

Intégrales généralisées et équations fonctionnelles

PC MATHS CENTRALE 1994

Partie I

I.A.1 Soit f un élément de E vérifiant (1) et (2). Fixons $x > 1$. Par une récurrence immédiate, on a grâce à (1) pour tout entier n ,

$$f(x) = -\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+x} + f(x+n) \quad (*)$$

Or, d'après (2),

$$f(x+n) - \ln(n+x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

d'où lorsque n tend vers $+\infty$

$$f(x+n) = \ln(x+n) + o(1) = \ln n + \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) + o(1) = \ln n + o(1)$$

En réinjectant cette égalité dans (*), il vient

$$f(x) = \ln n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+x} + o(1)$$

soit bien

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\ln n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+x} \right)$$

D'après le résultat rappelé par l'énoncé, on a aussi

$$\ln n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \gamma + o(1) \quad \text{donc} \quad f(x) = -\gamma + \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}$$

d'où, puisque la série converge

$$f(x) = -\gamma + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$$

I.A.2 Commençons par remarquer que l'égalité (4) définit bien $f(x)$ car la série converge en vertu de l'équivalent

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \frac{x}{n(n+x)} \sim \frac{x}{n^2}$$

pour $x \neq 0$ (la série est nulle si $x = 0$). Ensuite, pour tout $x > 1$, on a

$$f(x+1) - f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+x+1}$$

On reconnaît une série télescopique et donc

$$f(x+1) - f(x) = \frac{1}{x+1}$$

La fonction f définie par (4) vérifie (1).

Pour $f(0)$, on remarque que la série est nulle donc $f(0) = -\gamma$. Pour $f(-1/2)$, on repasse par les limites

$$\begin{aligned} f(-1/2) &= -\gamma + \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{k-1/2} \\ &= -\gamma + \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} \end{aligned}$$

$$\text{Or, } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n - \gamma + o(1) \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} = (\ln(2n) - \gamma + o(1)) - \frac{1}{2} (\ln n - \gamma + o(1))$$

Par propriétés du $\ln$, on a donc

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k+1} = -\gamma + [\ln n - \gamma + o(1)] - 2 \left[\frac{1}{2} \ln n + \ln 2 - \frac{\gamma}{2} + o(1) \right] = -\gamma + 2 \ln 2 + o(1)$$

Ainsi

$$f(0) = -\gamma \quad \text{et} \quad f(-1/2) = -\gamma - 2 \ln 2$$

I.A.3 Soient $-1 \leq x \leq y$ deux réels. Alors pour tout entier n ,

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+y}$$

En sommant cette inégalité pour n allant de 1 à $+\infty$, on obtient $f(x) \leq f(y)$ et ainsi

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est croissante.}}$$

Commençons par montrer que la suite $(f(p) - \ln p)_{p \in \mathbb{N}}$ est de limite nulle. Il suffit pour cela d'écrire que pour tout entier i ,

$$f(i+1) - f(i) = \frac{1}{i+1}$$

d'où en sommant pour i allant de 0 à $p-1$, par télescopage,

$$f(p) - f(0) = \sum_{i=1}^p \frac{1}{i} \quad \text{d'où} \quad f(p) - \ln p = \left(\sum_{i=1}^p \frac{1}{i} \right) - \ln p + f(0)$$

d'où le résultat puisque $f(0) = -\gamma$ et d'après ce qui est rappelé en début d'énoncé.

Soit maintenant $x \geq 1$. On note k sa partie entière. Alors par croissance de f ,

$$f(k) \leq f(x) \leq f(k+1) \quad \text{d'où} \quad f(k) - \ln(k) + \ln(k/x) \leq f(x) - \ln x \leq f(k+1) - \ln(k+1) + \ln((k+1)/x)$$

On sait que par définition, $k \leq x < k+1$. On en déduit aisément que k tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ tandis que k/x et $(k+1)/x$ tendent vers 1. L'encadrement ci-dessus permet alors de conclure que $f(x) - \ln x$ est bien de limite nulle en $+\infty$. Ainsi,

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ définie par (4) vérifie (2).}}$$

La propriété (2) assure immédiatement que $f(x)$ est équivalent à $\ln x$ en $+\infty$ et donc de limite $+\infty$ en ce point. Pour la limite en -1 , on a vu remarquer par croissance de f et d'après (1) que pour $x \in]-1; 0[$,

$$f(0) - \frac{1}{x+1} \leq f(x) = f(x+1) - \frac{1}{x+1} \leq f(1) - \frac{1}{x+1}$$

On en déduit l'équivalent $f(x) \sim -1/(x+1)$ en $(-1)^+$ et notamment que f tend vers $-\infty$ en ce point.

