

1. PRÉLIMINAIRES

1 Comme $R \in O_d(\mathbb{R})$, par définition, on a $R^\top R = I_d$ donc

$$1 = \det(I_d) = \det(R^\top R) = \det(R^\top) \det(R) = \det(R)^2 \in \mathbb{R}$$

ce qui assure que

$$\det(R) \in \{-1, +1\}$$

2 L'application $(A, B) \mapsto \langle A, B \rangle = \text{tr}(A^\top B)$ est une forme bilinéaire de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ car

- la transposition est un endomorphisme de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$;
- les multiplications à droite et à gauche par une matrice de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ sont aussi des endomorphismes de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$;
- la trace est une forme linéaire de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

Montrons que $(A, B) \mapsto \langle A, B \rangle = \text{tr}(A^\top B)$ est symétrique. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})^2$.

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^\top B) = \text{tr}((A^\top B)^\top) = \text{tr}(B^\top (A^\top)^\top) = \text{tr}(B^\top A) = \langle B, A \rangle$$

Ainsi, $(A, B) \mapsto \langle A, B \rangle = \text{tr}(A^\top B)$ est symétrique. Montrons maintenant qu'elle est définie positive. Considérons $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. Notons $A_{i,j}$ pour $(i, j) \in \llbracket 1; d \rrbracket^2$ ses coefficients.

$$\langle A, A \rangle = \text{tr}(A^\top A) = \text{tr}\left(\left(\sum_{k=1}^d A_{k,i} A_{k,j}\right)_{(i,j) \in \llbracket 1; d \rrbracket^2}\right) = \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^d A_{k,i}^2 \geq 0$$

en tant que somme de carrés de nombres réels. Supposons de plus que $\langle A, A \rangle = 0$. Dans ce cas, chaque terme de la somme précédente est nul, donc

$$\forall (i, k) \in \llbracket 1; d \rrbracket^2 \quad A_{k,i} = 0$$

Autrement dit, A est la matrice nulle. On a obtenu que l'application $(A, B) \mapsto \langle A, B \rangle$ est définie positive. En conclusion,

$$\boxed{\text{L'application } (A, B) \mapsto \langle A, B \rangle \text{ définit un produit scalaire sur } \mathcal{M}_d(\mathbb{R}).}$$

3.a Soient $(u, v) \in (\mathbb{R}^d)^2$ et $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. Vu leurs tailles respectives, on peut écrire

$$\begin{aligned} \langle u, Av \rangle_{\mathbb{R}^d} &= u^\top Av \\ &= \text{tr}(u^\top Av) && \text{car } u^\top Av \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \\ &= \text{tr}(vu^\top A) \\ &= \text{tr}((uv^\top)^\top A) \\ \langle u, Av \rangle_{\mathbb{R}^d} &= \langle uv^\top, A \rangle \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall (u, v) \in (\mathbb{R}^d)^2 \quad \forall A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \quad \langle u, Av \rangle_{\mathbb{R}^d} = \langle uv^\top, A \rangle}$$

Cette preuve fait appel au résultat selon lequel pour des matrices A et B de dimensions compatibles, $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ qui est au programme en PC. Pourtant, on demande au candidat de redémontrer ce résultat à la question 3.b. Les correcteurs attendent peut-être pour cette question 3.a une preuve plus pédestre en faisant apparaître les sommes concernées. On se dispense de la faire ici, vu qu'elle serait tout à fait similaire au raisonnement de la question 3.b.

3.b Considérons A et B deux matrices de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$. Par définition du produit matriciel et de la trace, il vient

$$\begin{aligned} \text{tr}(AB) &= \text{tr} \left(\left(\sum_{k=1}^d A_{i,k} B_{k,j} \right)_{(i,j) \in \llbracket 1;d \rrbracket^2} \right) \\ &= \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^d A_{i,k} B_{k,i} \\ &= \sum_{k=1}^d \sum_{i=1}^d B_{k,i} A_{i,k} \\ &= \text{tr} \left(\left(\sum_{i=1}^d B_{k,i} A_{i,\ell} \right)_{(k,\ell) \in \llbracket 1;d \rrbracket^2} \right) \\ \text{tr}(AB) &= \text{tr}(BA) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall (A, B) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})^2 \quad \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)}$$

Cette preuve est valable pour toutes matrices $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ et pour tout $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Elle est au programme de PC. C'est donc une question de cours.

3.c Soit $(A, B, C) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})^3$. D'une part,

$$\langle A, BC \rangle = \text{tr}(A^\top BC) = \text{tr}((B^\top A)^\top C) = \langle B^\top A, C \rangle$$

D'autre part, en appliquant le résultat de la question 3.b à $A^\top B$ et C , il vient

$$\langle A, BC \rangle = \text{tr}(A^\top BC) = \text{tr}(CA^\top B) = \text{tr}((AC^\top)^\top B) = \langle AC^\top, B \rangle$$

Ainsi,

$$\boxed{\forall (A, B, C) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})^3 \quad \langle A, BC \rangle = \langle B^\top A, C \rangle = \langle AC^\top, B \rangle}$$

4.a Comme $R \in O_d(\mathbb{R})$, par définition $R^\top R = I_d$. Autrement dit,

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; d \rrbracket^2 \quad \sum_{k=1}^d R_{k,i} R_{k,j} = \delta_i^j$$

où δ désigne le symbole de Kronecker. En particulier,

$$\forall i \in \llbracket 1; d \rrbracket \quad \sum_{k=1}^d R_{k,i}^2 = 1$$

On a ici une somme de termes positifs ou nuls, chacun des termes est donc plus petit que la somme. Ceci assure, pour $k = i$, que $R_{i,i}^2 \leq 1$ pour tout $i \in \llbracket 1; d \rrbracket$ puis que

$$\boxed{\forall i \in \llbracket 1; d \rrbracket \quad |R_{i,i}| \leq 1}$$

4.b On a
$$\langle D, R \rangle = \text{tr}(D^\top R) = \text{tr}(DR) = \sum_{i=1}^d \alpha_i R_{i,i}$$

Or,

$$\forall i \in \llbracket 1; d \rrbracket \quad \alpha_i \geq 0 \quad \text{et} \quad R_{i,i} \leq 1$$

d'après 4.a

donc

$$\forall i \in \llbracket 1; d \rrbracket \quad \alpha_i R_{i,i} \leq \alpha_i$$

Enfin, en sommant sur $i \in \llbracket 1; d \rrbracket$, on obtient

$$\boxed{\langle D, R \rangle \leq \text{tr}(D)}$$

2. ENSEMBLES DES DÉPLACEMENTS DE $\mathbb{R}^d$

5.a Soient a et b deux vecteurs de $\mathbb{R}^d$. Soit $g = (\tau, R)$ un élément de $\text{Dep}(\mathbb{R}^d)$. Par définition,

$$\begin{aligned} |\phi_g(a) - \phi_g(b)| &= |Ra + \tau - (Rb + \tau)| \\ &= |R(a - b)| \\ |\phi_g(a) - \phi_g(b)| &= |a - b| \end{aligned}$$

car R est la matrice d'un endomorphisme orthogonal (c'est-à-dire une isométrie vectorielle) dans la base canonique ce qui justifie qu'elle conserve la norme.

