

PREMIÈRE PARTIE

1.a Commençons par remarquer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n$ et pour toute partie $\Sigma \subseteq \llbracket 1; n \rrbracket$, on a

$$({}^t A)^{(\Sigma)} = {}^t(A^{(\Sigma)})$$

En effet, si $A \in \mathcal{M}_n$ et $\Sigma \subseteq \llbracket 1; n \rrbracket$, la matrice $({}^t A)^{(\Sigma)}$ est la sous-matrice obtenue en supprimant la i -ème ligne et la i -ème colonne de ${}^t A$ pour tout $i \in \Sigma$, ie la transposée de la sous-matrice obtenue en supprimant la i -ème colonne et la i -ème ligne de A pour tout $i \in \Sigma$. On en déduit l'égalité $({}^t A)^{(\Sigma)} = {}^t(A^{(\Sigma)})$.

Soit $M \in \mathcal{M}_n^+$. Montrons que ${}^t M \in \mathcal{M}_n^+$. Fixons donc $\Sigma \subseteq \llbracket 1; n \rrbracket$ et montrons que le déterminant de $({}^t M)^{(\Sigma)}$ est strictement positif. On vient de voir que $({}^t M)^{(\Sigma)} = {}^t(M^{(\Sigma)})$. Comme le déterminant d'une matrice est égal au déterminant de la transposée et que M est dans $\mathcal{M}_n^+$, on obtient $\det({}^t M)^{(\Sigma)} > 0$. Ceci étant vrai pour tout sous-ensemble Σ de $\llbracket 1; n \rrbracket$, on conclut que

$${}^t M \in \mathcal{M}_n^+$$

L'énoncé n'est pas parfaitement clair sur la définition des matrices de $\mathcal{M}_n^+$. En effet, s'il précise que dans le cas $\Sigma = \emptyset$, on pose $M^{(\emptyset)} = M$, que se passe-t-il si $\Sigma = \llbracket 1; n \rrbracket$? La matrice $M^{(\llbracket 1; n \rrbracket)}$ est la matrice sans ligne ni colonne. Que vaut son déterminant? Nous passerons donc sur ce détail dans tout ce corrigé.

1.b Soient $M \in \mathcal{M}_n$, $D \in \mathcal{D}_n$ et $\Sigma \subseteq \llbracket 1; n \rrbracket$. Les matrices $M^{(\Sigma)}$, $D^{(\Sigma)}$ et $(MD)^{(\Sigma)}$ sont des matrices carrées de taille $n - \text{Card } \Sigma$.

Notons $(C_1, \dots, C_n)$ les colonnes de M et $(\tilde{C}_1, \dots, \tilde{C}_n)$ les colonnes obtenues en supprimant les coefficients d'indice i de toutes les colonnes de M pour tout $i \in \Sigma$. Les colonnes de $M^{(\Sigma)}$ sont alors les $\tilde{C}_k$ pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et $k \notin \Sigma$.

Notons maintenant $(d_1, \dots, d_n)$ les coefficients diagonaux de D . La matrice $D^{(\Sigma)}$ est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les d_k pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et $k \notin \Sigma$. Calculons le produit MD avec ces notations :

$$MD = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 C_1 & \cdots & d_n C_n \end{pmatrix}$$

En effectuant le produit $M^{(\Sigma)}D^{(\Sigma)}$ de la même manière, on constate que les colonnes de $M^{(\Sigma)}D^{(\Sigma)}$ sont les $d_k \tilde{C}_k$ pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et $k \notin \Sigma$. Ce sont les mêmes colonnes que si l'on supprime les i -èmes lignes et i -èmes colonnes de MD pour tout $i \in \Sigma$. Conclusion :

$$M^{(\Sigma)}D^{(\Sigma)} = (MD)^{(\Sigma)}$$

Il est important de savoir interpréter le produit de deux matrices carrées en fonction des lignes et colonnes de celles-ci. En particulier, étant donné deux matrices carrées A et B de taille n , si on note $(C_1, \dots, C_n)$ les colonnes de B , alors le produit AB vaut

$$AB = A \times \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AC_1 & \cdots & AC_n \end{pmatrix}$$

De plus, si on note $(E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on obtient pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$

$$BE_i = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_n \end{pmatrix} \times E_i = C_i$$

Ce sont ces deux résultats qui permettent d'obtenir l'égalité précédente.

