

I. QUESTIONS DE COURS

1 La définition de l'espérance d'une variable aléatoire discrète varie selon que l'image de X est un ensemble fini ou non. Distinguons deux cas.

- 1^{er} cas : Si $X(\Omega)$ est finie, alors X est d'espérance finie.
- 2^e cas : Si $X(\Omega)$ est infinie et dénombrable, alors en notant $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$, on dit que X est d'espérance finie si la série $\sum x_n \mathbb{P}(X = x_n)$ converge absolument.

Démontrons à présent l'équivalence demandée en distinguant ces deux cas.

- 1^{er} cas : $X(\Omega)$ est finie. Alors l'image de Ω par $|X|$ est également finie, car c'est l'image de l'ensemble fini $X(\Omega)$ par l'application $x \in \mathbb{R} \mapsto |x|$. D'après la définition qui précède, $|X|$ est d'espérance finie.
- 2^e cas : Si $X(\Omega)$ est infinie et dénombrable, d'après le théorème de transfert, la variable aléatoire $|X|$ est d'espérance finie si et seulement si, avec les notations précédentes, $\sum |x_n| \mathbb{P}(X = x_n)$ converge absolument. La probabilité $\mathbb{P}$ prenant des valeurs positives ou nulles, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |x_n| \mathbb{P}(X = x_n) = |x_n \mathbb{P}(X = x_n)|$$

Par conséquent, la convergence absolue de la série $\sum |x_n| \mathbb{P}(X = x_n)$ équivaut à la convergence absolue de la série $\sum x_n \mathbb{P}(X = x_n)$, c'est-à-dire au fait que X est d'espérance finie.

Dans tous les cas,

X est d'espérance finie si et seulement si $|X|$ l'est aussi.

2 On suppose que X est bornée : soit $M \geq 0$ tel que $\mathbb{P}(|X| \leq M) = 1$. Lorsque $X(\Omega)$ est finie, X est d'espérance finie, indépendamment du fait qu'elle soit bornée. Supposons désormais que $X(\Omega)$ est infinie dénombrable. En notant $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$, comme $\mathbb{P}$ est positive,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |x_n \mathbb{P}(X = x_n)| \leq M \mathbb{P}(X = x_n)$$

En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

- soit $|x_n| \leq M$;
- soit $|x_n| > M$ et dans ce cas $\{X = x_n\} \subset \{|X| > M\}$ d'où l'on déduit, par croissance de $\mathbb{P}$, que $0 \leq \mathbb{P}(X = x_n) \leq \mathbb{P}(|X| > M) = 1 - \mathbb{P}(|X| \leq M) = 0$, et finalement $\mathbb{P}(X = x_n) = 0$.

Dans tous les cas, l'inégalité ci-dessus est vraie. Par comparaison de séries à termes positifs, comme $\sum \mathbb{P}(X = x_n)$ est convergente (par définition de la loi de X), on en déduit que la série $\sum x_n \mathbb{P}(X = x_n)$ est absolument convergente. Ainsi,

Si X est bornée, alors X est d'espérance finie.

II. GÉNÉRALITÉS SUR LES VARIABLES ALÉATOIRES

Nous allons étudier des variables aléatoires entières symétriques vérifiant la condition $(\mathcal{D}_\alpha)$ pour un $\alpha > 0$. Il convient donc de se demander s'il existe un réel $\alpha > 0$ et une variable aléatoire entière symétrique X tels que $(\mathcal{D}_\alpha)$ est vérifié.

Considérons une variable aléatoire $X : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}$ suivant la loi donnée par :

$$\mathbb{P}(X = 0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{3}{\pi^2 k^2}$$

Ainsi définie, X est une variable aléatoire entière symétrique sur $(\mathbb{Z}, \mathcal{P}(\mathbb{Z}), \mathbb{P})$. Soit $n \geq 2$. On a

$$\mathbb{P}(|X| \geq n) = \frac{6}{\pi^2} \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

Or, comme la fonction $t \mapsto 1/t^2$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\forall k \geq n \quad \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^2} \leq \frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^2}$$

soit
$$\forall k \geq n \quad \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

On reconnaît dans les membres de gauche et de droite des termes généraux de séries télescopiques, donc on obtient en sommant

$$\frac{1}{n} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n-1} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{1-1/n} = \frac{1}{n} \times \left(1 + \underset{n \rightarrow +\infty}{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

d'où
$$\frac{6}{n\pi^2} \leq \mathbb{P}(|X| \geq n) \leq \frac{6}{n\pi^2} + \underset{n \rightarrow +\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

D'après le théorème d'encadrement, on en déduit que X est une variable aléatoire entière symétrique vérifiant $(\mathcal{D}_\alpha)$ avec $\alpha = 6/\pi^2$.

La question suivante se pose alors : Soit $\alpha > 0$. Existe-t-il une variable aléatoire entière symétrique $X : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}$ satisfaisant $(\mathcal{D}_\alpha)$? On peut vérifier que la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$p_n = \begin{cases} \frac{\alpha}{n} - \frac{\alpha}{n+1} & \text{si } n > \alpha \\ 1 - \frac{\alpha}{[\alpha] + 1} & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est positive et vérifie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{k=n}^{+\infty} p_k = \frac{\alpha}{n} + \underset{n \rightarrow +\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

En raisonnant comme précédemment, on démontre que la variable aléatoire $X : \Omega \rightarrow \mathbb{Z}$ suivant la loi donnée par

$$\mathbb{P}(X = 0) = 1 - \frac{\alpha}{[\alpha] + 1} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad \mathbb{P}(X = n) = \frac{p_{|n|}}{2}$$

est alors une variable aléatoire entière symétrique vérifiant $(\mathcal{D}_\alpha)$: l'énoncé n'est pas en train de parler de choses qui n'existeraient pas !

3 Comme X vérifie la condition $(\mathcal{D}_\alpha)$,

$$n \mathbb{P}(|X| \geq n) = \alpha + o\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha$$

En particulier, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $n \mathbb{P}(|X| \geq n) \geq \alpha/2$ et en particulier $n \mathbb{P}(|X| \geq n) > 0$. On en déduit que $X(\Omega)$ n'est pas finie. De plus, d'après la question 1, on sait que X est d'espérance finie si et seulement si $|X|$ l'est. Or, comme $|X|$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$, ceci équivaut à la convergence de $\sum \mathbb{P}(|X| \geq n)$. La série harmonique étant divergente, l'inégalité

$$\forall n \geq n_0 \quad \mathbb{P}(|X| \geq n) \geq \frac{\alpha}{2n}$$

permet donc d'affirmer, grâce au théorème de comparaison des séries à termes positifs, que X n'est pas d'espérance finie.