$$\boxed{\forall (a, b) \in (\mathbb{R}^d)^2 \quad \forall g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d) \quad |\phi_g(a) - \phi_g(b)| = |a - b|}$$

5.b Soient $g = (\tau, R)$ et $g' = (\tau', R')$ deux éléments de $\text{Dep}(\mathbb{R}^d)$. Si $g = g'$, on a directement $\phi_g = \phi_{g'}$ car $\tau = \tau'$ et $R = R'$. Réciproquement, supposons que $\phi_g = \phi_{g'}$. Alors, en particulier $\phi_g(0) = \phi_{g'}(0)$ c'est-à-dire $\tau = \tau'$, puis

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \quad \phi_g(x) = \phi_{g'}(x)$$

$$\text{ie} \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \quad Rx + \tau = R'x + \tau$$

$$\text{ie} \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \quad Rx = R'x$$

ce qui prouve que $R = R'$. Dès lors, $g = g'$. Par double implication,

$$\boxed{\forall (g, g') \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d) \quad \phi_g = \phi_{g'} \iff g = g'}$$

5.c Montrons d'abord l'existence puis l'unicité de e .

- Existence: Posons $e = (I_d, 0)$. On a bien $e \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ car $I_d \in O_d(\mathbb{R})$ et $0 \in \mathbb{R}^d$. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \quad \phi_e(x) = I_d x + 0 = x$$

- Unicité: Considérons $(e, e') \in (\text{Dep}(\mathbb{R}^d))^2$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \quad \phi_e(x) = \phi_{e'}(x) = x$$

Cela signifie en particulier que $\phi_e = \phi_{e'}$. Le résultat de la question 5.b assure donc que $e = e'$.

$$\boxed{\text{Il existe un unique } e \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d) \text{ tel que } \phi_e(x) = x \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^d.}$$

6.a Considérons $g = (\tau, R)$ et $g' = (\tau', R')$ deux éléments de $\text{Dep}(\mathbb{R}^d)$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, on obtient

$$(\phi_{g'} \circ \phi_g)(x) = \phi_{g'}(Rx + \tau) = R'(Rx + \tau) + \tau' = (R'R)x + (R'\tau + \tau')$$

Or, $O_d(\mathbb{R})$ est un groupe pour le produit matriciel ce qui assure que $R'R \in O_d(\mathbb{R})$. De plus, $R'\tau + \tau' \in \mathbb{R}^d$. En posant

$$g'' = (R'\tau + \tau', R'R)$$

on obtient $g'' \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ et $\phi_{g''} = \phi_{g'} \circ \phi_g$, ce qui assure l'existence de g'' . Son unicité s'obtient par le même raisonnement que celui de la question 5.c en utilisant le résultat de la question 5.b.

Pour tout $(g, g') \in (\text{Dep}(\mathbb{R}^d))^2$, il existe un unique $g'' \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ tel que $\phi_{g''} = \phi_{g'} \circ \phi_g$.

On vient ainsi de construire une loi de composition interne sur $\text{Dep}(\mathbb{R}^d)$.

6.b Considérons $g_1 = (\tau_1, R_1)$, $g_2 = (\tau_2, R_2)$ et $g_3 = (\tau_3, R_3)$ trois éléments de $\text{Dep}(\mathbb{R}^d)$. Utilisons la formule obtenue dans la question 6.a.

$$\begin{aligned} g_1(g_2g_3) &= g_1(R_2\tau_3 + \tau_2, R_2R_3) \\ &= (R_1(R_2\tau_3 + \tau_2) + \tau_1, R_1(R_2R_3)) \\ &= (R_1R_2\tau_3 + R_1\tau_2 + \tau_1, R_1R_2R_3) \\ &\quad \text{par associativité du produit matriciel} \\ &= ((R_1R_2)\tau_3 + (R_1\tau_2 + \tau_1), (R_1R_2)R_3) \\ &= (g_1g_2)(\tau_3, R_3) \\ g_1(g_2g_3) &= (g_1g_2)g_3 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall (g_1, g_2, g_3) \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)^3 \quad g_1(g_2g_3) = (g_1g_2)g_3$$

On a prouvé ici que la loi de composition interne sur $\text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ introduite à la question 6.a est associative.

7.a Notons $g = (\tau, R)$. Soient x et y deux vecteurs de $\mathbb{R}^d$.

$$\begin{aligned} \phi_g(x) = y &\iff Rx + \tau = y \\ &\iff Rx = y - \tau \\ \phi_g(x) = y &\iff x = R^\top(y - \tau) \quad \text{car } R \in O_d(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

Ainsi, l'application ϕ_g admet une application réciproque. Autrement dit,

L'application ϕ_g est bijective.

7.b D'après ce qui a été fait à la question 7.a,

$$\forall y \in \mathbb{R}^d \quad \phi_g^{-1}(y) = R^\top(y - \tau) = R^\top y - R^\top \tau$$

Or $R^\top \in O_d(\mathbb{R})$ car $R \in O_d(\mathbb{R})$ et $-R^\top \tau \in \mathbb{R}^d$. Prendre $g' = (-R^\top \tau, R^\top) \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ convient donc pour avoir $\phi_{g'} = \phi_g^{-1}$. De plus, l'unicité d'un tel g' est assurée par le résultat de la question 5.b.

Il existe un unique $g' = (-R^\top \tau, R^\top) \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ tel que $\phi_{g'} = \phi_g^{-1}$.

7.c Notons $g = (\tau, R)$ et rappelons que l'on a obtenu à la question 5.c que $e = (0, I_d)$. D'après la formule obtenue à la question 6.a, on peut écrire d'une part que

$$ge = (R0 + \tau, RI_d) = (\tau, R) = g$$

et d'autre part que

$$eg = (I_d\tau + 0, I_dR) = (\tau, R) = g$$

Ainsi,

$$ge = eg = g$$

De plus, comme on l'a vu dans la question 7.b, $g^{-1} = (-R^\top \tau, R^\top)$ et $R \in O_d(\mathbb{R})$ assure que $R^\top R = RR^\top = I_d$. Ceci permet d'écrire

$$gg^{-1} = (R(-R^\top \tau) + \tau, RR^\top) = (-\tau + \tau, I_d) = (0, I_d) = e$$

et

$$g^{-1}g = (R^\top \tau - R^\top \tau, R^\top R) = (0, I_d) = e$$

En conclusion,

$$gg^{-1} = g^{-1}g = e$$

| Ainsi, $\text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ muni de sa loi de composition interne est un groupe.

8 Notons e_1 le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^d$. Soient $g = (e_1, I_d)$ et $g' = (e_1, -I_d)$ deux éléments de $\text{Dep}(\mathbb{R}^d)$. D'après la formule obtenue dans la question 6.a,

$$g'g = (-I_d e_1 + e_1, -I_d I_d) = (0, -I_d)$$

mais

$$gg' = (I_d e_1 + e_1, I_d(-I_d)) = (2e_1, -I_d) \neq g'g$$

Aucune valeur de $d \in \mathbb{N}^*$ ne convient pour avoir l'égalité $gg' = g'g$ pour tous g et g' éléments de $\text{Dep}(\mathbb{R}^d)$.