1.c Soient $M \in \mathcal{M}_n^+$ et $D \in \mathcal{D}_n$. Fixons $\Sigma \subseteq \llbracket 1; n \rrbracket$ et montrons que le déterminant de $(DMD)^{(\Sigma)}$ est strictement positif. En appliquant le résultat de la question 1.b aux matrices $DM \in \mathcal{M}_n$ et $D \in \mathcal{D}_n$, on obtient l'égalité

$$((DM)D)^{(\Sigma)} = (DM)^{(\Sigma)}D^{(\Sigma)}$$

Montrons maintenant que $(DM)^{(\Sigma)} = D^{(\Sigma)}M^{(\Sigma)}$ en utilisant la transposée pour se ramener au résultat de la question 1.b. On a établi à la question 1.a l'identité ${}^t(A^{(\Sigma)}) = ({}^tA)^{(\Sigma)}$ pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n$. On en déduit

$${}^t((DM)^{(\Sigma)}) = ({}^t(DM))^{(\Sigma)} = ({}^tM \ {}^tD)^{(\Sigma)} = ({}^tMD)^{(\Sigma)}$$

Le résultat de la question 1.b donne alors

$${}^t((DM)^{(\Sigma)}) = ({}^tM)^{(\Sigma)}D^{(\Sigma)}$$

soit

$$(DM)^{(\Sigma)} = ({}^tD^{(\Sigma)})^t({}^tM)^{(\Sigma)}$$

Comme D est diagonale, $D^{(\Sigma)}$ l'est aussi et ${}^t(D^{(\Sigma)}) = D^{(\Sigma)}$. De plus, d'après le résultat de la question 1.a, ${}^t({}^tM)^{(\Sigma)} = M^{(\Sigma)}$. Il vient

$$(DM)^{(\Sigma)} = D^{(\Sigma)}M^{(\Sigma)}$$

et finalement

$$(DMD)^{(\Sigma)} = D^{(\Sigma)}M^{(\Sigma)}D^{(\Sigma)}$$

Comme le déterminant d'un produit de matrices carrées est égal au produit de leurs déterminants,

$$\begin{aligned} \det((DMD)^{(\Sigma)}) &= \det(D^{(\Sigma)}M^{(\Sigma)}D^{(\Sigma)}) \\ &= \det D^{(\Sigma)} \det M^{(\Sigma)} \det D^{(\Sigma)} \\ \det((DMD)^{(\Sigma)}) &= \det M^{(\Sigma)} (\det D^{(\Sigma)})^2 \end{aligned}$$

Comme $D^{(\Sigma)}$ est une matrice diagonale à coefficients diagonaux dans l'ensemble $\{-1; 1\}$, son déterminant est non nul. De plus, comme $M \in \mathcal{M}_n^+$, le déterminant de $M^{(\Sigma)}$ est strictement positif. On en déduit l'inégalité

$$\det((DMD)^{(\Sigma)}) > 0$$

Conclusion :

$$\boxed{DMD \in \mathcal{M}_n^+}$$

Pour montrer que $\det((DMD)^{(\Sigma)}) > 0$, on peut aussi dire que le déterminant de $D^{(\Sigma)}$ vaut 1 ou -1 , ce qui entraîne

$$\det((DMD)^{(\Sigma)}) = \det M^{(\Sigma)} (\det D^{(\Sigma)})^2 = \det M^{(\Sigma)} > 0$$

2 Soit $X = {}^t(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Posons pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$

$$d_i = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \geq 0 \\ -1 & \text{si } x_i < 0 \end{cases}$$

de sorte que, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, le produit $d_i x_i$ est positif ou nul. Notons alors D la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les d_i . Alors D est bien dans $\mathcal{D}_n$ et

$$DX = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 x_1 \\ \vdots \\ d_n x_n \end{pmatrix}$$

soit, d'après ce qui précède,

$$\boxed{DX \succcurlyeq 0}$$

3.a Supposons $X \succ 0$. Traduisons les hypothèses matricielles en termes d'inégalités sur des nombres réels.