Il est aussi possible de raisonner par contraposée grâce à un raffinement de l'inégalité de Markov. Soit X une variable aléatoire entière et d'espérance finie. D'après la question 1, $|X|$ est d'espérance finie et positive, et l'inégalité de Markov implique que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}(|X| \geq n) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|)}{n}$$

En effet, puisque l'évènement $\{|X| \geq n\}$ coïncide avec la réunion disjointe des évènements $(\{|X| = k\})_{k \geq n}$, on a

$$\begin{aligned} n \mathbb{P}(|X| \geq n) &= \sum_{k=n}^{+\infty} n \mathbb{P}(|X| = k) \\ &\leq \sum_{k=n}^{+\infty} k \mathbb{P}(|X| = k) \\ n \mathbb{P}(|X| \geq n) &\leq \sum_{k=0}^{+\infty} k \mathbb{P}(|X| = k) = \mathbb{E}(|X|) \end{aligned}$$

En s'arrêtant à l'avant-dernière ligne du calcul, $n \mathbb{P}(|X| \geq n)$ est positif et majoré par le reste d'une série convergente, donc tend vers 0 quand n tend vers l'infini, par encadrement. Le seul α pour lequel X pourrait satisfaire $(\mathcal{D}_\alpha)$ est donc $\alpha = 0$, ce qui est exclu (on veut $\alpha > 0$). Donc $|X|$ n'est pas d'espérance finie.

Par ailleurs, pour toute variable aléatoire Y , si Y^2 est d'espérance finie alors Y est d'espérance finie. Par contraposée, on en déduit que X^2 n'est pas d'espérance finie.

Les variables aléatoires X et X^2 ne sont pas d'espérance finie.

4 Puisque X est symétrique, les variables aléatoires X et $-X$ prennent leurs valeurs dans le même ensemble et suivent la même loi. On déduit alors du théorème 1 admis dans l'énoncé que $f(X)$ et $f(-X)$ suivent la même loi. Or, comme f est impaire, on a $f(-X) = -f(X)$. Ainsi, $f(X)$ et $-f(X)$ suivent la même loi, donc

La variable aléatoire $f(X)$ est symétrique.

Supposons que $f(X)$ est d'espérance finie. Comme $f(X)$ et $-f(X)$ suivent la même loi, elles ont même espérance, soit $\mathbb{E}(f(X)) = \mathbb{E}(-f(X))$. Par linéarité de l'espérance, on en déduit que $\mathbb{E}(f(X)) = -\mathbb{E}(f(X))$, d'où $\mathbb{E}(f(X)) = 0$. Ainsi,

Si $f(X)$ est d'espérance finie, alors $\mathbb{E}(f(X)) = 0$.

5 Remarquons que, par symétrie de X et Y , les couples (X, Y) et $(-X, -Y)$ prennent leurs valeurs dans le même ensemble. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Par indépendance de X et Y ,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}((-X, -Y) = (x, y)) &= \mathbb{P}((X, Y) = (-x, -y)) \\ &= \mathbb{P}(\{X = -x\} \cap \{Y = -y\}) \\ \mathbb{P}((-X, -Y) = (x, y)) &= \mathbb{P}(X = -x) \mathbb{P}(Y = -y)\end{aligned}$$

Les variables aléatoires X et Y étant symétriques, on en déduit que

$$\mathbb{P}((-X, -Y) = (x, y)) = \mathbb{P}(X = x) \mathbb{P}(Y = y)$$

d'où, par indépendance de X et Y ,

$$\mathbb{P}((-X, -Y) = (x, y)) = \mathbb{P}((X, Y) = (x, y))$$

En conclusion,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \mathbb{P}((-X, -Y) = (x, y)) = \mathbb{P}((X, Y) = (x, y))$$

c'est-à-dire que les couples $(-X, -Y)$ et (X, Y) suivent la même loi. On peut à présent appliquer le théorème 1 admis par l'énoncé aux couples (X, Y) et $(-X, -Y)$ et à la fonction $u : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x + y \in \mathbb{R}$. On obtient que les variables aléatoires $X + Y$ et $-X - Y = -(X + Y)$ suivent la même loi, c'est-à-dire que

La variable aléatoire $X + Y$ est symétrique.

III. DEUX SOMMES DE SÉRIES

6 Commençons par établir un résultat intermédiaire. L'équation $1 - uz = 0$ d'inconnue $u \in \mathbb{R}$ est équivalente à $uz = 1$, soit $z \neq 0$ et $u = 1/z$. Comme $|z| \leq 1$, on en déduit que $|u| \geq 1$. En raisonnant par l'absurde, si $u \in [0; 1]$ était une solution, on aurait $u = 1$, d'où $z = 1$, ce qui contredit l'hypothèse $z \neq 1$. Ainsi, l'équation $1 - uz = 0$ n'a pas de solution sur $[0; 1]$.

L'intégrande $f : u \in [0; 1] \mapsto z/(1 - uz)$ est donc un quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Elle est en particulier continue sur $[0; 1]$. Ainsi,

La fonction L est bien définie sur $[0; 1]$.

On en déduit également qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; 1]$ et

$$\forall t \in [0; 1] \quad L'(t) = f(t) = \frac{z}{1 - tz}$$

Montrons à présent par récurrence que la propriété

$$\mathcal{P}(n) : \quad \begin{aligned} &\text{« La fonction } L \text{ est de classe } \mathcal{C}^n \text{ sur } [0; 1] \text{ et} \\ &\text{pour tout } t \in [0; 1], L^{(n)}(t) = \frac{(n-1)! z^n}{(1 - tz)^n} \text{ »} \end{aligned}$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- $\mathcal{P}(1)$ est vraie d'après ce qui précède.

- $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$: Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Comme l'application $t \mapsto 1 - tz$ est dérivable sur $[0; 1]$ et ne s'y annule pas, par hypothèse de récurrence, la fonction $L^{(n)}$ est dérivable sur $[0; 1]$ et, pour tout $t \in [0; 1]$,

$$L^{(n+1)}(t) = (n-1)! z^n \times \frac{-n(-z)}{(1-tz)^{n+1}} = \frac{n! z^{n+1}}{(1-tz)^{n+1}}$$

La fonction $L^{(n+1)}$ est continue sur $[0; 1]$ en tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, donc L est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur ce même intervalle.