3. DISTANCE À DÉPLACEMENT PRÈS

9.a Considérons g et g' deux éléments de $\text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ ainsi que $z \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})$. On obtient

$$\begin{aligned} g \cdot (g' \cdot z) &= g \cdot (\phi_{g'}(z_i))_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} \\ &= ((\phi_g \circ \phi_{g'})(z_i))_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} \\ &= (\phi_{gg'}(z_i))_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} \\ g \cdot (g' \cdot z) &= (gg') \cdot z \end{aligned} \tag{6.a}$$

Ainsi,

$$\forall (g, g') \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d) \quad \forall z \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R}^d) \quad g \cdot (g' \cdot z) = (gg') \cdot z$$

9.b Soient $(x, y) \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})^2$ et $g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ tels que $x = g \cdot y$. Alors,

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad x_i = \phi_g(y_i)$$

donc

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad y_i = \phi_g^{-1}(x_i)$$

car ϕ_g est bijective comme on l'a vu à la question 7.a. De plus, vu le résultat de la question 7.b, $\phi_g^{-1} = \phi_{g^{-1}}$ ce qui permet d'obtenir

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad y_i = \phi_{g^{-1}}(x_i)$$

Autrement dit,

$$y = (\phi_{g^{-1}}(x_i))_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} = g^{-1} \cdot x$$

En conclusion,

$$\forall (x, y) \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})^2 \quad \forall g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d) \quad x = g \cdot y \implies y = g^{-1} \cdot x$$

10.a Soient $(x, y) \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})^2$ et $g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$. Les définitions de la loi $\cdot$ et de la norme sur $\mathcal{E}_d^n(\mathbb{R}^d)$ ainsi que le résultat de la question 5.a permettent d'écrire

$$\|g \cdot x - g \cdot y\|^2 = \sum_{i=1}^n |\phi_g(x_i) - \phi_g(y_i)|^2 = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2 = \|x - y\|^2$$

En conclusion,

$$\forall (x, y) \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})^2 \quad \forall g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d) \quad \|g \cdot x - g \cdot y\| = \|x - y\|$$

10.b Soient $(x, y) \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})^2$ et $g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$. On note que $e \cdot y = y$ car $\phi_e = \text{Id}_{\mathbb{R}^d}$ comme on l'a vu à la question 5.c. D'après les résultats des questions 7.c, 9.a et 10.a,

$$\|y - g \cdot x\| = \|(gg^{-1}) \cdot y - g \cdot x\| \quad (7.c)$$

$$= \|g \cdot (g^{-1} \cdot y) - g \cdot x\| \quad (9.a)$$

$$= \|g^{-1} \cdot y - x\| \quad (10.a)$$

$$\|y - g \cdot x\| = \|x - g^{-1} \cdot y\|$$

Or, lorsque g décrit $\text{Dep}(\mathbb{R}^d)$, g^{-1} décrit aussi $\text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ car c'est un groupe comme on l'a montré dans la partie 2. En passant à la borne inférieure à droite dans l'égalité précédente, il vient

$$\|y - g \cdot x\| \geq \inf \{ \|x - g' \cdot y\| \mid g' \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d) \} = \delta(y, x)$$

Passons maintenant à la borne inférieure à gauche. Il vient

$$\delta(x, y) = \inf \{ \|y - g \cdot x\| \mid g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d) \} \geq \delta(y, x)$$

Par symétrie des rôles de x et y , on a aussi $\delta(y, x) \geq \delta(x, y)$ ce qui permet de conclure.

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R}^d)^2 \quad \delta(x, y) = \delta(y, x)}$$

10.c Soient $(x, y, z) \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})^3$ et $(g, g') \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)^2$. Par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} \|z - g \cdot x\| &= \|z - (gg') \cdot y + (gg') \cdot y - g \cdot x\| \\ &\leq \|z - (gg') \cdot y\| + \|(gg') \cdot y - g \cdot x\| \\ &\leq \|z - (gg') \cdot y\| + \|g \cdot (g' \cdot y) - g \cdot x\| \end{aligned} \quad (9.a)$$

$$\|z - g \cdot x\| \leq \|z - (gg') \cdot y\| + \|g' \cdot y - x\| \quad (10.a)$$

En conclusion,

$$\boxed{\forall (x, y, z) \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})^3 \quad \forall (g, g') \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)^2 \\ \|z - g \cdot x\| \leq \|z - (gg') \cdot y\| + \|g' \cdot y - x\|}$$

10.d Soit $(x, y, z) \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})^3$. On munit $\text{Dep}(\mathbb{R}^d) = \mathbb{R}^d \times \text{SO}_d(\mathbb{R})$ de la topologie produit induite par la norme 2 sur $\mathbb{R}^d$ et la norme induite par le produit scalaire donné dans le sujet sur $\text{SO}_d(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

Par équivalence des normes en dimension finie, le choix de la norme fait ici n'influe pas dans le raisonnement qui suit. Mais, du fait que l'on utilise des suites convergentes, il est nécessaire de munir $\text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ d'une norme pour que cela ait un sens.

Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, il existe $(g'_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|g'_k \cdot y - x\| = \delta(y, x) = \delta(x, y)$$

par symétrie de δ comme démontré à la question 10.b. De même, on peut trouver $(g''_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|g''_k \cdot y - z\| = \delta(z, y)$$

Posons alors $g_k = g''_k g'_k{}^{-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ de sorte que

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad g_k \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d) \quad \text{et} \quad g_k g'_k = g''_k$$

Par conséquent, $\lim_{k \rightarrow \infty} \|(g_k g'_k) \cdot y - z\| = \delta(z, y) = \delta(y, z)$

car δ est symétrique comme cela a été prouvé à la question 10.b. D'après l'inégalité obtenue à la question 10.c, on a donc

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \|z - g_k \cdot x\| \leq \|z - (g_k g'_k) \cdot y\| + \|g'_k \cdot y - x\|$$

Puis, par définition de $\delta(x, z)$, on obtient

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \delta(x, z) \leq \|z - g'_k \cdot y\| + \|g'_k \cdot y - x\|$$

Passons à la limite lorsque k tend vers $+\infty$. Il vient

$$\boxed{\delta(x, z) \leq \delta(x, y) + \delta(y, z)}$$

11.a Soit $(x, y) \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})^2$ tel que $c(x) \cap c(y) \neq \emptyset$. Soit $z \in c(x) \cap c(y)$. Par définition de c , il existe g et g' deux éléments de $\text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ tels que $g \cdot x = g' \cdot y = z$. Ainsi, $x = (g^{-1}g') \cdot y$ d'après les résultats des questions 9.a et 9.b. Montrons par double inclusion que $c(x) = c(y)$.

- Inclusion directe : Soit $u \in c(x)$. Il existe $g'' \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ tel que $g'' \cdot x = u$ c'est-à-dire $u = g'' \cdot ((g^{-1}g') \cdot y)$. Le résultat de la question 9.a s'applique encore et donne $u = (g''g^{-1}g') \cdot y$, la loi étant associative comme on l'a vu en 6.b. Ceci prouve que $u \in c(y)$. Ainsi, $c(x) \subset c(y)$.
- Inclusion réciproque : Par symétrie des rôles de x et y , on a aussi $c(y) \subset c(x)$.

