

Calculs de rayon de convergence

1 _____ (*) _____

Donner le rayon de convergence de la série $\sum \frac{\sqrt{n} \ln n}{n+1} z^n$.

2 _____ (*) _____

Déterminer le rayon de convergence de la série $\sum \cos(n) z^n$ et calculer sa somme.

3 _____ (**) _____

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer celui de la série $\sum a_n z^{n^2}$.

4 _____ (*) _____

Comparer les rayons de convergence de $\sum a_n z^n$ et $\sum a_n^2 z^n$

5 _____ (*) _____

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectivement R_1 et R_2 . On suppose que $a_0 = b_0 = 1$ et que a_n et b_n sont positifs pour tout $n \geq 1$. Montrer que le produit des deux séries entières a pour rayon de convergence $\min(R_1, R_2)$.

Calculs de sommes de séries entières

6 _____ (*) _____

Donner le rayon de convergence et calculer la somme de la série $\sum h_n z^n$ où $(h_n)_{n \geq 1}$ est la suite des nombres harmoniques définie par

$$\forall n \geq 1, \quad h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

7 _____ (*) _____

Justifier la convergence et calculer la somme de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{3^n (2n+1)}$. Combien faut-il calculer de termes cette somme pour avoir une valeur approchée de π à 10^{-3} près ?

8 _____ (*) _____

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sum_{n=0}^{+\infty} (2n+1)^2 x^n = 0$

9 _____ (**) _____ **Mines PC 2009**

On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ avec $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{(2n)!}{(2n-1)(n!)^2}$

Déterminer le rayon de convergence de la série et expliciter $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

Développements en série entière

10 _____ (**) _____

Déterminer le développement en série entière des fonctions suivantes :

$$(a) \quad \ln \left(\frac{2-x}{3-x^2} \right) \quad (b) \quad e^{-x} \sin^2 x \quad (c) \quad (\arcsin x)^2 \quad (d) \quad \int_0^1 \frac{dt}{1+xt \ln t}$$

11 _____ (**) _____

Justifier l'existence et déterminer le développement en série entière de $f : x \mapsto \int_{-\infty}^x \frac{dt}{1+t^2+t^4}$.

12 _____ (*) _____

(a). Soit $a > -1$. Justifier l'existence et donner la valeur de

$$f(a) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + a \cos^2 x}$$

(b). Donner le développement en série entière de f . En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ la valeur de l'intégrale $\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x \, dx$.

13 _____ (***) _____

Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

(a) Montrer que f admet en 0 un développement limité à tout ordre. On note $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de réels telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$$

(b) Exprimer a_n en fonction de $a_0, \dots, a_{n-1}$.

(c) En déduire que pour tout n , $|a_n| \leq 1$, puis que la série $\sum a_n x^n$ converge pour tout $x \in]-1; 1[$.

(d) Montrer que f est développable en série entière sur $] -1; 1[$.

Résolutions de récurrences

14 _____ (**) _____

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par

$$u_0 = u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n + (-1)^n$$

On note $S(z)$ la série entière $\sum u_n z^n$ et R son rayon de convergence.

(a). Montrer que pour tout entier n , on a $|u_n| \leq 2^{n+1} - 1$. Que peut-on en déduire sur R ?

(b). Donner une expression simple de $S(z)$ et en déduire R , puis une expression de u_n pour tout entier n .

15 _____ (**) _____ **Mines PC 2008**

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + \frac{u_n}{n+2}$$

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} u_n x^n$.

Divers

16 _____ (**) _____ **ENS PC 2019**

Soit $k \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. On pose $L_k : z \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^k}$

(a). Montrer que pour tout $k \geq 2$, L_k est prolongeable par continuité sur $\overline{B}(0, 1)$.

(b). Montrer que $\forall x \in]0; 1[, \quad L_2(x) + L_2(1-x) + L_1(x)L_1(1-x) = L_2(1)$

Exercices supplémentaires non corrigés

17 _____ (?) _____ **Mines PC 2024**

Soit N un entier qui n'est pas un carré parfait. On pose $a = \sqrt{N}$.

(a). Montrer qu'il existe une suite d'entiers $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $na - p_n \in [-1/2; 1/2]$.