- $M \in \mathcal{M}_n^+$ donne

$$\det M^{(\emptyset)} = ad - bc > 0, \quad \det M^{\{\{2\}\}} = a > 0 \quad \text{et} \quad \det M^{\{\{1\}\}} = d > 0$$

- $X \succ 0$ donne $x_1 > 0$ et $x_2 > 0$

- $0 \succcurlyeq MX$ donne, puisque $MX = \begin{pmatrix} ax_1 + bx_2 \\ cx_1 + dx_2 \end{pmatrix}$,

$$ax_1 + bx_2 \leq 0 \quad \text{et} \quad cx_1 + dx_2 \leq 0$$

On peut donc écrire

$$ax_1 + bx_2 \leq 0$$

$$bx_2 \leq -ax_1$$

$$b \leq -ax_1/x_2 \quad \text{car } x_2 > 0$$

$$\boxed{b \leq 0} \quad \text{car } a > 0, x_1 > 0 \text{ et } x_2 > 0.$$

De même,

$$cx_1 + dx_2 \leq 0$$

$$cx_1 \leq -dx_2$$

$$c \leq -dx_2/x_1 \quad \text{car } x_1 > 0$$

d'où

$$\boxed{c \leq 0} \quad \text{car } d > 0, x_2 > 0 \text{ et } x_1 > 0.$$

3.b Supposons $X \succcurlyeq 0$ et $0 \succcurlyeq MX$ et notons $X = {}^t(x_1, x_2)$. Puisque les coordonnées x_1 et x_2 sont positives ou nulles, elles vérifient une et une seule des quatre propriétés suivantes :

- $x_1 > 0$ et $x_2 > 0$;
- $x_1 = 0$ et $x_2 > 0$;
- $x_1 > 0$ et $x_2 = 0$;
- $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$.

Montrons que les 3 premières sont exclues.

- Si $x_1 > 0$ et $x_2 > 0$, alors les calculs du 3.a sont valides et donnent

$$b \leq \frac{-ax_1}{x_2} \quad \text{et} \quad c \leq \frac{-dx_2}{x_1}$$

En multipliant ces deux inégalités entres nombres réels négatifs, on trouve

$$bc \geq ad \frac{x_1}{x_2} \frac{x_2}{x_1} = ad$$

$$\text{soit} \quad 0 \geq ad - bc$$

$$\text{c'est-à-dire} \quad 0 \geq \det M$$

ce qui est exclu car $M \in \mathcal{M}_n^+$.

- Si $x_1 = 0$ et $x_2 > 0$, alors $cx_1 + dx_2 \leq 0$

$$\text{devient} \quad dx_2 \leq 0$$

$$\text{et même} \quad d \leq 0$$

$$\text{soit} \quad \det M^{(\{1\})} \leq 0$$

ce qui est exclu car $M \in \mathcal{M}_n^+$.

- Si $x_1 > 0$ et $x_2 = 0$, $ax_1 + bx_2 \leq 0$

$$ax_1 \leq 0$$

$$a \leq 0$$

$$\text{soit} \quad \det M^{(\{2\})} \leq 0$$

ce qui est exclu car $M \in \mathcal{M}_n^+$.

Il ne reste finalement que la dernière possibilité, $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$, qui revient à

$$\boxed{X = 0}$$

3.c Cherchons X sous la forme $X = {}^t(1, y)$ avec $y \in \mathbb{R}$. On voudrait $X \succ 0$ et $MX \succ 0$, soit

$$y > 0, \quad a + by > 0 \quad \text{et} \quad c + dy > 0$$

Si X est solution, alors λX l'est aussi pour tout $\lambda > 0$. En notant x la première coordonnée de X , le vecteur $(1/x)X$ est bien solution ($x > 0$) et du type ${}^t(1, y)$. Se restreindre à la recherche de solutions sous cette forme est donc raisonnable, en plus d'être bien pratique.

Distinguons trois cas.

- Cas $b > 0$. Les conditions deviennent

$$\begin{cases} y > 0 \\ y > -\frac{a}{b} \\ y > -\frac{c}{d} \end{cases} \quad \text{car } d = \det M^{(\{1\})} > 0$$

Il suffit donc de prendre $y = 1 + \max(0, -a/b, -c/d)$.

- Cas $b = 0$. Les conditions deviennent

$$\begin{cases} y > 0 \\ a > 0 \\ y > -\frac{c}{d} \end{cases} \quad \text{qui est toujours vrai}$$

Il suffit donc de prendre $y = 1 + \max(0, -c/d)$.