On conclut que

$$\boxed{c(x) \cap c(y) \neq \emptyset \implies c(x) = c(y)}$$

11.b Soit $(x, y) \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})^2$ tel que $c(x) = c(y)$. Remarquons d'abord que $c(y) \neq \emptyset$ car $y \in c(y)$ en choisissant $g = e$. Il vient donc que $y \in c(x)$. Autrement dit, il existe $g \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$ tel que $g \cdot x = y$ donc $\|y - g \cdot x\| = 0$. Ainsi, par définition,

$$\boxed{\text{Si } c(x) = c(y), \text{ alors } \delta(x, y) = 0.}$$

- En combinant les résultats des deux questions précédentes, on a

$$c(x) \cap c(y) \neq \emptyset \implies \delta(x, y) = 0$$

- Le travail fait dans cette partie justifie l'appellation « distance à déplacement près ». En effet, si E est un ensemble et $d : E^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$, alors on dit que d est une distance sur E lorsque
 - $\forall (x, y) \in E^2 \quad d(x, y) = d(y, x)$
 - $\forall (x, y, z) \in E^3 \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$
 - $\forall (x, y) \in E^2 \quad d(x, y) = 0 \iff x = y$

Ici, δ vérifie les deux premières propriétés : la symétrie et l'inégalité triangulaire. Cependant, δ ne satisfait pas la troisième : la séparation. En effet, on devrait avoir $\delta(x, y) = 0 \iff x = y$ mais, au lieu de cela on a $\delta(x, y) = 0 \iff c(x) \cap c(y) \neq \emptyset$. On a prouvé l'implication réciproque dans les questions précédentes. L'implication directe s'obtient sans difficulté par définition de δ .

4. UN PROBLÈME D'OPTIMISATION

12.a Soit $(\tau, R) \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$. Par définition,

$$\begin{aligned} J(\tau, R) &= \sum_{i=1}^n |y_i - (Rx_i + \tau)|^2 \\ &= \sum_{i=1}^n |y_i - \bar{y} - R(x_i - \bar{x}) + \bar{y} - R\bar{x} - \tau|^2 \quad (R \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)) \\ &= \sum_{i=1}^n |y_i - \bar{y} - R(x_i - \bar{x})|^2 + \sum_{i=1}^n |\bar{y} - R\bar{x} - \tau|^2 \\ &\quad + 2 \sum_{i=1}^n \langle y_i - \bar{y} - R(x_i - \bar{x}), \bar{y} - R\bar{x} - \tau \rangle_{\mathbb{R}^d} \end{aligned}$$

(identité remarquable)

$$\begin{aligned} J(\tau, R) &= \sum_{i=1}^n |y_i - \bar{y} - R(x_i - \bar{x})|^2 + \sum_{i=1}^n |\bar{y} - R\bar{x} - \tau|^2 \\ &\quad + 2 \left\langle \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y} - R(x_i - \bar{x})), \bar{y} - R\bar{x} - \tau \right\rangle_{\mathbb{R}^d} \end{aligned}$$

(linéarité du produit scalaire à gauche)

$$\begin{aligned} \text{Or, } \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y} - R(x_i - \bar{x})) &= \left(\sum_{i=1}^n y_i \right) - n\bar{y} - R \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) + nR\bar{x} \\ &\quad (R \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^d)) \\ &= n\bar{y} - n\bar{y} - nR\bar{x} + nR\bar{x} \quad (\text{définitions de } \bar{x} \text{ et } \bar{y}) \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y} - R(x_i - \bar{x})) = 0$$

$$\text{et, } \sum_{i=1}^n |\bar{y} - R\bar{x} - \tau|^2 = n |\bar{y} - R\bar{x} - \tau|^2$$

$$\text{Ainsi, } \boxed{J(\tau, R) = \sum_{i=1}^n |y_i - \bar{y} - R(x_i - \bar{x})|^2 + n |\bar{y} - R\bar{x} - \tau|^2}$$

12.b Soient $R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})$ et $\tau \in \mathbb{R}^d$. Vu le résultat de la question 12.a, $J(\tau, R)$ s'écrit

$$J(\tau, R) = J_1(R) + n |\bar{y} - R\bar{x} - \tau|^2$$

avec

$$J_1(R) = \sum_{i=1}^n |y_i - \bar{y} - R(x_i - \bar{x})|^2$$

qui est indépendant de τ . Minimiser $\tau \mapsto J(R, \tau)$ sur $\mathbb{R}^d$ revient donc à minimiser la quantité $|\bar{y} - R\bar{x} - \tau|^2 \geq 0$. Or, cette quantité s'annule en $\tau(R) = \bar{y} - R\bar{x}$ et seulement là. Ainsi,

$$\boxed{\text{Pour tout } R \in \text{SO}_d(\mathbb{R}), \text{ la fonction } \tau \mapsto J(\tau, R) \text{ admet un unique minimum sur } \mathbb{R}^d. \text{ Il est atteint en } \tau(R) = \bar{y} - R\bar{x}.$$

13.a La transposition est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ qui est de dimension finie donc elle est continue. Le produit matriciel sur l'espace vectoriel de dimension finie $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ est bilinéaire donc il est continu. Par conséquent, en tant que composée de fonctions continues,

$$\boxed{\text{La fonction } f : M \mapsto M^\top M \text{ est continue sur } \mathcal{M}_d(\mathbb{R}).}$$

13.b Par définition, on a $R^\top R = I_d$. Or,

$$\|R\|^2 = \langle R, R \rangle = \text{tr}(R^\top R) = \text{tr}(I_d) = d$$

Ceci assure que $SO_d(\mathbb{R})$ est borné.

On pourrait aussi simplement montrer que les coefficients de R sont bornés en valeur absolue par 1 pour obtenir le caractère borné de $SO_d(\mathbb{R})$.

Raisonnons par caractérisation séquentielle pour montrer qu'il est fermé. Considérons une suite $(R_k)_{k \in \mathbb{N}} \in SO_d(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ et $R \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ telles que la suite $(R_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers R . Montrons que $R \in SO_d(\mathbb{R})$ c'est-à-dire que $R^\top R = f(R) = I_d$ et $\det R = 1$. Comme $R_k \in SO_d(\mathbb{R})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} R_k^\top R_k = f(R_k) = I_d \\ \det(R_k) = 1 \end{cases}$$

Or, on a vu dans la question 13.a que f est continue. De plus, d'après le cours, $\det$ est continue. Dès lors, par passage à la limite, $f(R) = I_d$ et $\det R = 1$ ce qui prouve que $R \in SO_d(\mathbb{R})$ qui est donc fermé. En conclusion,

L'ensemble $SO_d(\mathbb{R})$ est un fermé borné de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

Proposons une autre démonstration du caractère fermé de $SO_d(\mathbb{R})$. Elle se fonde aussi sur la continuité de f et de $\det$ mais est plus élégante. Notons que $SO_d(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{I_d\}) \cap \det^{-1}(\{1\})$. En tant qu'images réciproques de fermés par des applications continues, $f^{-1}(\{I_d\})$ et $\det^{-1}(\{1\})$ sont des fermés. L'ensemble $SO_d(\mathbb{R})$ est donc une intersection de deux fermés, c'est un fermé.

