquer le résultat de la question 19, qui donne alors que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , et que

$$\forall x \in I \quad \frac{f'(x)}{f(x)} = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{f'_j(x)}{1 + f_j(x)} = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{-2x}{(j\pi)^2 - x^2}$$

Or, pour tout $x \in I$,

$$f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$$

d'où

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\frac{x \cos x - \sin x}{x^2}}{\frac{\sin x}{x}} = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x}$$

et cela montre que

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\} \quad \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{x} - \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{2x}{(j\pi)^2 - x^2}$$

31 Suivons l'indication et calculons (sous réserve d'existence)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2 \sin x}$$

Pour cela, utilisons les développements limités du sinus et du cosinus

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2) \quad \text{et} \quad \sin x = x - \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)$$

qui donnent

$$\begin{aligned} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2 \sin x} &= \frac{x \left(1 - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)\right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)\right)}{x^2 \left(x + o_{x \rightarrow 0}(x)\right)} \\ &= \frac{-\frac{1}{3}x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3)}{x^3 + o_{x \rightarrow 0}(x^3)} \\ &= \frac{-\frac{1}{3} + o_{x \rightarrow 0}(1)}{1 + o_{x \rightarrow 0}(1)} \\ \frac{x \cos x - \sin x}{x^2 \sin x} &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2 \sin x} = -\frac{1}{3}$$

Or, d'après la question 30,

$$\frac{x \cos x - \sin x}{x^2 \sin x} = \frac{1}{x} \left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = - \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{2}{(j\pi)^2 - x^2}$$

donc cela montre que
$$\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{(j\pi)^2 - x^2} = \frac{1}{6}$$

Vérifions que l'on peut intervertir la limite avec la série. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $g_n : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$g_n(x) = \frac{1}{(n\pi)^2 - x^2}$$

Puisque lorsque $x \in \mathbb{I}$ on a $|x| \leq \pi/2$, il vient

$$|g_n(x)| \leq \frac{1}{(n\pi)^2 - \frac{\pi^2}{4}} = \frac{4}{\pi^2(4n^2 - 1)}$$

donc en passant au supremum sur x à gauche,

$$\|g_n\|_{\infty}^{\mathbb{I}} \leq \frac{4}{\pi^2(4n^2 - 1)} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Le théorème de comparaison montre que $\|g_n\|_{\infty}^{\mathbb{I}}$ est le terme général d'une série convergente, ce qui signifie que la série de fonctions $\sum g_n$ converge normalement sur $\mathbb{I}$, et en particulier elle converge uniformément sur $\mathbb{I}$. De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad g_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{(n\pi)^2}$$

On peut alors appliquer le théorème de la double limite, qui donne

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n\pi)^2 - x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(n\pi)^2 - x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 \pi^2} = \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

En conclusion,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

V. AUTOUR DE LA FONCTION Γ

[32] Pour $(x, t) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, notons $f(x, t) = t^{x-1}e^{-t}$. Vérifions les hypothèses du théorème de continuité d'une intégrale à paramètre.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, l'application $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, l'application $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Fixons $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ avec $a < b$, et considérons le segment $K = [a; b]$. Lorsque $t \in [0; 1[$, l'application $x \mapsto t^{x-1}$ est décroissante sur K donc $t^{x-1} \leq t^{a-1}$ pour tout $x \in K$. Au contraire, lorsque $t \in [1; +\infty[$, l'application $x \mapsto t^{x-1}$ est croissante sur K et donc $t^{x-1} \leq t^{b-1}$ pour tout $x \in K$. Dans tous les cas,

$$\forall x \in K \quad t^{x-1} \leq \max(t^{a-1}, t^{b-1}) \leq t^{a-1} + t^{b-1}$$

En définissant la fonction $\varphi : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+$ par $\varphi(t) = (t^{a-1} + t^{b-1})e^{-t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a la domination

$$\forall x \in K \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad |f(x, t)| \leq \varphi(t)$$