- Cas $b < 0$. Les conditions deviennent

$$\begin{cases} y > 0 \\ y < -\frac{a}{b} \\ y > -\frac{c}{d} \end{cases}$$

Or, comme $M \in \mathcal{M}_n^+$, les trois inégalités suivantes sont vraies

$$ad - bc > 0, \quad a > 0 \quad \text{et} \quad d > 0$$

ce qui donne

$$ad > bc$$

puis

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$$

car $b < 0$ et $d > 0$

soit

$$-\frac{a}{b} > -\frac{c}{d}$$

En prenant la moyenne de ces deux derniers nombres réel,

$$y = \frac{-a/b + (-c/d)}{2}$$

on obtient $y < -a/b$ et $y > -c/d$ mais pas nécessairement $y > 0$. Par contre, comme $-a/b > 0$, si $-c/d \geq 0$, alors

$$y = \frac{-a/b + (-c/d)}{2}$$

convient (il vérifie bien $y > 0$) et si $-c/d < 0$, alors

$$y = \frac{-a/b}{2}$$

convient (puisque $-a/b > y > 0 > -c/d$).

Dans tous les cas,

Il existe $X \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $X \succ 0$ et $MX \succ 0$.

DEUXIÈME PARTIE

4 Soit $z \in \mathcal{O}$. Si $z = 0$, la série considérée est la série nulle, qui est convergente. Sinon, le terme général de la série $\sum \frac{1}{kn+1} z^{kn+1}$ ne s'annule jamais : on peut donc appliquer la règle de d'Alembert à la série $\sum \left| \frac{1}{kn+1} z^{kn+1} \right|$.

$$\frac{\frac{1}{k(n+1)+1} z^{k(n+1)+1}}{\frac{1}{kn+1} z^{kn+1}} = |z^k| \frac{kn+1}{k(n+1)+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |z^k|$$

Comme $z \in \mathcal{O}$, on a $|z^k| < 1$ et on conclut, grâce à la règle de d'Alembert, que la série $\sum \frac{1}{kn+1} z^{kn+1}$ est absolument convergente, donc convergente. Ainsi,

Pour tout $z \in \mathcal{O}$ la série $\sum \frac{1}{kn+1} z^{kn+1}$ converge.

Il ne faut surtout pas oublier que la règle de d'Alembert ne s'applique qu'aux séries dont le terme général est positif et ne s'annule jamais, ou à tout le moins est non nul à partir d'un certain rang.

5.a La fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si ses deux fonctions coordonnées u et v le sont. Fixons donc $X = (x_1, x_2) \in \mathcal{O}$ et commençons par montrer que u et v admettent une dérivée partielle en X par rapport à leur première variable. Puisque $\mathcal{O}$ est un ouvert, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout élément $h \in [-\delta; \delta]$, $(x_1 + h, x_2)$ appartienne à $\mathcal{O}$. Montrons que la fonction

$$h \in [-\delta; \delta] \mapsto f(x_1 + h + ix_2) = u(x_1 + h, x_2) + iv(x_1 + h, x_2)$$

est dérivable en utilisant le théorème de dérivation des séries de fonctions. Notons pour tout $n \geq 0$

$$f_n : h \mapsto \frac{1}{kn+1} (x_1 + h + ix_2)^{kn+1}$$

Ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\delta; \delta]$ et la série $\sum f_n$ y converge simplement, sa somme étant la fonction $h \mapsto f(x_1 + h + ix_2)$. Les fonctions dérivées sont

$$f'_n : h \mapsto (x_1 + h + ix_2)^{kn}$$

Or, la fonction $h \mapsto |x_1 + h + ix_2|$ étant continue sur le segment $[-\delta; \delta]$, elle est bornée et atteint ses bornes. On en déduit qu'il existe $h_m \in [-\delta; \delta]$ vérifiant

$$|x_1 + h + ix_2| \leq |x_1 + h_m + ix_2|$$

pour tout $h \in [-\delta; \delta]$. Notons $r = |x_1 + h_m + ix_2|$. D'après la définition de δ , on a $(x_1 + h_m, x_2) \in \mathcal{O}$ donc $0 \leq r < 1$. On en conclut que

$$\forall n \geq 0 \quad \forall h \in [-\delta; \delta] \quad \|f'_n\|_\infty \leq r^{kn}$$