14.a Notons $\varphi : R \mapsto J(\tau(R), R)$ la fonction définie sur $SO_d(\mathbb{R})$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. D'après le résultat de la question 12.b, $\tau(R) = \bar{y} - R\bar{x}$. Puis,

$$\forall R \in SO_d(\mathbb{R}) \quad \varphi(R) = \sum_{i=1}^n |y_i - (Rx_i + \bar{y} - R\bar{x})|^2$$

C'est une somme de carrés de normes, les x_i, y_i ainsi que $\bar{x}$ et $\bar{y}$ sont fixés. La multiplication matricielle est continue à droite, le carré et la norme sont elles aussi continues. Ainsi, en tant que somme de composées de fonction continues, φ est continue sur $SO_d(\mathbb{R})$ qui est fermé borné d'après le résultat de la question 13.b en dimension finie car il est inclus dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ qui est de dimension d^2 . Le théorème des bornes atteintes assure donc que φ est bornée et atteint ses bornes. En particulier, φ atteint son minimum. Autrement dit, il existe $R_* \in SO_d(\mathbb{R})$ tel que

$$\forall R \in SO_d(\mathbb{R}) \quad J(\tau(R_*), R_*) \leq J(\tau(R), R)$$

Or, par définition de $\tau(R)$,

$$\forall (\tau, R) \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d) \quad J(\tau(R), R) \leq J(\tau, R)$$

En combinant ces deux inégalités, il vient

$$\exists R_* \in SO_d(\mathbb{R}) \quad \forall (\tau, R) \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d) \quad J(\tau(R_*), R_*) \leq J(\tau, R)$$

14.b Prenons $x = y = 0 \in \mathcal{E}_d^n(\mathbb{R})$. On a aussi $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Soit $(\tau, R) \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$. Dans ce cas,

$$J(\tau, R) = n\tau^2 \quad \text{et} \quad \tau(R) = \bar{y} - R\bar{x} = 0$$

vu la formule pour $\tau(R)$ établie à la question 12.b. Ainsi,

$$\forall R_* \in \text{SO}_d(\mathbb{R}) \quad J(\tau(R_*), R_*) = J(0, R_*) = 0 \leq J(\tau, R)$$

Or, pour $d \geq 2$, $\text{SO}_d(\mathbb{R})$ n'est pas un singleton. Dès lors,

La matrice R_* n'est pas forcément unique.

15 Par définition, on a

$$\delta(x, y)^2 = \inf \{ J(\tau, R) \mid (\tau, R) \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d) \}$$

Soit $(\tau, R) \in \text{Dep}(\mathbb{R}^d)$. Le résultat de la question 12.b assure l'inégalité

$$J(\tau, R) \geq J(\tau(R), R)$$

Or,

$$J(\tau(R), R) = \sum_{i=1}^n |y_i - \bar{y} - R(x_i - \bar{x})|^2$$

car $\tau(R) = \bar{y} - R\bar{x}$ comme on l'a vu dans le résultat de la question 12.b. Il vient, par linéarité de R puis en utilisant une identité remarquable, que

$$\begin{aligned} J(\tau(R), R) &= \sum_{i=1}^n |y_i - \bar{y} - R(x_i - \bar{x})|^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \left(|y_i - \bar{y}|^2 + |R(x_i - \bar{x})|^2 - 2\langle y_i - \bar{y}, R(x_i - \bar{x}) \rangle_{\mathbb{R}^d} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n |R(x_i - \bar{x})|^2 + \sum_{i=1}^n |y_i - \bar{y}|^2 - 2 \sum_{i=1}^n \langle y_i - \bar{y}, R(x_i - \bar{x}) \rangle_{\mathbb{R}^d} \\ J(\tau(R), R) &= \sum_{i=1}^n \langle R(x_i - \bar{x}), R(x_i - \bar{x}) \rangle_{\mathbb{R}^d} + nV_n(y) - 2 \sum_{i=1}^n \langle (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})^\top, R \rangle \end{aligned}$$

en utilisant la formule démontrée dans la question 3.a. Et, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$,

$$\langle R(x_i - \bar{x}), R(x_i - \bar{x}) \rangle_{\mathbb{R}^d} = |R(x_i - \bar{x})|^2 = |x_i - \bar{x}|^2$$

car $R \in \text{SO}_d(\mathbb{R}) \subset \text{O}_d(\mathbb{R})$ ce qui assure qu'elle conserve la norme. Ceci permet d'écrire

$$J(\tau(R), R) = nV_n(x) + nV_n(y) - 2 \left\langle \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})^\top, R \right\rangle$$

Puis, en passant à la borne inférieure,

$$\delta(x, y)^2 = nV_n(x) + nV_n(y) - 2 \sup_{R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})} \langle Z(x, y), R \rangle$$

avec

$$Z(x, y) = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})^\top$$

5. CALCUL DE $\delta(x, y)$ DANS LE CAS OÙ $\det(Z(x, y)) > 0$

16 Comme $S = Z^\top Z$, S est une matrice réelle symétrique. Elle est donc diagonalisable en base orthonormée. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de S . Notons u un vecteur propre unitaire associé à λ . Comme Z est inversible, $|Zu| > 0$. Ceci permet d'écrire

$$0 < |Zu|^2 = \langle Zu, Zu \rangle_{\mathbb{R}^d} = (Zu)^\top Zu = u^\top Z^\top Zu = u^\top Su = \lambda u^\top u = \lambda |u|^2 = \lambda$$

donc, $\lambda > 0$. Ainsi, on peut indexer les valeurs propres de S en comptant les répétitions par ordre décroissant. Autrement dit,

Il existe $(\lambda_i)_{i \in \llbracket 1; d \rrbracket}$ une famille décroissante de réels strictement positifs et $(u_i)_{i \in \llbracket 1; d \rrbracket}$ une famille orthonormée de $\mathbb{R}^d$ telles que $Su_i = \lambda_i u_i$ pour tout $i \in \llbracket 1; d \rrbracket$.

17.a Soit $(i, j) \in \llbracket 1; d \rrbracket^2$.

$$\begin{aligned} \langle v_i, v_j \rangle_{\mathbb{R}^d} &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_i} \sqrt{\lambda_j}} \langle Zu_i, Zu_j \rangle_{\mathbb{R}^d} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_i} \sqrt{\lambda_j}} u_i^\top Z^\top Zu_j \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_i} \sqrt{\lambda_j}} u_i^\top Su_j \\ &= \frac{\lambda_j}{\sqrt{\lambda_i} \sqrt{\lambda_j}} u_i^\top u_j \\ &= \frac{\sqrt{\lambda_j}}{\sqrt{\lambda_i}} \delta_i^j \end{aligned}$$

$$\langle v_i, v_j \rangle_{\mathbb{R}^d} = \delta_i^j$$

car $(u_i)_{i \in \llbracket 1; d \rrbracket}$ forme une base orthonormée de $\mathbb{R}^d$ comme on l'a vu dans la question 16. Ainsi,

La famille $(v_i)_{i \in \llbracket 1; d \rrbracket}$ forme une base orthonormée de $\mathbb{R}^d$.