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$$

I.A.4 C'est une application immédiate du théorème de dérivation terme à terme d'une série de fonctions. Pour tout $n \geq 1$, on note

$$f_n :]-1; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$$

Alors sur tout segment $[a; b] \subset]-1; +\infty[$,

- Pour tout entier n , f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a; b]$.
- La série de fonction $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $[a; b]$.
- Pour tout entier $k \geq 1$, la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n^{(k)}$ converge normalement sur $[a; b]$ puisque

$$\|f_n^{(k)}\|_{\infty, [a; b]} = \sup_{x \in [a; b]} \frac{k!}{(n+x)^{k+1}} = \frac{k!}{(n+a)^{k+1}} \sim \frac{k!}{n^{k+1}}$$

Le théorème s'applique et assure que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[a; b]$. Ceci étant vrai quel que soit le segment $[a; b]$,

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

I.B Soit $g \in \mathcal{E}$ vérifiant (5). Fixons $x \geq 1$. Alors pour tout entier n ,

$$g(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(x+k)^2} + f(x+n)$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, il vient
$$g(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+k)^2}$$

Réciproquement, cette application est bien définie car la série ci-dessus converge bien pour tout $x \geq 1$ (par le critère de Riemann). Pour montrer que g tend vers $+\infty$ en $+\infty$, on peut appliquer directement le théorème d'interversion somme/limite (car on a convergence normale de la série sur par exemple $[1; +\infty[)$. Pour les $3/2$, on peut s'en sortir par comparaison série/intégrale. En effet, pour tout $x \geq 1$ et tout entier n , on a

$$\frac{1}{(x+n+1)^2} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{(t+x)^2} \leq \frac{1}{(x+n)^2}$$

En sommant pour n allant de 1 à $+\infty$, il vient

$$g(x+1) \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{(t+x)^2} \leq g(x)$$

Or,
$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{(t+x)^2} = \left[-\frac{1}{t+x} \right]_1^{+\infty} = \frac{1}{x+1} \quad \text{et} \quad g(x+1) = g(x) - \frac{1}{(x+1)^2}$$

d'où
$$\frac{1}{x+1} \leq g(x) \leq \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

On en déduit l'équivalent $g(x) \sim 1/x$ en $+\infty$ et donc le fait que g vérifie (6).

Il existe un unique élément g de E vérifiant (5) et (6).

On a
$$g(0) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

et
$$g(-1/2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k-1/2)^2} = 4 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = 4 \left[\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} \right] = 4 \left[\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{6} \right]$$

Finalement,

$$g(0) = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{et} \quad g(-1/2) = \frac{\pi^2}{2}$$

Au passage, le théorème de dérivation terme à terme et l'expression obtenue ci-dessus de g prouve que

$$g = f'.$$

Partie II

II.A.1 Fixons $x \in \mathbb{R}$ et notons f, g, h les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(t) = e^{-t} t^x \quad g(t) = e^{-t} t^x \ln t \quad \text{et} \quad h(t) = e^{-t} t^x (\ln t)^2$$

Quel que soit x , on a $f(t), g(t)$ et $h(t)$ négligeables devant $1/t^2$ en $+\infty$ par croissances comparées. En 0, on distingue deux cas :

- Pour $x > -1$
$$f(t), g(t) = o(h(t)) \quad \text{et} \quad h(t) \sim t^x (\ln t)^2 = o(t^\alpha)$$

quel que soit $\alpha \in]-1; x[$. Cette domination assure que les trois intégrales sont convergentes.