- En conclusion, la fonction L est de classe $\mathcal{C}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, autrement dit

La fonction L est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $[0; 1]$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall t \in [0; 1] \quad L^{(n)}(t) = \frac{(n-1)! z^n}{(1-tz)^n}$$

7 Soit $t \in]0; 1]$. Grâce à l'inégalité triangulaire

$$1 = |(1-tz) + tz| \leq |1-tz| + |tz|$$

donc

$$1 - t|z| = 1 - |t||z| \leq |1-tz|$$

d'où, comme $|z| \leq 1$,

$\forall t \in]0; 1] \quad 1 - t \leq |1-tz|$

Supposons par l'absurde qu'il existe $t \in]0; 1]$ tel que $1-t = |1-tz|$. Notons que cela impose $z \neq 0$. De plus, d'après ce qui précède, les inégalités

$$1 - t \leq 1 - t|z| \leq |1-tz|$$

sont des égalités. En particulier,

$$|(1-tz) + tz| = |1-tz| + |tz|$$

et il y a donc égalité dans l'inégalité triangulaire. On sait que cela se produit si et seulement si $1-tz$ et tz sont positivement liés. Ceci équivaut, puisque $tz \neq 0$, à l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$1-tz = \lambda tz \quad \text{soit} \quad (\lambda+1)tz = 1$$

Comme $(\lambda+1)t > 0$, on en déduit que $z \in \mathbb{R}_+$ d'où, puisque $|z| \leq 1$, $z \in [0; 1]$. Mais alors $tz \in [0; 1]$ donc l'égalité

$$1-t = |1-tz| = 1-tz$$

impose, comme $t \neq 0$, $z = 1$, ce qui contredit l'hypothèse de l'énoncé. Ainsi,

$\forall t \in]0; 1] \quad 1-t < |1-tz|$

8 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$f_n : \begin{cases}]0; 1[\longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \left| \frac{1-t}{1-tz} \right|^n \end{cases}$$

et appliquons le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application f_n est continue sur $]0; 1[$ en tant que composée de la fonction continue $z \in \mathbb{C} \mapsto |z|^n \in \mathbb{C}$ et d'un quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, comme on l'a vu à la question 6.

- Soit $t \in]0; 1[$. D'après la question 7, la suite $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q = |1 - t|/|1 - tz|$ comprise strictement entre 0 et 1. Ainsi,

$$f_n(t) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

- À nouveau, la question 7 assure que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in]0; 1[\quad |f_n(t)| \leq 1$$

et la fonction constante égale à 1 est bien continue et intégrable sur $]0; 1[$.

Ainsi, d'après le théorème de convergence dominée,

$$\boxed{\int_0^1 \left| \frac{1-t}{1-tz} \right|^n dt \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0}$$

Par ailleurs, l'application $t \in [0; 1] \mapsto |1 - tz| \in \mathbb{R}_+$ étant continue sur le segment $[0; 1]$, elle y atteint son minimum, que l'on note $m \in \mathbb{R}_+$. Comme on l'a vu à la question 6, cette fonction ne s'annule pas donc $m > 0$. Alors, comme $|z| \leq 1$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \int_0^1 \frac{z^{n+1}(1-t)^n}{(1-tz)^{n+1}} dt \right| \leq \int_0^1 \frac{|z|^{n+1}}{|1-tz|} \times \left| \frac{1-t}{1-tz} \right|^n dt \leq \frac{1}{m} \int_0^1 \left| \frac{1-t}{1-tz} \right|^n dt$$

D'après le résultat précédent, on obtient finalement

$$\boxed{\int_0^1 \frac{z^{n+1}(1-t)^n}{(1-tz)^{n+1}} dt \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0}$$

Sans utiliser le premier résultat, on pouvait démontrer la deuxième convergence directement à l'aide du théorème de convergence dominée.

9 Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a démontré à la question 6 que L est de classe $\mathcal{C}^{N+1}$ et on a déterminé les dérivées n -ièmes de L pour tout $n \in \llbracket 1; N+1 \rrbracket$. La formule de Taylor avec reste intégral s'écrit donc, en isolant le premier terme de la somme,

$$\begin{aligned} L(1) &= L(0) + \sum_{n=1}^N \frac{L^{(n)}(0)}{n!} + \int_0^1 \frac{L^{(N+1)}(t)}{N!} (1-t)^N dt \\ &= 0 + \sum_{n=1}^N \frac{z^n}{n} + \int_0^1 \frac{z^{N+1}(1-t)^N}{(1-tz)^{N+1}} dt \end{aligned}$$

D'après la question 8, l'intégrale dans le membre de droite tend vers 0 quand N tend vers l'infini. On en déduit que la série de terme général z^n/n converge et, en passant à la limite dans l'égalité,

$$\boxed{L(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}}$$

Si z est un réel dans $] -1; 1[$, alors on peut directement calculer

$$L(1) = \int_0^1 \frac{z}{1-uz} du = [-\ln(1-uz)]_0^1 = -\ln(1-z)$$

et, grâce au développement en série entière du logarithme, on peut retrouver le résultat ci-dessus. Attention à ne pas écrire ce calcul pour un complexe z qui n'est pas réel !

Lorsque z est de module strictement inférieur à 1 (et seulement dans ce cas), on aurait pu utiliser le développement en série entière de $1/(1-Z)$ sur le disque unité ouvert pour obtenir, comme $|z| < 1$,

$$\forall u \in [0; 1] \quad \frac{z}{1-uz} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n z^{n+1}$$

puis conclure en appliquant un théorème d'intégration terme à terme.

Notons que contrairement au résultat que nous avons obtenu, ces techniques ne permettent en rien d'affirmer que la série de terme général z^n/n est convergente lorsque $z \neq 1$ et $|z| = 1$. L'objectif de la suite de cette partie est justement d'obtenir une expression de la somme de la série de terme général z^n/n lorsque $z \neq 1$ est un complexe de module 1 ne faisant intervenir que des fonctions usuelles.

10 Les projections $(t, u) \in \mathbb{R}^2 \mapsto u \in \mathbb{R}$ et $(u, t) \in \mathbb{R}^2 \mapsto t \in \mathbb{R}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$ car linéaires entre $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels de dimension finie. Alors, comme $t \in \mathbb{R} \mapsto e^{it} \in \mathbb{C}$ est continue sur $\mathbb{R}$, la fonction $(t, u) \in \mathbb{R}^2 \mapsto e^{it} \in \mathbb{C}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ puis, par produit, la fonction $(t, u) \in \mathbb{R}^2 \mapsto u e^{it} \in \mathbb{C}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. Par somme avec l'application constante $(t, u) \in \mathbb{R}^2 \mapsto 1 \in \mathbb{C}$, la fonction $(t, u) \in \mathbb{R}^2 \mapsto 1 + u e^{it} \in \mathbb{C}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. Enfin, l'application $z \in \mathbb{C} \mapsto |z| \in \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{C}$ donc, par composition,

L'application γ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Soit $a \in]0; \pi[$. Comme l'application γ est continue sur l'ensemble fermé et borné $[-a; a] \times [0; 1]$, elle y est bornée et atteint ses bornes. En particulier, il existe $(t_a, u_a) \in [-a; a] \times [0; 1]$ tel que

$$\forall (t, u) \in [-a; a] \times [0; 1] \quad \gamma(t, u) \geq \gamma(t_a, u_a)$$

En posant $m_a = \gamma(t_a, u_a)$, on a $m_a \geq 0$ car γ est positive sur $\mathbb{R}^2$. Si $u_a = 0$, alors $m_a = 1 > 0$. Supposons désormais que $u_a \in]0; 1]$. Comme $t_a \in [-a; a] \subset]-\pi; \pi[$, en posant $z = -e^{it_a}$ on a bien $z \neq 1$. On peut donc appliquer la question 7 avec $t = u_a \in]0; 1]$ et obtenir $0 \leq 1 - u_a < |1 + u_a e^{it_a}| = m_a$. En conclusion,

Pour tout $a \in]0; \pi[$, il existe un réel $m_a > 0$ tel que

$$\forall (t, u) \in [-a; a] \times [0; 1] \quad |1 + u e^{it}| \geq m_a$$

11 Posons
$$f: \begin{cases}]-\pi; \pi[\times [0; 1] \longrightarrow \mathbb{C} \\ (t, u) \longmapsto \frac{e^{it}}{1 + u e^{it}} \end{cases}$$

et appliquons le théorème de dérivation des intégrales à paramètre.

