École Polytechnique - ESPCI – PC

Algèbre

411. Un graphe est un couple $G = (S, A)$ où S est un ensemble fini et A un ensemble de paires de S. Les éléments de S s'appellent les sommets de G et ceux de A les arêtes de G. Soient $G = (S, A)$ et $G' = (S', A')$ deux graphes et f une application de S dans S'. On dit que f est un morphisme de G dans G' si $\forall (u, v) \in S^2, \{u, v\} \in A \Rightarrow \{f(u), f(v)\} \in A'$. On dit que f est un isomorphisme de G dans G' si
$\forall (u, v) \in S^2, \{u, v\} \in A \iff \{f(u), f(v)\} \in A'$.
Donner une majoration du nombre de graphes à n sommets et k arêtes deux à deux non isomorphes.

412. ⋆ Soient $n \geqslant 2$ et $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe un entier $i \in [\![0, n]\!]$ tel que l'on ait $\left|\sum_{k=0}^{i} a_k - \sum_{k=i+1}^{n} a_k\right| \leqslant \sup_{0 \leqslant k \leqslant n} |a_k|$.

413. ⋆⋆ Soit $P = X^2 + c_1 X + c_0$ à coefficients dans $\mathbb{N}$. Déterminer les suites d'entiers naturels (a_n) telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(a_n) = a_{n+1} a_{n+2}$.

414. Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ pour lesquelles il existe un polynôme P à coefficients dans $\mathbb{N}$, unitaire et de degré k tel que $\forall n \in \mathbb{N}, P(a_n) = \prod_{j=1}^{k} a_{n+j}$.

415. Soient A et B deux éléments de $\mathbb{R}[X]$ dont toute combinaison linéaire réelle est scindée ou nulle, x et y deux racines de A telles que $x < y$. Montrer que B a une racine dans $[x, y]$.

416. Calculer $\displaystyle\sum_{z\in\mathbb{U}_n} \frac{1}{2-z}$.

417. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. Soient $u_1, \ldots, u_n$ des nombres complexes de module 1. Montrer que $\displaystyle\prod_{i\neq j} |u_i - u_j|^{\frac{1}{n(n-1)}} \leqslant n^{\frac{1}{n}}$.

418. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer le module de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(2i\pi\frac{k^2}{n}\right)$.

419. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé sur $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que le polynôme $\mathrm{Re}\,(P(X + ia))$, polynôme dont les coefficients sont les parties réelles du polynôme $P(X + ia)$, est scindé sur $\mathbb{R}$.

420. On note $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| \leqslant 1\}$ et $\|P\| = \sup_{z\in\mathbb{D}} |P(z)|$ pour $P \in \mathbb{C}[X]$. Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, on définit la suite $(P_n)_{n\geqslant 0}$ en posant $P_0 = P$ puis $P_{n+1} = (P_n')^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que, si $\|P\| < \varepsilon$, alors $\lim_{n\to+\infty} \|P_n\| = 0$.

421. Soit F un polynôme non constant à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers $n \in \mathbb{Z}$ tels que $F(n)$ ne soit pas premier.

422. Montrer que $\mathbb{R}^n$ ne s'écrit pas comme réunion finie de sous-espaces vectoriels stricts.

423. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour n'importe quelle permutation de ses n^2 coefficients, on obtienne toujours une matrice inversible.

424. Soient E et F deux $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. Une application $f : E \mapsto F$ est dite antilinéaire si $\forall x, y \in E, \forall\lambda \in \mathbb{C}, f(x + \lambda y) = f(x) + \overline{\lambda} f(y)$ Pour quels entiers n existe-t-il $f : \mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{C}^n$ antilinéaire telle que $f \circ f = -\,\mathrm{id}$?

425. Soient $n \geqslant 2$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Trouver les valeurs propres de A et leurs multiplicités.

426. Soient $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$, $(b_1,\dots,b_n)\in\mathbb{R}^n$ et $A=(a_i+\delta_{i,j}b_j)_{1\leqslant i,j\leqslant n}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
a) Calculer $\det(A)$.
b) La matrice A est-elle diagonalisable ?