La fonction φ est continue par morceaux, montrons qu'elle est également intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. D'une part,

$$t^2 \varphi(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0 \quad \text{donc} \quad \varphi(t) = o_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right)$$

et alors la fonction φ est intégrable sur $[1; +\infty[$ par théorème de comparaison. D'autre part,

$$t^{1-a/2} \varphi(t) = (t^{a/2} + t^{b-a/2})e^{-t} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0 \quad \text{donc} \quad \varphi(t) = o_{t \rightarrow 0} (t^{a/2-1})$$

qui est une expression intégrable sur $]0; 1]$ puisque $a/2 - 1 > -1$ par critère de Riemann. D'où l'intégrabilité de φ sur $\mathbb{R}_+^*$.

D'après le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre, la fonction Γ est définie et continue sur tout segment $[a; b] \subset \mathbb{R}_+^*$, d'où

La fonction Γ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Dans l'ancien programme, il était également requis de vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. C'est une condition suffisante pour montrer que l'intégrale à paramètre est bien définie. Or, cette condition a été retirée dans les nouveaux programmes car elle est en fait une conséquence directe de l'hypothèse de domination. En effet, s'il existe une fonction φ intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $|f(x, t)| \leq \varphi(t)$ pour tout $(x, t) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, alors par comparaison on obtient immédiatement que la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

33 Montrons par récurrence que la propriété

$$\mathcal{P}(n) : \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad g_n(x) = \frac{n!}{\prod_{k=0}^n (x+k)}$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- $\mathcal{P}(1)$ est vérifiée car, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$g_1(x) = \int_0^1 u^{x-1}(1-u) du = \left[\frac{u^x}{x} - \frac{u^{x+1}}{x+1} \right]_0^1 = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{x(x+1)}$$

- $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$: supposons que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est satisfaite à un rang $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, et montrons $\mathcal{P}(n+1)$. Pour cela, fixons $x \in \mathbb{R}_+^*$ et intégrons par parties dans l'intégrale définissant $g_{n+1}(x)$, et intégrant la fonction $u \mapsto u^{x-1}$ (dont la primitive $u \mapsto u^x/x$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$) et en dérivant la fonction $u \mapsto (1-u)^{n+1}$ (qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$) :

$$\begin{aligned} g_{n+1}(x) &= \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{n+1} du \\ &= \left[\frac{u^x}{x}(1-u)^{n+1} \right]_0^1 + \frac{n+1}{x} \int_0^1 u^x(1-u)^n du \\ g_{n+1}(x) &= \frac{n+1}{x} g_n(x+1) \end{aligned}$$

Ainsi, d'après l'hypothèse de récurrence,

$$g_{n+1}(x) = \frac{n+1}{x} \frac{n!}{\prod_{k=0}^n (x+1+k)} = \frac{n+1}{x} \frac{n!}{\prod_{k=1}^{n+1} (x+k)} = \frac{(n+1)!}{\prod_{k=0}^{n+1} (x+k)}$$

et cela montre $\mathcal{P}(n+1)$.

• Conclusion :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad g_n(x) = \frac{n!}{\prod_{k=0}^n (x+k)}$$

34 Fixons $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$, notons

$$f_n(t) = \mathbb{1}_{[0;n]}(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}$$

où $\mathbb{1}_{[0;n]}$ désigne la fonction indicatrice de l'ensemble $[0;n]$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $f_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(t) = t^{x-1} e^{-t}$ d'après la question 6.
- La fonction f ainsi définie est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on a la domination $|f_n(t)| \leq f(t)$. En effet, lorsque $t \in [0;n]$, d'après l'inégalité de convexité $1+u \leq e^u$ valable pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$0 \leq 1 - \frac{t}{n} \leq e^{-t/n} \quad \text{donc} \quad 0 \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$$

De plus, on a montré à la question 33 que la fonction f est intégrable.