- Soit $t \in]-\pi; \pi[$. En prenant $z = -e^{it}$, on a $|z| = 1$ et $z \neq 1$ et on a vu à la question 6 que la fonction $u \in [0; 1] \mapsto 1 + uz$ ne s'annule pas. En tant que quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, l'application $u \in [0; 1] \mapsto f(t, u)$ est continue sur le segment $[0; 1]$ et donc intégrable sur celui-ci.
- Soit $u \in [0; 1]$. Comme ci-dessus, l'application $t \in]-\pi; \pi[\mapsto 1 + u e^{it}$ ne s'annule pas (puisque $z = -e^{it}$ ne prend pas la valeur 1). Par conséquent, en tant que quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ dont le dénominateur

ne s'annule pas, l'application $t \in]-\pi; \pi[\mapsto f(t, u)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $(t, u) \in]-\pi; \pi[\times [0; 1]$,

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t, u) = \frac{ie^{it}(1 + ue^{it}) - e^{it} \times iue^{it}}{(1 + ue^{it})^2} = \frac{ie^{it}}{(1 + ue^{it})^2}$$

- Soit $t \in]-\pi; \pi[$. Comme précédemment, la fonction $u \in [0; 1] \mapsto 1 + ue^{it}$ ne s'annule pas. On en déduit que l'application $u \in [0; 1] \mapsto \partial_t f(t, u)$ est continue sur $[0; 1]$.
- Vérifions l'hypothèse de domination localement. Soit $a \in]0; \pi[$. Pour tout $(t, u) \in [-a; a] \times [0; 1]$, d'après la question 10,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, u) \right| \leq \frac{1}{|\gamma(t, u)|^2} \leq \frac{1}{m_a^2}$$

et la fonction constante égale à $1/m_a^2$ est continue donc intégrable sur $[0; 1]$.

Ainsi, d'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-a; a]$ pour tout $a \in]0; \pi[$, donc sur $]-\pi; \pi[$, et on peut dériver sous le signe intégral. En conclusion,

La fonction F est $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi; \pi[$ et

$$\forall t \in]-\pi; \pi[\quad F'(t) = \int_0^1 \frac{ie^{it}}{(1 + ue^{it})^2} du$$

12 Soit $t \in]-\pi; \pi[$. L'intégrande apparaissant dans l'expression de F' obtenue à la question 11 est, à une constante près, de la forme g'/g^2 avec $g : u \in [0; 1] \mapsto 1 + ue^{it}$. On a donc

$$F'(t) = i \left[\frac{-1}{1 + ue^{it}} \right]_{u=0}^{u=1} = i \left(1 - \frac{1}{1 + e^{it}} \right) = \frac{ie^{it}}{1 + e^{it}}$$

En mettant $e^{it/2}$ en facteur au numérateur et au dénominateur, on obtient

$$\frac{e^{it}}{1 + e^{it}} = \frac{e^{it/2} \times e^{it/2}}{e^{it/2} \times (e^{-it/2} + e^{it/2})} = \frac{\cos(t/2) + i \sin(t/2)}{2 \cos(t/2)} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \tan \frac{t}{2}$$

Ainsi,

$$\forall t \in]-\pi; \pi[\quad F'(t) = \frac{-\tan(t/2)}{2} + \frac{i}{2}$$

La fonction F étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi; \pi[$, on a, d'après le théorème fondamental du calcul intégral, pour tout $t \in]-\pi; \pi[$,

$$\begin{aligned} F(t) &= F(0) + \int_0^t F'(u) du \\ &= \int_0^1 \frac{du}{1+u} + \frac{1}{2} \int_0^t \left(-\tan \frac{u}{2} \right) du + \frac{it}{2} \end{aligned}$$

Or

$$\int_0^1 \frac{du}{1+u} = [\ln(1+u)]_0^1 = \ln(2)$$

et, pour tout $t \in]-\pi; \pi[$, en effectuant le changement de variable linéaire $s = u/2$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^t \left(-\tan \frac{u}{2}\right) du &= 2 \int_0^{t/2} (-\tan s) ds \\ &= 2 \int_0^{t/2} \frac{\cos'(s)}{\cos(s)} ds \\ &= 2 [\ln |\cos s|]_0^{t/2} \\ &= 2 \ln \left| \cos \frac{t}{2} \right| \\ \int_0^t \left(-\tan \frac{u}{2}\right) du &= 2 \ln \left(\cos \frac{t}{2} \right) \quad \text{car } t \in]-\pi; \pi[\end{aligned}$$

En conclusion $\forall t \in]-\pi; \pi[\quad F(t) = \ln(2) + \ln \left(\cos \frac{t}{2} \right) + \frac{it}{2}$

soit $\boxed{\forall t \in]-\pi; \pi[\quad F(t) = \ln \left(2 \cos \frac{t}{2} \right) + \frac{it}{2}}$

13 Comme $\theta \in]0; 2\pi[$, on peut appliquer le résultat de la question 9 en prenant $z = e^{i\theta} \neq 1$. On a donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{n} = L(1) = \int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1 - ue^{i\theta}} du$$

Le résultat à obtenir ainsi que le fait que $\theta - \pi \in]-\pi; \pi[$, qui est le domaine de définition de F , suggèrent d'introduire dans l'intégrale précédente la quantité $\theta - \pi$ en écrivant $\theta = (\theta - \pi) + \pi$. On obtient, grâce à la propriété de morphisme de l'exponentielle,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{n} = \int_0^1 \frac{e^{i(\theta-\pi)} e^{i\pi}}{1 - ue^{i(\theta-\pi)} e^{i\pi}} du = - \int_0^1 \frac{e^{i(\theta-\pi)}}{1 + ue^{i(\theta-\pi)}} du = -F(\theta - \pi)$$

Or, d'après la question 12,

$$F(\theta - \pi) = \ln \left(2 \cos \frac{\theta - \pi}{2} \right) + \frac{i(\theta - \pi)}{2} = \ln \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \right) + \frac{i(\theta - \pi)}{2}$$