17.b Soit $(i, j) \in \llbracket 1; d \rrbracket^2$. Calculons $(VD)_{i,j}$.

$$\begin{aligned} (VD)_{i,j} &= \sum_{k=1}^d V_{i,k} D_{k,j} \\ &= V_{i,j} D_{j,j} \\ &= (v_j)_i \sqrt{\lambda_j} && \text{par définition de } V \text{ et } D \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_j}} (Zu_j)_i \sqrt{\lambda_j} && \text{par définition de } v_j \\ &= \sum_{k=1}^d Z_{i,k} (u_j)_k \\ &= \sum_{k=1}^d Z_{i,k} U_{k,j} && \text{par définition de } U \\ (VD)_{i,j} &= (ZU)_{i,j} \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; d \rrbracket^2$, il vient $VD = ZU$. Or, U est une matrice orthogonale vu que c'est la matrice d'une base orthonormée dans la base canonique d'après le résultat de la question 16. On en déduit que U est inversible et que $U^{-1} = U^\top$. On obtient donc

$$\boxed{Z = VDU^\top}$$

18 Avec Z_1 , on a $S_1 = Z_1^\top Z_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

C'est une matrice diagonale et les coefficients diagonaux sont rangés par ordre décroissant donc on peut prendre $U_1 = (e_1 | e_2) = I_2$. On a $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = 1$ donc

$$V_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{4}} Z_1 e_1 \mid \frac{1}{\sqrt{1}} Z_1 e_2 \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\boxed{\begin{array}{l} Z_1 = V_1 D_1 U_1^\top \\ \text{avec } U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad V_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}}$$

Pour Z_2 , on a aussi $S_2 = Z_2^\top Z_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

On prend donc $U_2 = U_1 = I_2$ puis

$$V_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{4}} Z_2 e_1 \mid \frac{1}{\sqrt{1}} Z_2 e_2 \right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\boxed{\begin{array}{l} Z_2 = V_2 D_2 U_2^\top \\ \text{avec } U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}}$$

19.a Soit $R \in SO_d(\mathbb{R})$. Remarquons que U et V sont toutes deux des matrices orthogonales car ce sont les matrices de bases orthonormées d'après les résultats des questions 16 et 17.a.

$$(V^\top R U)^\top (V^\top R U) = U^\top R^\top V V^\top R U = U^\top R^\top R U = U^\top U = I_d$$

donc $V^\top R U$ est orthogonale. De plus,

$$\det(V^\top R U) = \det(V^\top) \det R \det U = \det V \det U$$

car $\det R = 1$. Or, on a supposé que $\det Z > 0$ et on a

$$0 < \det Z = \det(VDU^\top) = \det V \det D \det(U^\top) = \det(V) \det(U) \prod_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i}$$

Ce produit étant strictement positif, on en déduit que $\det V \det U > 0$. Or, U étant orthogonale, d'après le résultat de la question 1, $\det U \in \{-1; 1\}$. Il en est de même pour $\det V$. Par conséquent, $\det U \det V = 1$ puis $\det(V^\top R U) = 1$, ce qui prouve que

$$\boxed{V^\top R U \in SO_d(\mathbb{R})}$$

19.b Considérons

$$\tilde{\varphi}: \begin{cases} \text{SO}_d(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \\ R & \longmapsto V^\top R U \end{cases}$$

Le résultat de la question 19.a assure que $\tilde{\varphi}$ est à valeurs dans $\text{SO}_d(\mathbb{R})$ ce qui assure que la fonction

$$\varphi: \begin{cases} \text{SO}_d(\mathbb{R}) & \longrightarrow \text{SO}_d(\mathbb{R}) \\ R & \longmapsto V^\top R U \end{cases}$$

est bien définie. Montrons qu'elle est bijective. Soit $(R, R') \in \text{SO}_d(\mathbb{R})^2$. Notons que le fait que U et V soient des matrices de bases orthonormées, comme on l'a vu dans les questions 16 et 17.a, assure que ce sont des matrices orthogonales. Il vient alors

$$\begin{aligned} R' = \varphi(R) & \iff R' = V^\top R U \\ & \iff R' U^\top = V^\top R \\ R' = \varphi(R) & \iff V R' U^\top = R \end{aligned}$$

Or, par un raisonnement tout à fait similaire à celui de la question 19.a, on a bien $V R' U^\top \in \text{SO}_d(\mathbb{R})$. Ainsi, φ est une bijection de $\text{SO}_d(\mathbb{R})$ vu qu'elle admet une application réciproque donnée par

$$\varphi^{-1}: \begin{cases} \text{SO}_d(\mathbb{R}) & \longrightarrow \text{SO}_d(\mathbb{R}) \\ R' & \longmapsto V R' U^\top \end{cases}$$

Or, D étant diagonale,

$$\begin{aligned} \langle Z, R \rangle &= \text{tr}(Z^\top R) \\ &= \text{tr}((V D U^\top)^\top R) \\ &= \text{tr}(U D V^\top R) \\ &= \text{tr}(D V^\top R U) \\ &= \text{tr}(D \varphi(R)) \\ \langle Z, R \rangle &= \langle D, \varphi(R) \rangle \end{aligned}$$

d'après le résultat de la question 3.b. Or, φ étant une bijection de $\text{SO}_d(\mathbb{R})$, $\varphi(R)$ décrit $\text{SO}_d(\mathbb{R})$ lorsque R décrit $\text{SO}_d(\mathbb{R})$. Ainsi,

$$\sup_{R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})} \langle Z, R \rangle = \sup_{R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})} \langle D, R \rangle$$

20 Notons $D(x, y)$ la matrice diagonale associée à $Z(x, y)$ dans le processus des questions 16 et 17. Comme $\det(Z(x, y)) > 0$, le résultat de la question 19.b s'applique et donne

$$\sup_{R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})} \langle Z(x, y), R \rangle = \sup_{R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})} \langle D(x, y), R \rangle \leq \text{tr}(D(x, y))$$

car, par construction, $D(x, y)$ est diagonale à coefficients positifs ce qui permet d'appliquer le résultat de la question 4.b. Or, $I_d \in \text{SO}_d(\mathbb{R})$ et

$$\langle D(x, y), I_d \rangle = \text{tr}(D(x, y))$$

Ainsi,

$$\sup_{R \in \text{SO}_d(\mathbb{R})} \langle Z(x, y), R \rangle = \text{tr}(D(x, y)) = \sum_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i(x, y)}$$

où $\sqrt{\lambda_i(x, y)}$ désignent les valeurs singulières de $Z(x, y)$ pour tout $i \in \llbracket 1; d \rrbracket$. En revenant à la formule établie à la question 15, il vient enfin

$$\delta(x, y) = \sqrt{nV_n(x) + nV_n(y) - 2 \sum_{i=1}^d \sqrt{\lambda_i(x, y)}}$$

6. LE CAS OÙ $\det(Z(x, y)) < 0$

21.a Soit $\lambda \in \text{Sp}(\mathbb{R})$ et $u \in \mathbb{R}^d$ un vecteur propre unitaire associé. On sait que $R \in O_d$ donc elle conserve la norme. Il vient $|Ru| |u| = 1$ donc

$$1 = |Ru| = |\lambda u| = |\lambda| |u| = |\lambda|$$

ce qui assure que

$$\lambda \in \{-1; 1\}$$

21.b | Noter que I désigne ici I_d .