D'après le théorème de convergence dominée, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \int_0^{+\infty} f(t) dt$$

et cela se réécrit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = \Gamma(x)$$

35 Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Observons qu'en effectuant le changement de variable affine $t = nu$,

$$\int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = \int_0^1 (nu)^{x-1} (1-u)^n n du = n^x g_n(x)$$

Ainsi, d'après l'expression prouvée à la question 33,

$$\int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = \frac{n^x n!}{\prod_{k=0}^n (x+k)}$$

et comme l'on sait, grâce à la question 34, que cette intégrale converge vers $\Gamma(x)$ lorsque n tend vers l'infini, il vient

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^x n!}{\prod_{k=0}^n (x+k)}$$

36 Fixons $x \in]0; 1[$. D'après la question 35,

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x) \quad \text{où} \quad P_n(x) = \frac{n^x n!}{\prod_{k=0}^n (x+k)} \frac{n^{1-x} n!}{\prod_{k=0}^n (1-x+k)}$$

Mais en effectuant le changement d'indice $k' = k + 1$ dans le second produit du dénominateur, on voit que

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{n(n!)^2}{\left(\prod_{k=0}^n (x+k)\right) \left(\prod_{k'=1}^{n+1} (k'-x)\right)} \\ &= \frac{n}{x(n+1-x)} \frac{(n!)^2}{\prod_{k=1}^n (x+k)(k-x)} \\ &= \frac{n}{x(n+1-x)} \frac{\prod_{k=1}^n k^2}{\prod_{k=1}^n (k^2 - x^2)} \\ &= \frac{n}{x(n+1-x)} \frac{1}{\prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)} \\ P_n(x) &= \frac{\pi n}{n+1-x} \frac{1}{(\pi x) \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{(\pi x)^2}{(\pi k)^2}\right)} \end{aligned}$$

On reconnaît ici un produit qui converge vers la fonction $\sin(\pi x)$ d'après la question 29, donc en faisant tendre n vers l'infini,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)} \quad \text{car} \quad \frac{n\pi}{n+1-x} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \pi$$

et alors

$$\boxed{\forall x \in]0; 1[\quad \Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}}$$

37 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, définissons

$$a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$$

et montrons que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ainsi définie est convergente. La convergence de cette suite équivaut à la convergence de la série $\sum (a_{n+1} - a_n)$, donc on en revient à montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \ln \left(\frac{n+1}{n} \right)$$

est le terme général d'une série convergente. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est de signe constant. En effet,

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \ln \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \leq \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} \leq 0$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ d'après l'inégalité $\ln(1+u) \leq u$ valable pour tout $u > -1$. De plus, en faisant un développement limité à l'ordre 2,

$$u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{n+1} + \left(-\frac{1}{n+1} - \frac{1}{2(n+1)^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$$

donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est le terme général d'une série convergente par théorème de comparaison et critère de Riemann, et on en déduit que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge. On peut noter $\gamma \in \mathbb{R}$ la valeur de sa limite, et ainsi,

$$a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \gamma + o(1)$$

ou encore

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \ln n + \gamma + o(1) \text{ pour un certain } \gamma \in \mathbb{R}.$$

38 Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Repartons du résultat de la question 35 :

$$\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x) \quad \text{où} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad P_n(x) = \frac{n^x n!}{\prod_{k=0}^n (x+k)}$$

En écrivant que $n^x = e^{x \ln n}$, en utilisant le résultat de la question 37 pour remplacer $\ln n$ et en développant la factorielle en produit, on voit que

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{e^{x \ln n}}{x} \prod_{k=1}^n \frac{k}{x+k} = \frac{1}{x} \exp \left(x \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \gamma + o_{n \rightarrow +\infty}(1) \right) \right) \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x}{k} \right)^{-1} \\ &= \frac{e^{-\gamma x}}{x} e^{o(1)} \prod_{k=1}^n e^{x/k} \left(1 + \frac{x}{k} \right)^{-1} \end{aligned}$$

Comme $e^{o(1)}$ converge vers 1 lorsque n tend vers l'infini, un passage à la limite montre comme désiré que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad \Gamma(x) = \frac{e^{-\gamma x}}{x} \prod_{n=1}^{+\infty} e^{x/n} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^{-1}$$