De plus, la convergence de la série de terme général $e^{in\theta}/n$ équivaut à celle des séries de termes généraux $\operatorname{Re}(e^{in\theta}/n) = \cos(n\theta)/n$ et $\operatorname{Im}(e^{in\theta}/n) = \sin(n\theta)/n$. Ainsi,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} + i \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{n} = -\ln \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \right) + \frac{i(\pi - \theta)}{2}$$

Par unicité des parties réelle et imaginaire, on obtient

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} = -\ln \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \right) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} = \frac{\pi - \theta}{2}}$$

La suite $(z^n/n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée si et seulement si $|z| \leq 1$ donc le rayon de convergence de la série entière $\sum z^n/n$ est égal à 1. D'après le cours, on sait que cette série converge normalement sur tout disque fermé inclus dans le disque ouvert D centré en 0 et de rayon 1 et diverge grossièrement

à l'extérieur du disque fermé $\overline{D}$, mais le programme de PC (et même celui de MP) ne fournit pas de résultats généraux sur la convergence éventuelle à la frontière. Pour $z = 1$, on retrouve la série harmonique qui est divergente. À la question 9, on a démontré la convergence de la série entière sur le cercle unité privé de 1. Lorsque l'on se restreint à l'intervalle $] -1 ; 1 [$, on sait que la somme de cette série est la fonction $z \in] -1 ; 1 [\mapsto -\ln(1-z)$. Grâce à l'étude d'une intégrale à paramètre rappelant le logarithme (puisque l'intégrande est de la forme h'/h mais avec h à valeurs complexes), les questions 11 et 12 permettent d'obtenir à la question 13 une expression simple de la somme de la série entière sur le cercle unité privé de 1.

IV. FONCTION CARACTÉRISTIQUE D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE SYMÉTRIQUE

14 Comme la fonction cosinus est bornée par 1, on a $\mathbb{P}(|\cos(tX)| \leq 1) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, donc la variable aléatoire $\cos(tX)$ est bornée. Par conséquent, d'après la question 2, elle est d'espérance finie. Ainsi,

La fonction Φ_X est bien définie sur $\mathbb{R}$.

Comme la fonction cosinus est paire, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\cos(-tX) = \cos(tX)$ donc

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \Phi_X(-t) = \mathbb{E}(\cos(-tX)) = \mathbb{E}(\cos(tX)) = \Phi_X(t)$$

En conclusion,

La fonction Φ_X est paire.

Enfin, comme $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, par croissance de l'espérance,

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad -1 = \mathbb{E}(-1) \leq \mathbb{E}(\cos(tX)) \leq \mathbb{E}(1) = 1$$

soit

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad |\Phi_X(t)| \leq 1$$

15 Comme à la question 1, on distingue deux cas, selon que l'image de X est un ensemble fini ou non.

- 1^{er} cas: Si $X(\Omega)$ est finie, en notant $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_N\}$ avec $N \in \mathbb{N}^*$, d'après le théorème de transfert,

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \Phi_X(t) = \sum_{n=1}^N \cos(tx_n) \mathbb{P}(X = x_n)$$

La fonction Φ_X est donc continue sur $\mathbb{R}$ en tant que somme finie de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

- 2^e cas: Si $X(\Omega)$ est infinie et dénombrable, notons $X(\Omega) = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$. D'après la question 14, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\cos(tX)$ est d'espérance finie. En appliquant le théorème de transfert à la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(tx)$, on obtient

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \Phi_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \cos(tx_n) \mathbb{P}(X = x_n)$$

En posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n : t \in \mathbb{R} \mapsto \cos(tx_n) \mathbb{P}(X = x_n)$, on doit démontrer la continuité de la somme de la série de fonction $\sum \varphi_n$. Appliquons pour cela le théorème de continuité du cours :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, φ_n est continue sur $\mathbb{R}$.
- Pour montrer la convergence uniforme de la série sur $\mathbb{R}$, démontrons-en la convergence normale. On a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|\varphi_n\|_\infty \leq \mathbb{P}(X = x_n)$$

Or la série de terme général $\mathbb{P}(X = x_n)$ est convergente par définition de la loi de X . Alors, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum \varphi_n$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, grâce au théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions continues, Φ_X est continue sur $\mathbb{R}$.

Dans tous les cas, La fonction Φ_X est continue sur $\mathbb{R}$.

Pour toute variable aléatoire X (pas forcément symétrique), on appelle fonction caractéristique de X l'application Φ_X définie par

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \Phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$$

Notons que cette fonction est toujours définie puisque, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la variable aléatoire e^{itX} est bornée. On peut démontrer sa continuité par le même argument que ci-dessus. La fonction caractéristique n'est pas définie ainsi dans l'énoncé pour tenir compte du fait que l'espérance d'une variable aléatoire à valeurs complexes n'est pas au programme en 2021 (mais le deviendra prochainement). Son nom n'est pas innocent puisque l'on peut montrer que deux variables aléatoires ayant la même fonction caractéristique suivent la même loi. On pourra consulter le sujet Centrale Maths 2 PC 2020 à ce propos.

Si X est une variable aléatoire symétrique, alors $\Phi_X(t) = \Phi_{-X}(t)$ donc, par linéarité de l'espérance, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}(\cos(tX)) = \frac{\mathbb{E}(e^{itX}) + \mathbb{E}(e^{-itX})}{2} = \frac{\Phi_X(t) + \Phi_{-X}(t)}{2} = \Phi_X(t)$$

et l'on retrouve la définition de l'énoncé. Réciproquement, si X est une variable aléatoire telle que Φ_X est à valeurs réelles, alors X est symétrique. En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par linéarité de l'espérance,

$$\Phi_{-X}(t) = \mathbb{E}(e^{-itX}) = \mathbb{E}(\overline{e^{itX}}) = \overline{\mathbb{E}(e^{itX})} = \overline{\Phi_X(t)} = \Phi_X(t)$$

et l'on conclut, grâce au résultat indiqué ci-dessus, que $-X$ et X suivent la même loi.