- Pour $x \leq -1$, f, g, h sont de signe constant au voisinage de 0 et pour t assez proche de 0 (inférieur à $1/e$ en pratique)

$$\frac{1}{t^x} \sim f(t) \leq -g(t) \leq h(t)$$

Puisque l'intégrale $\int_0^1 t^x$ diverge pour $x \leq -1$, ces minoration assurent la divergence des trois intégrales.

Conclusion :

Les intégrales $A(x), B(x)$ et $C(x)$ sont convergentes ssi $x > -1$.

II.A.1 Déterminer le signe de $\chi(x) - \psi(x)$ revient à déterminer le signe de $A(x)C(x) - B(x)^2$ soit

$$\left(\int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt \right) \left(\int_0^{+\infty} e^{-t} t^x (\ln t)^2 dt \right) - \left(\int_0^{+\infty} e^{-t} t^x (\ln t) dt \right)^2$$

Notons pour tout $t > 0$, $u(t) = e^{-t/2} t^{x/2}$ et $v(t) = e^{-t/2} t^{x/2} \ln t$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, pour tout $A > 0$, on a

$$\int_0^A u(t)v(t)dt \leq \int_0^A u(t)^2 dt \int_0^A v(t)^2 dt$$

En remplaçant u et v par leurs expressions, puis en faisant tendre A vers $+\infty$, on obtient alors

$$A(x)C(x) \geq B(x)^2$$

Ainsi

La fonction η est positive.

II.B.1 Déjà vu en cours. Il suffit de faire une intégration par parties (en passant par un segment).

Pour tout $x > -1$, $A(x+1) = (x+1)A(x)$.

II.B.2 On intègre à nouveau par parties l'intégrale $B(x)$ en intégrant le $\ln t$. Il vient pour tout $\epsilon, A > 0$

$$\int_{\epsilon}^A e^{-t} t^x \ln t dt = [e^{-t} t^x (t \ln t - t)]_{\epsilon}^A - \int_{\epsilon}^A (-e^{-t} t^x + x e^{-t} t^{x-1}) (t \ln t - t) dt$$

On peut alors faire tendre ϵ vers 0 et A vers $+\infty$. Le crochet tend vers 0 et en développant l'intégrale de droite (chaque intégrale est convergente), on obtient

$$B(x) = B(x+1) - A(x+1) - xB(x) + A(x)$$

Grâce à la question précédente, il vient

$$B(x+1) = (x+1)B(x) + A(x)$$

En divisant cette égalité par $A(x+1) = (x+1)A(x)$, on obtient le résultat.

La fonction ψ vérifie (1).

II.B.3 On effectue une dernière intégration par parties dans $C(x+1)$ en intégrant $t \mapsto e^{-t}$ et en dérivant $t \mapsto t^{x+1}(\ln t)^2$. Il vient (en passant par un segment puis en faisant tendre les bornes vers l'infini)

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x+1} (\ln t)^2 dt = \underbrace{[-e^{-t} t^{x+1} (\ln t)^2]_0^{+\infty}}_0 + \int_0^{+\infty} e^{-t} ((x+1)t^x (\ln t)^2 + 2t^x \ln t) dt$$

soit

$$C(x+1) = (x+1)C(x) + 2B(x)$$

Par suite,

$$\begin{aligned}
 \eta(x+1) &= \left[\frac{C(x+1)}{A(x+1)} \right] - \psi(x+1)^2 \\
 &= \left[\frac{C(x)}{A(x)} + 2 \frac{B(x)}{(x+1)A(x)} \right] - \psi(x+1)^2 && (\text{car } A(x+1) = (x+1)A(x)) \\
 &= \frac{C(x)}{A(x)} + \left[2 \frac{\psi(x)}{x+1} - \psi(x+1)^2 \right] && (\text{par définition de } \psi) \\
 &= \chi(x) + \left[-\psi(x)^2 - \frac{1}{(x+1)^2} \right] && (\text{car } \psi \text{ vérifie (1)}) \\
 \eta(x+1) &= \eta(x) - \frac{1}{(x+1)^2}
 \end{aligned}$$

Ainsi,

La fonction η vérifie **(2)**.