427. Soient A et $B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes ;
(i) A et B admettent au moins une valeur propre commune,
(ii) il existe $P\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $PA=BP$.

428. Soient $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A^2=B^2=-I_n$. Montrer que A et B sont semblables.

429. Soit n un entier naturel impair. Soient $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB+BA=A$. Montrer que A et B ont un vecteur propre commun. Le résultat persiste-t-il pour n pair ?

430. Soient A et B des matrices de $\mathcal{M}_n\left(\mathbb{R}\right)$ telles que AB est diagonalisable.
a) Est-ce que que BA est diagonalisable ?
b) Montrer que :
$\dim\left(\operatorname{Ker}\left(AB\right)\right)\leqslant\dim\left(\operatorname{Ker}\left(B\left(AB\right)A\right)\right)\leqslant\dim\left(\operatorname{Ker}\left(A\left(BABA\right)B\right)\right)\leqslant\dim\left(\operatorname{Ker}\left(AB\right)\right)$.
c) Est-ce que que $\left(BA\right)^2$ est diagonalisable ?

431. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que les valeurs propres complexes de A ont une partie réelle strictement négative et que celles de B ont une partie réelle négative. Soit $C\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique matrice $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $C=AM+MB$.

432. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, soient S et S' diagonalisables, N et N' nilpotentes. On suppose $NS=SN$ et $N'S'=S'N'$ et $S+N=S'+N'$. Montrer que $S=S'$ et $N=N'$.

433. Montrer que, pour toute matrice $A\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, il existe un unique couple (B,C) de matrices symétriques positives telles que $A=B-C$ et $BC=CB=0$.

434. ***a)*** Montrer que toute matrice réelle de taille n symétrique positive admet une racine carrée symétrique positive.
b) Soient S et A deux matrices de taille n avec S symétrique définie positive et A antisymétrique. Montrer que AS est $\mathbb{C}$-diagonalisable.

435. Soient $A\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $k\in\mathbb{N}^*$. Pour $H\in\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on pose $\varphi_k(H)=\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1}A^iHA^{k-1-i}$.
a) Montrer que φ_k est un endomorphisme de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
b) À quelle condition φ_k est-elle injective ? surjective ? bijective ?

436. ⋆ ⋆ Soit $f\in\mathcal{L}\left(S_n(\mathbb{R}),\mathbb{R}\right)$ telle que $\forall M\in\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}),\ f(M)\geqslant 0$. Montrer que f est une combinaison linéaire des formes linéaires $\varphi_X : M\mapsto X^TMX$ avec $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

437. Soit n un entier naturel impair. Soient A et B dans $S_n(\mathbb{R})$. On note $C(A)$ (resp. $C(B)$) l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec A (resp. B).

Montrer que $C(A) \cap C(B) = \mathbb{R}I_n$ si et seulement s'il n'existe pas deux sous-espaces F et G de $\mathbb{R}^n$, stables par A et B, de dimension $\geqslant 1$, tels que $F \oplus G = \mathbb{R}^n$.

438. Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ deux matrices dont les valeurs propres sont strictement supérieures à 1. Montrer que les valeurs propres de AB sont strictement supérieures à 1.

Analyse

439. ⋆⋆ On note E l'ensemble des polynômes non nuls à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$ et A l'ensemble des racines des polynômes appartenant à E. Déterminer l'adhérence de A.

440. ⋆ Chercher les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ bijective, continue, dont la réciproque est continue et telle que, pour toute droite $\mathcal{D}$, $f(\mathcal{D})$ est une droite.

441. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $P_0 \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\|f - P_0\|_\infty = \min\{\|f - P\|_\infty, P \in \mathbb{R}_n[X]\}$.