16 Soit $n \in \mathbb{N}$. Commençons par simplifier l'expression de $R_n - R_{n+1}$. En écrivant

$$\{|X| \geq n\} = \{|X| = n\} \cup \{|X| \geq n+1\}$$

l'union étant disjointe, on obtient

$$\mathbb{P}(|X| \geq n) = \mathbb{P}(|X| = n) + \mathbb{P}(|X| \geq n+1)$$

soit

$$R_n - R_{n+1} = \mathbb{P}(|X| = n)$$

Par ailleurs, la parité de la fonction cosinus permet d'affirmer que les variables aléatoires $\cos(tX)$ et $\cos(t|X|)$ sont égales. Elles ont donc même espérance (finie) d'où

$$\Phi_X(t) = \mathbb{E}(\cos(t|X|))$$

D'après le théorème de transfert appliqué à la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(tx)$ et la variable aléatoire $|X|$ (à valeurs dans $\mathbb{N}$), on a donc

$$\Phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \cos(nt) \mathbb{P}(|X| = n)$$

c'est-à-dire

$$\Phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (R_n - R_{n+1}) \cos(nt)$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Grâce au changement d'indice $k = n + 1$, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N (R_n - R_{n+1}) \cos(nt) &= \sum_{n=0}^N R_n \cos(nt) - \sum_{n=0}^N R_{n+1} \cos(nt) \\ &= \sum_{n=0}^N R_n \cos(nt) - \sum_{k=1}^{N+1} R_k \cos((k-1)t) \\ &= R_0 \cos(0) + \sum_{n=1}^N R_n \cos(nt) \\ &\quad - R_{N+1} \cos(Nt) - \sum_{n=1}^N R_n \cos((n-1)t) \\ \sum_{n=0}^N (R_n - R_{n+1}) \cos(nt) &= R_0 - R_{N+1} \cos(Nt) + \sum_{n=1}^N R_n [\cos(nt) - \cos((n-1)t)] \end{aligned}$$

Or $R_0 = \mathbb{P}(|X| \geq 0) = 1$ et, comme $(R_N)_{N \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 d'après la condition $(\mathcal{D}_\alpha)$ et la fonction cosinus est bornée, on a

$$R_{N+1} \cos(Nt) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0$$

La série de terme général $(R_n - R_{n+1}) \cos(nt)$ étant convergente, on en déduit que la série de terme général $R_n [\cos(nt) - \cos((n-1)t)]$ converge également et

$$\Phi_X(t) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} R_n [\cos(nt) - \cos((n-1)t)]$$

La démarche employée pour passer de la première expression encadrée à la seconde est appelée « transformation d'Abel ». C'est l'analogue discret de l'intégration par parties. Notons qu'en manipulant les sommes partielles, nous n'avons pas eu besoin de démontrer, comme le suggère l'énoncé, la convergence de la série de terme général $R_n \cos(nt)$. Nous le ferons cependant à la question 17.

17 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ posons

$$g_n : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ t \longmapsto \left(R_n - \frac{\alpha}{n}\right) e^{i n t} \end{cases}$$

La question revient à démontrer la continuité à droite en 0 de la somme de la série de fonctions $\sum g_n$. Appliquons pour cela le théorème de continuité du cours.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction g_n est continue sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la condition $(\mathcal{D}_\alpha)$ implique que

$$\|g_n\|_\infty \leq \left| R_n - \frac{\alpha}{n} \right| = O_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)$$

On en déduit grâce au théorème de comparaison des séries à termes positifs que la série $\sum g_n$ converge normalement et donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, grâce au théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions continues, l'application

$$g: \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \left(R_n - \frac{\alpha}{n} \right) e^{i n t} \end{cases}$$

est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$. En particulier, en posant $C = g(0) \in \mathbb{R}$ (puisque le terme général de la série associée est réel)

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \left(R_n - \frac{\alpha}{n} \right) e^{i n t} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} C \in \mathbb{R}}$$

Par ailleurs, d'après la question 9, pour $t \in]0; 2\pi[$, la série de terme général $e^{i n t}/n$ converge, donc comme

$$R_n e^{i n t} = \left(R_n - \frac{\alpha}{n} \right) e^{i n t} + \alpha \frac{e^{i n t}}{n}$$

par somme, la série de terme général $R_n e^{i n t}$ converge et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} R_n e^{i n t} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(R_n - \frac{\alpha}{n} \right) e^{i n t} + \alpha \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{i n t}}{n}$$

On en déduit la convergence des séries de termes généraux $R_n \cos(nt)$ et $R_n \sin(nt)$. De plus, avec $t \in]0; 2\pi[$, on peut appliquer la question 13 et obtenir

$$\sum_{n=1}^{+\infty} R_n e^{i n t} = C + o_{t \rightarrow 0^+}(1) - \ln \left(2 \sin \frac{t}{2} \right) + \alpha i \frac{\pi - t}{2}$$

Par continuité des fonctions parties réelle et imaginaire, on peut les appliquer à ce développement limité et en déduire les relations

$$\sum_{n=1}^{+\infty} R_n \cos(nt) = C - \alpha \ln \left(2 \sin \frac{t}{2} \right) + o_{t \rightarrow 0^+}(1)$$

et
$$\sum_{n=1}^{+\infty} R_n \sin(nt) = \alpha \frac{\pi - t}{2} + o_{t \rightarrow 0^+}(1) = \frac{\pi \alpha}{2} + o_{t \rightarrow 0^+}(1)$$

Il reste à démontrer que

$$\ln \left(2 \sin \frac{t}{2} \right) = O_{t \rightarrow 0^+}(\ln t)$$

Remarquons pour cela que, comme $2 \sin(t/2) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t$, on a

$$2 \sin \left(\frac{t}{2} \right) = t(1 + \varepsilon(t))$$

avec ε une fonction définie au voisinage de 0 telle que $\varepsilon(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$. Alors, pour t dans un voisinage de 0^+ tel que $1 + \varepsilon(t) > 0$,

$$\ln \left(2 \sin \frac{t}{2} \right) = \ln(t) + \ln(1 + \varepsilon(t)) = \ln(t) + o_{t \rightarrow 0^+}(1) = O_{t \rightarrow 0^+}(\ln t)$$

Plus généralement, on peut montrer par un calcul similaire que si f et g sont deux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ ayant une limite nulle en $a \in \mathbb{R}$ et vérifiant $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$, alors $\ln(f(x)) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \ln(g(x))$

En conclusion,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} R_n \cos(nt) = \underset{t \rightarrow 0^+}{O}(\ln t) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \sin(nt) = \frac{\pi \alpha}{2} + \underset{t \rightarrow 0^+}{o}(1)$$

18 Transformons à nouveau l'expression de Φ_X obtenue à la question 16.

On rappelle la formule de trigonométrie

$$\forall(p, q) \in \mathbb{R}^2 \quad \cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

En cas d'oubli, on la retrouve facilement en écrivant les cosinus à l'aide de l'exponentielle complexe et en mettant en facteur $e^{i\frac{p+q}{2}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in]0; 2\pi[$, on a

$$\begin{aligned} \cos(nt) - \cos((n-1)t) &= -2 \sin\left(nt - \frac{t}{2}\right) \sin\left(\frac{t}{2}\right) \\ &= -2 \left[\sin(nt) \cos\left(\frac{t}{2}\right) - \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos(nt) \right] \sin\left(\frac{t}{2}\right) \\ &= -\sin(nt) \times 2 \cos\left(\frac{t}{2}\right) \sin\left(\frac{t}{2}\right) + 2 \cos(nt) \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \\ \cos(nt) - \cos((n-1)t) &= -\sin(nt) \sin(t) + 2 \cos(nt) \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \end{aligned}$$

On a obtenu à la question 17 la convergence des séries de termes généraux $R_n \cos(nt)$ et $R_n \sin(nt)$. On peut donc écrire

$$\begin{aligned} \Phi_X(t) &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} R_n [\cos(nt) - \cos((n-1)t)] \\ &= 1 - \sin(t) \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \sin(nt) + 2 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \cos(nt) \end{aligned}$$

Attention, on ne peut écrire

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (u_n + v_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} v_n$$

qu'après avoir vérifié la convergence des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$. En effet, si l'on considère $u = (1)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $v = (-1)_{n \in \mathbb{N}^*}$, la série de terme général $u_n + v_n = 0$ est bien convergente mais ce n'est pas le cas des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ qui divergent grossièrement.