(b). Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sin(na\pi) > c/n$.

(c). En déduire le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{\sin(n\pi\sqrt{2})}$.

18 _____ (?) _____ **ENS PC 2024**

Encadrer et donner un équivalent en $+\infty$ de $S : x \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\sqrt{k!}}$.

19 _____ (?) _____ **X PC 2024**

Soient U un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$, k un entier et $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ développable en série entière au voisinage de 0 telle que

$$f(z) = O_{z \rightarrow 0}(z^k)$$

Montrer que pour $r > 0$ assez petit, il existe au moins $2k$ nombres complexes z de module r tels que $f(z)$ soit réel.

20 _____ (?) _____ **X PC 2024**

Soit S l'ensemble des $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x f'(x/2)$$

(a). Chercher les éléments de S développables en série entière.

(b). L'espace S est-il de dimension finie ?

21 _____ (?) _____ **X PC 2024**

Soit $(a_{k,n})_{(k,n) \in \mathbb{N}^2}$ une famille de nombres complexes telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série entière $\sum_{k \geq 0} a_{k,n} z^k$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1. On note f_n la somme de cette dernière et pour tout $r > 0$, B_r l'ensemble des complexes de module $\leq r$. On suppose que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur B_1 et qu'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall z \in B_1, \quad |f_n(z)| \leq M$$

Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur B_r pour tout $r < 1$.

- 2** Justifier que la suite $(\cos n)_{n \in \mathbb{N}}$ est divergente. On pourra pour cela considérer la suite $(\sin n)_{n \in \mathbb{N}}$, montrer que ces deux suites sont de même nature puis raisonner par l'absurde.
- 3** Pour deviner le résultat dans le cas général, vérifier ce qui passe pour lorsque $a_n = \rho^n$ avec $\rho > 0$ (on pourra utiliser d'Alembert dans ce cas particulier).
- 4** Pour deviner le résultat dans le cas général, vérifier ce qui passe pour lorsque $a_n = \rho^n$ avec $\rho > 0$ (on pourra utiliser d'Alembert dans ce cas particulier).
- 5** Noter $f_1 f_2 = \sum_{n \geq 0} c_n z^n$ puis montrer que pour $|z| > \min(R_1, R_2)$, la suite $(c_n z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée.
- 6** Utiliser un produit de Cauchy.
- 7** Calculer la somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$. Pour la valeur approchée, utiliser un résultat sur les séries alternées.
- 8** Calculer la somme de la série à l'aide de la base $(1, (X+1), (X+1)(X+2)/2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
- 9** Pour trouver le rayon de convergence, utiliser la règle de d'Alembert. Déterminer ensuite une équation différentielle du premier ordre vérifiée par la somme de la série sur son domaine ouvert de convergence.
- 10** (a) Utilisez les propriétés et le développement en série entière du $\ln$.
(b) Utiliser le développement en série entière de trois exponentielles.
(c) Utiliser une équation différentielle.
- 11** Déterminer le développement en série entière de la dérivée.
- 12** (a) Utiliser le changement de variable $u = \tan x$ pour calculer $f(a)$.
(b) Utiliser une intégration terme à terme.
- 13** (a) Justifier que $1/f$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$. On pourra exprimer $1/f(x)$ pour tout x comme une intégrale à paramètre simple sur $[0; 1]$.
(b) Remarquer que pour tout réel x , $f(x)(e^x - 1) = x$.
(c) Raisonner par récurrence sur n .
- 14** (b) Etablir une équation satisfaite par $F(z)$ en utilisant la relation de récurrence et des changements d'indices.
- 15** Justifier pour tout $n \in \mathbb{N}$ que $u_n \leq n + 2$ et en déduire le rayon de convergence de la série entière. Chercher ensuite une équation différentielle du premier ordre vérifiée par la somme de la série sur son domaine ouvert de convergence.
- 16** (a) Remarquer qu'on a convergence normale sur $\overline{B}(0, 1)$.
(b) Dériver le membre de gauche de l'égalité pour montrer qu'il s'agit d'une quantité constante. On pourra utiliser les développements en série usuels pour avoir une expression simple de L_1 .