442. Soient $n \in \mathbb{N}$, $a < b$ deux réels, $I = [\,a, b\,]$ et $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ dans I. On note P_j l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à n qui vaut 1 en x_j et 0 en chaque x_i pour $i \neq j$. Pour $f \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ et $t \in I$, on note $L(f)(t) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) P_j(t)$ et $\varphi(t) = \sum_{j=0}^{n} |P_j(t)|$. Montrer que $\|L(f)\|_\infty \leqslant \|\varphi\|_\infty \cdot \|f\|_\infty$ et étudier le cas d'égalité.

443. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convexe, c'est-à-dire telle que, pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^n$, $t \mapsto f(u + vt)$ est convexe. Montrer que f est continue.

444. Soit E une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^n$ telle que $B(0,1) \subset E$. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M(E) \subset E$. Montrer que $|\det(M)| \leqslant 1$.

445. Soit $A : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une fonction continue. Soient $t_0 \in \mathbb{R}$ et $p = \operatorname{rg}(A(t_0))$. Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $t \in [\,t_0 - \varepsilon\,; t_0 + \varepsilon\,]$, on ait $\operatorname{rg}(A(t)) \geqslant p$.

446. ⋆⋆ On note $a = \sqrt{2}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $S_n = \dfrac{1}{n} \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ a < \frac{k}{n} < a+1}} \dfrac{1}{\sqrt{\frac{k}{n} - a}}$. Étudier la convergence de la suite (S_n).

447. Pour $x \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = x^n + x^{1/n}$. Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique x_n tel que $f_n(x_n) = a$. Étudier la limite de (x_n) en fonction de a.

448. Étudier la nature de $\sum u_n$ où $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

449. Soit (a_n) une suite de réels de $]0,1[$ telle que la série $\sum \frac{a_n}{\ln(1/a_n)}$ converge. Montrer que la série $\sum \frac{a_n}{\ln(n)}$ converge.

450. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe vérifiant, pour $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n} a_n$.

a) Trouver α tel qu'il existe C vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $|a_n| \leqslant Cn^{\alpha}$

b) On suppose $a_0 > 0$. Montrer que $\sum a_n$ diverge.

451. Prouver que la série de terme général 2^{-2^n} converge et que sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-2^n}$ est irrationnelle.

452. Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\sum a_n$ converge. Soit (u_n) une suite réelle. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k u_{n-k}}{\sum_{k=0}^{n} a_k}$.

a) Montrer que, si $\sum u_n$ converge absolument, alors $\sum v_n$ converge.

b) Est-ce toujours le cas si $\sum u_n$ ne converge pas absolument ?

453. Soit $f \in [\,0\,;+\infty\,[\, \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\int_0^{+\infty} |f'(t)|\,\mathrm{d}t$ converge. Montrer que $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\sum f(n)$ converge.

454. Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer l'inégalité $\prod_{i=1}^{k}(1+x_i^k) \geqslant \left(1 + \prod_{i=1}^{k} x_i\right)^k$.

455. Déterminer les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :
$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, a < b, f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$

456. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in\,]0,1[$ distinct de $\frac{1}{n+2}$.

a) Trouver toutes les fonctions f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ telles que, pour tous réels a et b, on ait $f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\lambda b + (1-\lambda a))$.

b) Étudier le cas $\lambda = \frac{1}{n+2}$.

457. Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels et $P : x \mapsto \sum_{k=1}^{n} a_k \sin(kx)$. Pour tout entier $r \in \mathbb{N}$, on suppose que $(-1)^r P^{(2r)}$ est positive sur $[\,0\,;\pi\,]$. Montrer que P est la fonction $x \mapsto a_1 \sin(x)$.

458. Soit $(u_{k,n})_{(k,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ une suite doublement indexée à valeurs complexes. On suppose que, pour toute suite complexe $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée, $\lim\limits_{k\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} v_n u_{k,n} = 0$.

Montrer que $\lim\limits_{k\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} |u_{k,n}| = 0$.

459. ★★ Soit $f \in \mathcal{C}^0([\,0\,;2\pi\,], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(2\pi)$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que, pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$, on a $\int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t = 0$. Quel est le nombre minimal d'annulations de f ?