Comme $R \in O_d(\mathbb{R})$, $RR^\top = I_d$. Puis,

$$\det R \det(I_d + R^\top) = \det(R(I_d + R^\top)) = \det(R + RR^\top) = \det(R + I_d)$$

Ainsi,

$$\det(R + I_d) = \det(R) \det(I_d + R^\top)$$

21.c Supposons que $\det(R) = -1$. Le résultat de la question 21.b devient

$$\det(R + I_d) = -\det(I_d + R^\top) = -\det((I_d + R^\top)^\top) = -\det(I_d + R)$$

donc $2 \det(R + I_d) = 0$ ce qui prouve que

$$\det(R + I_d) = 0$$

22.a On sait que $\det R = -1$. On a vu à la question 21.c que dans ce cas, on a donc $\det(R + I_d) = 0$. Autrement dit, -1 est une valeur propre de R . Soit u_d un vecteur propre unitaire de R pour la valeur propre -1 . En particulier, $Ru_d = -u_d$. On complète (u_d) en une base orthonormée de $\mathbb{R}^d$ que l'on note $(u_i)_{i \in [1; d]}$. Soit

$$x \in E_1 = \text{Vect}(u_1, \dots, u_{d-1}) = u_d^\perp$$

Il vient donc

$$u_d^\top R x = -(-u_d)^\top R x = -(Ru_d)^\top R x = -u_d^\top R^\top R x = -u_d^\top x = -\langle u_d, x \rangle_{\mathbb{R}^d} = 0$$

car R est orthogonale. En conclusion,

$$\boxed{\text{On a construit } (u_i)_{i \in [1; d]} \text{ une base orthonormée de } \mathbb{R}^d \text{ telle que } Ru_d = -u_d \text{ et } u_d^\top R x = 0 \text{ pour tout } x \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_{d-1}).}$$

22.b Soit $y \in R(E_1)$. Il existe $x \in E_1$ tel que $y = Rx$. Or, d'après le résultat de la question 22.a, $u_d^\top R x = 0$ pour tout $x \in E_1$. On a donc

$$\langle u_d, y \rangle_{\mathbb{R}^d} = \langle u_d, Rx \rangle_{\mathbb{R}^d} = u_d^\top R x = 0$$

Cela signifie que $y \in u_d^\perp = E_1$. Ainsi,

$$R(E_1) \subset E_1$$

En fait, d'après le programme, l'orthogonal d'un sous-espace stable est stable par toute isométrie.

De plus, $\det(R) = -1 \neq 0$ donc R est inversible, ce qui impose que $R(E_1)$ et E_1 sont de même dimension et prouve que

$$R(E_1) = E_1$$

23.a On a

$$\begin{aligned}\langle S, R' \rangle &= \langle U^\top D U, U^\top R U \rangle \\ &= \text{tr} \left((U^\top D U)^\top U^\top R U \right) \\ \langle S, R' \rangle &= \text{tr} (U^\top D^\top U U^\top R U)\end{aligned}$$

Or, U est la matrice d'une base orthonormée donc U est orthogonale et $U U^\top = I_d$. On en déduit, en utilisant le résultat de la question 3.b, que

$$\langle S, R' \rangle = \text{tr} (U^\top D^\top R U) = \text{tr} (D^\top R U U^\top) = \text{tr} (D^\top R) = \langle D, R \rangle$$

En conclusion,

$$\boxed{\langle S, R' \rangle = \langle D, R \rangle}$$

23.b Remarquons que R et R' sont les matrices du même endomorphisme dans la base canonique de $\mathbb{R}^d$ et dans la base $(u_i)_{i \in \llbracket 1; d \rrbracket}$ respectivement. Vu les résultats des questions 22.a et 22.b, R' s'écrit

$$R' = \begin{pmatrix} R_0 & 0_{d-1} \\ 0_{d-1}^\top & -1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } 0_{d-1} \text{ le vecteur nul de } \mathbb{R}^{d-1}$$

Or, R et U étant des matrices orthogonales,

$$R'^\top R' = U^\top R^\top U U^\top R U = U^\top R^\top R U = U^\top U = I_d$$

ce qui revient à dire que

$$\begin{pmatrix} R_0^\top R_0 & 0_{d-1} \\ 0_{d-1}^\top & 1 \end{pmatrix} = I_d$$

En particulier, $R_0^\top R_0 = I_{d-1}$, ce qui prouve que

$$\boxed{R_0 \in O_{d-1}(\mathbb{R})}$$

24.a D'après le résultat de la question 23.a, $\langle D, R \rangle = \langle S, R' \rangle = \text{tr} (S^\top R')$. Or, on a déjà vu dans la réponse à la question 23.b que

$$R' = \begin{pmatrix} R_0 & 0_{d-1} \\ 0_{d-1}^\top & -1 \end{pmatrix}$$

De même,

$$S = \begin{pmatrix} S_0 & * \\ * & S_{d,d} \end{pmatrix} \quad \text{avec } S_{d,d} \in \mathbb{R}$$

Puis,

$$S^\top R' = \begin{pmatrix} S_0^\top R_0 & * \\ * & -S_{d,d} \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\text{tr} (S^\top R') = \text{tr} (S_0^\top R_0) - S_{d,d}$$

Or, D étant diagonale, $S^\top = (U^\top D U)^\top = U^\top D U = S$, donc $S_0^\top = S_0$. En conclusion,

$$\boxed{\langle D, R \rangle = \text{tr} (S_0 R_0) - S_{d,d}}$$

24.b Comme on l'a remarqué dans la fin de la réponse à la question 24.a, la matrice S_0 est symétrique réelle donc diagonalisable en base orthonormée. Autrement dit, il existe $U_0 \in O_{d-1}(\mathbb{R})$ telle que $D_0 = U_0 S_0 U_0^\top$ est diagonale. Montrons que S_0 est symétrique positive. On sait déjà que S est symétrique positive car S est la matrice de D qui est positive dans la base orthonormée $(u_i)_{i \in \llbracket 1; d \rrbracket}$. Soit $X_0 \in \mathbb{R}^{d-1}$. Notons

$$X = \begin{pmatrix} X_0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d$$