Appliquons à présent la question 17. Comme $\sin t \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t$,

$$\sin(t) \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \sin(nt) = \frac{\pi \alpha}{2} \sin(t) + \underset{t \rightarrow 0^+}{o}(\sin(t)) = \frac{\pi \alpha}{2} t + \underset{t \rightarrow 0^+}{o}(t)$$

et, puisque $t \ln t = o_{t \rightarrow 0^+}(1)$ d'après les croissances comparées,

$$\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \sum_{n=1}^{+\infty} R_n \cos(nt) = O_{t \rightarrow 0^+}\left(\sin^2\left(\frac{t}{2}\right) \ln t\right) = O_{t \rightarrow 0^+}(t^2 \ln t) = o_{t \rightarrow 0^+}(t)$$

En conclusion

$$\Phi_X(t) = 1 - \frac{\pi\alpha}{2}t + o_{t \rightarrow 0^+}(t)$$

L'omission par l'énoncé de la limite considérée dans l'écriture $o(t)$ pouvait induire en erreur et laisser penser que le développement limité serait valable, comme d'habitude, en 0 et non uniquement à droite. On aurait alors conclu directement à la dérivabilité de Φ_X en 0. Pour éviter ce genre de mésaventure, il est préférable d'indiquer la limite considérée dans le développement limité, surtout en cas d'ambiguïté.

Ce développement limité assure que Φ_X est dérivable à droite en 0. En effet

$$\frac{\Phi_X(t) - \Phi_X(0)}{t} = \frac{\Phi_X(t) - 1}{t} = -\frac{\pi\alpha}{2} + o_{t \rightarrow 0^+}(1) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} -\frac{\pi\alpha}{2}$$

Or, on a montré à la question 14 que Φ_X est paire donc, en considérant la limite à gauche en 0, on obtient d'après ce qui précède

$$\frac{\Phi_X(t) - 1}{t} = -\frac{\Phi_X(-t) - 1}{-t} = \frac{\pi\alpha}{2} + o_{t \rightarrow 0^-}(1) \xrightarrow{t \rightarrow 0^-} \frac{\pi\alpha}{2}$$

La fonction Φ_X admet donc $\pi\alpha/2$ pour dérivée à gauche en 0 en $-\pi\alpha/2$ pour dérivée à droite en 0. Comme $\alpha \neq 0$, ces quantités sont distinctes. Ainsi,

La fonction Φ_X n'est pas dérivable en 0.

Plus généralement, pour toute fonction paire f , le même raisonnement permet de montrer que f est dérivable en 0 si et seulement si f est dérivable à droite en 0 et sa dérivée à droite est nulle.

IV. CONVERGENCE SIMPLE DE LA SUITE DES FONCTIONS CARACTÉRISTIQUES DES VARIABLES M_n

19 Comme X et Y sont symétriques et indépendantes, d'après la question 5, on sait que $X + Y$ est symétrique. Le résultat de la question 14 assure alors que Φ_{X+Y} est bien définie.

Soit $t \in \mathbb{R}$. Les variables aléatoires $\cos(tX)$, $\cos(tY)$, $\sin(tX)$ et $\sin(tY)$ sont bornées car les fonctions cosinus et sinus le sont. D'après la question 2, elles sont donc d'espérance finie. Par linéarité de l'espérance, on obtient

$$\begin{aligned}\Phi_{X+Y}(t) &= \mathbb{E}(\cos(t(X+Y))) \\ &= \mathbb{E}(\cos(tX)\cos(tY) - \sin(tX)\sin(tY)) \\ \Phi_{X+Y}(t) &= \mathbb{E}(\cos(tX)\cos(tY)) - \mathbb{E}(\sin(tX)\sin(tY))\end{aligned}$$

Or X et Y sont indépendantes donc $\cos(tX)$ et $\cos(tY)$ sont indépendantes, de même que $\sin(tX)$ et $\sin(tY)$. Alors

$$\Phi_{X+Y}(t) = \mathbb{E}(\cos(tX))\mathbb{E}(\cos(tY)) - \mathbb{E}(\sin(tX))\mathbb{E}(\sin(tY))$$

Comme la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(tx)$ est impaire et X et Y sont symétriques, d'après la question 3, on a $\mathbb{E}(\sin(tX)) = 0 = \mathbb{E}(\sin(tY))$. En conclusion,

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t)\Phi_Y(t)$$

Pour une variable aléatoire X quelconque (pas nécessairement symétrique), comme nous l'avons indiqué dans la remarque suivant la question 15, on définit la fonction caractéristique de X par

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \Phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$$

Si X et Y sont des variables aléatoires indépendantes, on a également, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\Phi_{X+Y}(t) = \mathbb{E}(e^{it(X+Y)}) = \mathbb{E}(e^{itX}e^{itY}) = \mathbb{E}(e^{itX})\mathbb{E}(e^{itY}) = \Phi_X(t)\Phi_Y(t)$$

20 Montrons par récurrence la propriété

$\mathcal{P}(n)$: « M_n est symétrique et, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Phi_{M_n}(t) = (\Phi_{X_1}(t/n))^n$ »

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- $\mathcal{P}(1)$ est vraie car $M_1 = X_1$ est symétrique par hypothèse.
- $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$: Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Séparons l'expression de M_{n+1} en deux et écrivons

$$M_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n X_k + \frac{1}{n+1} X_{n+1} = \frac{n}{n+1} M_n + \frac{1}{n+1} X_{n+1}$$

soit, en posant $Y = (n/(n+1)) M_n$ et $Z = X_{n+1}/(n+1)$,

$$M_{n+1} = Y + Z$$

Par hypothèse de récurrence, M_n est symétrique donc Y l'est aussi. De même, comme X_{n+1} est symétrique, Z l'est aussi. Il est admis en introduction de l'énoncé que X_{n+1} est indépendante de $X_1 + \dots + X_n$. On en déduit que Y et Z sont indépendantes. D'après la question 5, leur somme M_{n+1} est symétrique.