460. ★ ★ Soient $f, g \in \mathcal{C}^0([\,0\,;1\,], \mathbb{R})$ telles que $\int_0^1 fg = 0$.

a) Montrer que $\int_0^1 f^2 \left(\int_0^1 g\right)^2 + \int_0^1 g^2 \left(\int_0^1 f\right)^2 \geqslant 4\left(\int_0^1 f \int_0^1 g\right)^2$.

b) Montrer que $\int_0^1 f^2 \int_0^1 g^2 \geqslant 4\left(\int_0^1 f \int_0^1 g\right)^2$.

461. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telle que f^2 et $(f'')^2$ sont intégrables sur $\mathbb{R}^+$ et $f(0)f'(0) = 0$. Lorsque cela a un sens, on pose $\|g\| = \sqrt{\int_0^{+\infty} g^2(t)\,\mathrm{d}t}$. Montrer que $(f')^2$ est intégrable et $\|f'\|^2 \leqslant \|f\| \,.\, \|f''\|$.

462. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ telle que $\int_0^{+\infty} f^2(t)\,\mathrm{d}t$ converge. On pose $g : x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{g^2(x)}{x^2}\mathrm{d}x$ converge.

463. ***a)*** Pour $p \in \mathbb{R}$, calculer $\sup\left\{xp - \frac{x^2}{2}\ ;\ x \in \mathbb{Q}\right\}$.

b) Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ contenant les fonctions constantes et tel que :
- pour toutes $f, g \in F$, la fonction $x \mapsto \max(f(x), g(x))$ est dans F ;
- pour toute suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ de fonctions de F qui tend simplement vers une fonction f, la fonction f appartient à F.

Montrer que, si $f, g \in F$, alors $fg \in F$.

464. Pour $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$. On admet que, si f est continue, alors (P_n) tend uniformément vers f sur $[0,1]$.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $f : [\,0,1\,] \to \mathbb{R}$ afin qu'il existe une suite de polynômes à coefficients entiers qui converge uniformément vers f.

465. Soit $f : z \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^5\left(1 + \frac{i}{n^3} - z\right)}$.
a) Montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0.
b) Montrer que la restriction de f à l'ensemble des nombres complexes de module 1 n'est pas continue.

466. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = xf'(x/2)$.
a) Chercher les $f \in \mathcal{S}$ développables en série entière.
b) L'espace $\mathcal{S}$ est-il de dimension finie ?

467. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite qui tend vers 0. Pour $t \in \,]-1,1[$, on pose $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n t^n$.
a) Vérifier que f est bien définie sur $]-1\,;1\,[$.
b) Montrer que $\lim_{t\to 1^-} tf(t) = 0$.
c) On suppose de plus qu'il existe des réels $a_1,\dots,a_r$ et $0 < \theta_1 < \cdots < \theta_r < \pi$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sum_{k=1}^{r} a_k \cos(n\theta_k)$. Montrer que $a_k = 0$ pour tout $k \in [\![1,r]\!]$.

468. ★★ La fonction $f : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^{k!}$ admet-elle une limite lorsque x tend vers 1^- ?

469. Soit $(a_{k,n})_{(k,n)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de nombres complexes telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série entière $f_n : z \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,n} z^k$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1. On note B l'ensemble des nombres complexes de module $\leqslant 1$. On suppose que la suite (f_n) converge simplement sur B et qu'il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $z \in B$, $|f_n(z)| \leqslant M$. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $\{z \in \mathbb{C},\ |z| \leqslant r\}$ pour tout $r < 1$.

470. Soient U un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$ et f une fonction de U dans $\mathbb{C}$ développable en série entière au voisinage de 0 telle que $f(z) \underset{z\to 0}{=} O(z^k)$. Montrer que, pour $r > 0$ assez petit, il existe au moins $2k$ nombres complexes z de module r tels que $f(z) \in \mathbb{R}$.

471. ★★ Pour $x \geqslant 0$, on pose $I(x) = \int_0^{\pi/2} \cos(x\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$.
a) Écrire $I(x)$ sous la forme d'une série.
b) Montrer que $I(x) = \mathcal{O}(x^{-1/4})$ quand x tend vers $+\infty$.