Remarquons que $X_0^\top S_0 X_0 = X^\top S X \geq 0$

par positivité de S . Ceci étant pour tout $X_0 \in \mathbb{R}^{d-1}$, on en déduit que S_0 est symétrique positive, ce qui assure que ses valeurs propres sont toutes positives. Dès lors, la matrice D_0 est diagonale à coefficients positifs. Appliquons le résultat de la question 4.b à D_0 et $R'_0 = U_0^\top R_0 U_0 \in O_{d-1}(\mathbb{R}^d)$ d'après la question 23.a. Il vient $\langle D_0, R'_0 \rangle \leq \text{tr}(D_0)$. Or, d'une part, $\text{tr}(D_0) = \text{tr}(S_0)$ et d'autre part

$$\langle D_0, R'_0 \rangle = \text{tr}(D_0^\top R'_0) = \text{tr}(U_0^\top S_0 U_0 U_0^\top R_0 U_0) = \text{tr}(U_0^\top S_0 R_0 U_0)$$

soit $\langle D_0, R'_0 \rangle = \text{tr}(S_0 R_0)$

En réinjectant ces deux résultats dans l'inégalité précédente, il vient

$$\boxed{\text{tr}(S_0 R_0) \leq \text{tr}(S_0)}$$

24.c Comme S est la matrice de D dans la base $(u_i)_{i \in \llbracket 1; d \rrbracket}$, ces deux matrices ont la même trace donc

$$\boxed{\text{tr}(D) = \text{tr}(S_0) + S_{d,d}}$$

Le résultat de la question 24.a assure que $\langle D, R \rangle = \text{tr}(S_0 R_0) - S_{d,d}$. Or, comme on l'a vu dans la question 24.b, $\text{tr}(S_0 R_0) \leq \text{tr}(S_0)$. Ainsi, $\langle D, R \rangle \leq \text{tr}(S_0) - S_{d,d}$. Or, $\text{tr}(S_0) = \text{tr}(D) - S_{d,d}$. En conclusion,

$$\boxed{\langle D, R \rangle \leq \text{tr}(D) - 2S_{d,d}}$$

25.a Par définition,

$$S_{d,d} = (U^\top D U)_{d,d} = (U^\top (\alpha_i U_{i,k})_{(i,k) \in \llbracket 1; d \rrbracket^2})_{d,d} = \sum_{j=1}^d U_{j,d} \alpha_j U_{j,d}$$

donc

$$\boxed{S_{d,d} = \sum_{j=1}^d \alpha_j U_{j,d}^2}$$

25.b D'après la formule obtenue à la question 25.a et le fait que $\alpha_d \leq \alpha_i$ pour tout $i \in \llbracket 1; d \rrbracket$ car les α_i sont rangés par ordre décroissant,

$$S_{d,d} \geq \alpha_d \sum_{j=1}^d U_{j,d}^2 = \alpha_d (U^\top U)_{d,d} = \alpha_d$$

la matrice U étant orthogonale. Or, d'après le résultat de la question 24.c,

$$\langle D, R \rangle \leq \text{tr}(D) - 2S_{d,d} = \left(\sum_{i=1}^d \alpha_i \right) - 2\alpha_d = \left(\sum_{i=1}^{d-1} \alpha_i \right) - \alpha_d$$

En conclusion,

$$\boxed{\langle D, R \rangle \leq \left(\sum_{i=1}^{d-1} \alpha_i \right) - \alpha_d}$$

26 Notons tout d'abord que le résultat de la question 17.b reste valable ici car on n'avait pas encore supposé que $\det(Z(x, y)) > 0$: il existe U et V deux matrices orthogonales, et $D(x, y)$ une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux

$$\left(\sqrt{\lambda_i(x, y)} \right)_{i \in \llbracket 1; d \rrbracket}$$

sont les valeurs singulières de $Z(x, y)$, positifs et rangés par ordre décroissant tels que $Z(x, y) = V D(x, y) U^\top$. On a ici $\det(Z(x, y)) < 0$ donc

$$0 > \det(Z(x, y)) = \det(V) \det(D) \det(U)$$

Or, $\det(D) > 0$ ce qui impose que $\det(V)$ et $\det(U)$ sont de signes opposés. De plus, comme ce sont des éléments de $\{-1; 1\}$ d'après le résultat de la question 1,

$$\det(V) \det(U) = -1$$

Notons $O_d(\mathbb{R})_- = O_d(\mathbb{R}) \cap \{M \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \mid \det M = -1\}$

— Vu le résultat de la question 1.a, on a en fait $O_d(\mathbb{R})_- = O_d(\mathbb{R}) \setminus SO_d(\mathbb{R})$.

Posons
$$\tilde{\psi}: \begin{cases} SO_d(\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \\ R & \longmapsto V^T R U \end{cases}$$

Soit $R \in SO_d(\mathbb{R})$. On a bien $\tilde{\psi}(R) \in O_d(\mathbb{R})$ en tant que produit de matrices orthogonales. En outre,

$$\det(\tilde{\psi}(R)) = \det(V^T R U) = \det(V^T) \det(R) \det(U) = \det(V) \det(U) = -1$$

car $\det(R) = 1$. Ceci prouve que $\tilde{\psi}$ est à valeurs dans $O_d(\mathbb{R})_-$ et on peut définir

$$\psi: \begin{cases} SO_d(\mathbb{R}) & \longrightarrow O_d(\mathbb{R})_- \\ R & \longmapsto V^T R U \end{cases}$$

Montrons maintenant que ψ est bijective. Soient $R \in SO_d(\mathbb{R})$ et $R' \in O_d(\mathbb{R})_-$.

$$\psi(R) = R' \iff V^T R U = R' \iff R U = V R' \iff R = V R' U^T$$

Ainsi, $\psi : SO_d(\mathbb{R}) \rightarrow O_d(\mathbb{R})_-$ est une bijection. On en déduit, en utilisant la question 3.b, que pour tout $R \in SO_d(\mathbb{R})$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \langle Z(x, y), R \rangle &= \text{tr} (Z(x, y)^T R) \\ &= \text{tr} \left((V D(x, y) U^T)^T R \right) \\ &= \text{tr} (U D(x, y)^T V^T R) \\ &= \text{tr} (D(x, y)^T V^T R U) \\ &= \text{tr} (D(x, y)^T \psi(R)) \\ \langle Z(x, y), R \rangle &= \langle D(x, y), \psi(R) \rangle \end{aligned}$$

$$\text{donc} \quad \sup_{R \in SO_d(\mathbb{R})} \langle Z(x, y), R \rangle = \sup_{R \in O_d(\mathbb{R})_-} \langle D(x, y), R \rangle$$

Considérons $R \in O_d(\mathbb{R})_-$, donc $R \in O_d(\mathbb{R})$ et $\det R = -1$. Ceci permet d'appliquer le résultat de la question 25.b :

$$\langle D(x, y), R \rangle \leq \left(\sum_{i=1}^{d-1} \sqrt{\lambda_i(x, y)} \right) - \sqrt{\lambda_d(x, y)}$$

$$\text{Posons} \quad R = \begin{pmatrix} I_{d-1} & 0_{d-1} \\ 0_{d-1}^T & -1 \end{pmatrix} \in O_d(\mathbb{R}^d)_-$$

Pour cette valeur de R , on a exactement

$$\langle D(x, y), R \rangle = \left(\sum_{i=1}^{d-1} \sqrt{\lambda_i(x, y)} \right) - \sqrt{\lambda_d(x, y)}$$

$$\text{d'où} \quad \sup_{R \in O_d(\mathbb{R})_-} \langle D(x, y), R \rangle = \left(\sum_{i=1}^{d-1} \sqrt{\lambda_i(x, y)} \right) - \sqrt{\lambda_d(x, y)}$$

En conclusion, d'après la formule établie à la question 15 avec $\sqrt{\lambda_d(x, y)}$ la plus petite valeur singulière de $Z(x, y)$.

$$\delta(x, y) = \sqrt{nV_n(x) + nV_n(y) - 2 \left(\sum_{i=1}^{d-1} \sqrt{\lambda_i(x, y)} \right) + 2\sqrt{\lambda_d(x, y)}}$$