Soit $t \in \mathbb{R}$. Comme Y et Z sont symétriques et indépendantes, on peut appliquer la question 19 pour obtenir

$$\Phi_{M_{n+1}}(t) = \Phi_{Y+Z}(t) = \Phi_Y(t)\Phi_Z(t)$$

Or, par hypothèse de récurrence,

$$\Phi_Y(t) = \mathbb{E}\left(\cos\left(\frac{tn}{n+1} M_n\right)\right) = \Phi_{M_n}\left(\frac{tn}{n+1}\right) = \left(\Phi_{X_1}\left(\frac{t}{n+1}\right)\right)^n$$

De plus, X_{n+1} et X_1 ont la même loi donc, d'après le théorème 1 admis par l'énoncé, $\cos((tX_{n+1})/(n+1))$ et $\cos((tX_1)/(n+1))$ aussi. En particulier, elles ont même espérance donc

$$\Phi_Z(t) = \mathbb{E}\left(\cos\left(\frac{t}{n+1} X_{n+1}\right)\right) = \mathbb{E}\left(\cos\left(\frac{t}{n+1} X_1\right)\right) = \Phi_{X_1}\left(\frac{t}{n+1}\right)$$

Ainsi,
$$\Phi_{M_{n+1}} = \left(\Phi_{X_1}\left(\frac{t}{n+1}\right)\right)^{n+1}$$

- Conclusion :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, M_n est symétrique et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Phi_{M_n}(t) = (\Phi_{X_1}(t/n))^n$.

21 Soit $t \in \mathbb{R}_+$. D'après la question 15 appliquée à la variable aléatoire symétrique X_1 , la fonction Φ_{X_1} est continue en 0. Comme $\Phi_{X_1}(0) = \mathbb{E}(1) = 1$, on en déduit que pour n assez grand, on a $\Phi_{X_1}(t/n) > 0$. On peut donc écrire, grâce à la question 20,

$$\Phi_{M_n}(t) = \exp \left(n \ln \left(\Phi_{X_1} \left(\frac{t}{n} \right) \right) \right)$$

De plus, en appliquant la question 18 à la variable aléatoire symétrique X_1 , on obtient

$$\Phi_{X_1} \left(\frac{t}{n} \right) = 1 - \frac{\pi \alpha t}{2n} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \right)$$

d'où, grâce à l'équivalent $\ln(1-u) \underset{u \rightarrow 0}{\sim} -u$,

$$\begin{aligned} \Phi_{M_n}(t) &= \exp \left(n \ln \left(1 - \frac{\pi \alpha t}{2n} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \right) \right) \right) \\ &= \exp \left(n \times \left(-\frac{\pi \alpha t}{2n} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} \right) \right) \right) \\ &= \exp \left(-\frac{\pi \alpha t}{2} + o_{n \rightarrow +\infty}(1) \right) \\ \Phi_{M_n}(t) &= \exp \left(-\frac{\pi \alpha t}{2} \right) \exp \left(o_{n \rightarrow +\infty}(1) \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp \left(-\frac{\pi \alpha t}{2} \right) \end{aligned}$$

Attention, on ne peut pas appliquer directement l'exponentielle à un équivalent. On a par exemple $x^2 + x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^2$ mais $e^{x^2+x} = e^{x^2} e^x \not\underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} e^{x^2}$.

De plus, comme M_n est symétrique d'après la question 20, la question 14 assure que la fonction Φ_{M_n} est paire. Ainsi, pour $t \in \mathbb{R}_-$, on a $-t \in \mathbb{R}_+$ et

$$\Phi_{M_n}(t) = \Phi_{M_n}(-t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp \left(\frac{\pi \alpha t}{2} \right)$$

Dans tous les cas

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \Phi_{M_n}(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp \left(-\frac{\pi \alpha |t|}{2} \right)$$

22

Lorsque l'on a obtenu la convergence simple d'une suite de fonctions continues et qu'on veut démontrer que la convergence n'est pas uniforme, on peut commencer par étudier la continuité de la limite ponctuelle. En effet, si la fonction limite n'est pas continue, la contraposée du théorème de continuité assure que la convergence n'est pas uniforme. Cette méthode ne fonctionne pas ici puisque la fonction limite est continue. Dans une telle situation, il est parfois possible de trouver une suite de limite infinie dont les images, par la suite de fonctions d'une part et la fonction limite d'autre part, ont des comportements différents, ce qui permet de conclure que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.

Comme X_1 est entière, $\cos(2\pi X_1) = 1$ donc $\Phi_{X_1}(2\pi) = 1$. D'après la question 20, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \Phi_{M_n}(2n\pi) = (\Phi_{X_1}(2\pi))^n = 1$$

Or, en notant $h : t \in \mathbb{R} \mapsto \exp(-\pi \alpha |t|/2)$, on a

$$h(2n\pi) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Ainsi,

$$|h(2n\pi) - \Phi_{M_n}(2n\pi)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

Ceci contredit la définition de la convergence uniforme de $(M_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vers h puisque si, en raisonnant par l'absurde, on avait $\|h - \Phi_{M_n}\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, par passage à la limite dans l'inégalité

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad |h(2n\pi) - \Phi_{M_n}(2n\pi)| \leq \|h - \Phi_{M_n}\|_\infty$$

on aurait $1 \leq 0$. En conclusion,

La convergence de la suite $(\Phi_{M_n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.

Comme l'indique l'énoncé, on a presque fini de démontrer qu'étant donnée une famille de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ entières, symétriques, indépendantes et de même loi vérifiant la condition $(\mathcal{D}_\alpha)$, la suite des moyennes $(M_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ « converge en loi » vers une variable de Cauchy de paramètre $\pi\alpha/2$ (cette notion de convergence n'est pas au programme des classes préparatoires). Comme nous l'avons démontré à la question 3, les X_n n'admettent pas d'espérance ni de variance. Lorsque les X_n sont des variables aléatoires discrètes indépendantes et de même loi, d'espérance nulle et de variance 1, alors on peut prouver un résultat similaire, appelé « théorème central limite » : la suite des $(X_1 + \dots + X_n)/\sqrt{n}$ converge en loi vers une variable suivant la loi normale centrée réduite au sens où pour tout segment $[a; b]$ de $\mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}\left(a \leq \frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{n}} \leq b\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

Pour le démontrer, on constate que

$$\varphi_{X_1}(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o_{t \rightarrow 0}(t^2)$$

d'où, en reprenant le raisonnement de la question 20,

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \varphi_{(X_1 + \dots + X_n)/\sqrt{n}}(t) = \varphi_{X_1}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n$$

et l'on conclut notamment grâce à des résultats de densité d'un ensemble de fonctions très régulières, la classe de Schwartz (nommée en l'honneur du mathématicien français Laurent Schwartz et non de l'allemand Hermann Schwarz), et la bijectivité de la transformée de Fourier sur cet ensemble. Ces propriétés sortent largement du cadre du programme des classes préparatoires. L'équivalence entre la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires et la convergence simple de leurs fonctions caractéristiques est connue sous le nom de théorème de Lévy, du nom de Paul Lévy, également mathématicien français du XX^e siècle.