472. On admet le théorème d'approximation de Weierstrass. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soient $a, b > 0$. On suppose que $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus [-a\,;a]$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $\hat{f}(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt}\,\mathrm{d}t$.

a) On suppose que $\hat{f}(x) = 0$ pour tout $x \in [-b\,;b]$. Montrer que $f = 0$.

b) On suppose que $\hat{f}(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus [-b\,;b]$. Montrer que $f = 0$.

473. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle : $xy'' + y' - 4xy = 0$.
Ind. Chercher les solutions développables en série entière.

474. Soient $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrable et $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant $(E) : y'' - py = 0$.

a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} y'(x) = 0$.

b) On admet que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, il existe y vérifiant (E) et $(y(0), y'(0)) = (a, b)$. Montrer que (E) admet une solution non bornée.

475. Soit $X : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^{2n}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $X'(t) = JSX(t)$, où $J = \begin{pmatrix} O_n & -I_n \\ I_n & O_n \end{pmatrix}$ et $S \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que X est bornée sur $\mathbb{R}$.

476. Déterminer les extrema globaux et locaux de $f : M \in \mathrm{SO}_4(\mathbb{R}) \mapsto \mathrm{tr}(A)$.

477. Soient $d \in \mathbb{N}$ et $\Omega \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$. On suppose que $\nabla(\Omega)(0) = 0$ et on note $D_a^2(\Omega)$ la hessienne en a de Ω. On suppose que $\mathrm{Im}(D_a^2(\Omega)) = F$, où F est indépendant de a et de rang p.
Montrer qu'il existe un changement de coordonnées f (c'est-à-dire une application de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$) tel que, pour tout $(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $(\Omega \circ f)(x_1, \ldots, x_d)$ ne dépende que de $(x_1, \ldots, x_p)$.

478. Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une suite (f_n) de fonctions dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ et une suite (x_n) d'éléments de $\mathbb{R}^N$ qui tend vers 0 telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f - \varphi_n$ admette un minimum local en x_n.

Probabilités

479. On lance une pièce une infinité de fois. On note S_n le nombre de successions de deux pile consécutifs dans les n premiers lancers.

a) Trouver $\mathbf{E}(S_n)$ et $\mathbf{V}(S_n)$.

b) On pose $T = \min\{n \in \mathbb{N},\ S_n = 1\}$. Calculer $G_T(t)$ et en déduire sa loi.

480. ★★ Soit $f : [0\,;1] \to \mathbb{R}$ une fonction croissante. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que la fonction $p_n : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\Big(\frac{k}{n}\Big)\, x^k(1-x)^{n-k}$ est croissante sur $[0, 1]$. Interpréter d'un point de vue probabiliste.

481. ★★ On étudie un groupe de cellules. À l'instant initial, $n = 0$, il y en a une. À chaque instant, chaque cellule peut de façon équiprobable : mourir, rester telle qu'elle est, se diviser en 2, se diviser en 3. Calculer la probabilité que le groupe disparaisse.

482. ★★ Soient $p \in]0, 1[$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définie par $X_0 = 0$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = X_n + 1$ avec une probabilité p et $X_{n+1} = 0$ avec probabilité $1 - p$. Déterminer la loi de X_n, son espérance et sa variance.

483. Soit Ω un ensemble. On dit que $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ est une classe monotone si elle vérifie :
(i) $\Omega \in \mathcal{M}$, (ii) $\mathcal{M}$ est stable par union croissante,
(iii) si $A, B \in \mathcal{M}$ et $B \subset A$, alors $A \setminus B \in \mathcal{M}$.
a) Montrer qu'une intersection de classes monotones est une classe monotone.
b) Montrer qu'une classe monotone stable par intersection finie est une tribu.
c) Soit $C \subset \mathcal{P}(\Omega)$ stable par intersection finie. Montrer que la classe monotone D engendrée par C (c'est-à-dire la plus petite classe monotone contenant C) est une tribu.