Puisque $r^k \in [0; 1[$, la série géométrique $\sum r^{kn}$ est convergente et, d'après les théorèmes de comparaison pour les séries positives, la série $\sum \|f'_n\|_\infty$ converge, ce qui signifie que la série de fonctions $\sum f'_n$ converge normalement sur $[-\delta; \delta]$. On déduit alors du théorème de dérivation des séries de fonctions que la fonction

$$h \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} f_n(h) = f(x_1 + h + ix_2)$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-\delta; \delta]$ et que sa dérivée est

$$h \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (x_1 + h + ix_2)^{kn} = \frac{1}{1 - (x_1 + h + ix_2)^k}$$

Or, pour tout $h \in [-\delta; \delta]$, on a

$$f(x_1 + h + ix_2) = u(x_1 + h, x_2) + iv(x_1 + h, x_2)$$

On déduit des théorèmes généraux sur la dérivation des fonctions d'une variable réelle et à valeurs complexes que les fonctions

$$h \mapsto u(x_1 + h, x_2) \quad \text{et} \quad h \mapsto v(x_1 + h, x_2)$$

sont de classes $\mathcal{C}^1$ sur $[-\delta; \delta]$, de dérivées respectives

$$h \mapsto \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 - (x_1 + h + ix_2)^k} \right) \quad \text{et} \quad h \mapsto \operatorname{Im} \left(\frac{1}{1 - (x_1 + h + ix_2)^k} \right)$$

En particulier, les fonctions u et v admettent

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 - (x_1 + ix_2)^k} \right) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} \left(\frac{1}{1 - (x_1 + ix_2)^k} \right)$$

comme dérivées partielles en (x_1, x_2) par rapport à leur première variable.

En considérant un $\gamma > 0$ tel que, pour tout $t \in [-\gamma; \gamma]$, $(x_1, x_2 + t)$ appartienne à $\mathcal{O}$, et les fonctions $g_n : h \mapsto \frac{1}{kn+1} (x_1 + i(x_2 + h))^{kn+1}$ définies sur $[-\gamma; \gamma]$, on montre de la même manière que les fonctions u et v admettent

$$\operatorname{Re} \left(\frac{i}{1 - (x_1 + ix_2)^k} \right) \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} \left(\frac{i}{1 - (x_1 + ix_2)^k} \right)$$

comme dérivées partielles respectives en (x_1, x_2) par rapport à leur seconde variable.

Par continuité des fonctions Re et Im , ces quatre dérivées partielles sont continues sur $\mathcal{O}$ et les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{O}$, c'est-à-dire que

La fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{O}$ avec $\frac{\partial F}{\partial x_1}(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1}(X) \\ \frac{\partial v}{\partial x_1}(X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 - \zeta} \right) \\ \operatorname{Im} \left(\frac{1}{1 - \zeta} \right) \end{pmatrix}$ $\frac{\partial F}{\partial x_2}(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_2}(X) \\ \frac{\partial v}{\partial x_2}(X) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\operatorname{Im} \left(\frac{1}{1 - \zeta} \right) \\ \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 - \zeta} \right) \end{pmatrix}$

5.b Soit $X \in \mathcal{O}$. D'après la question précédente, la matrice jacobienne de F en X vaut

$$J_F(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1}(z) & \frac{\partial v}{\partial x_1}(z) \\ \frac{\partial u}{\partial x_2}(z) & \frac{\partial v}{\partial x_2}(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1-\zeta} \right) & -\operatorname{Im} \left(\frac{1}{1-\zeta} \right) \\ \operatorname{Im} \left(\frac{1}{1-\zeta} \right) & \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1-\zeta} \right) \end{pmatrix}$$

en ayant posé $X = {}^t(x_1, x_2)$ et $\zeta = x_1 + ix_2$. On a alors

$$\det J_F(X) = \left(\operatorname{Re} \left(\frac{1}{1-\zeta} \right) \right)^2 + \left(\operatorname{Im} \left(\frac{1}{1-\zeta} \right) \right)^2 = \left| \frac{1}{1-\zeta} \right|^2 > 0$$

et

$$\det J_F(X)^{(\{1\})} = \det J_F(X)^{(\{2\})} = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1-\zeta} \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{1-\bar{\zeta}}{(1-\zeta)(1-\bar{\zeta})} \right) = \frac{1 - \operatorname{Re}(\zeta)}{|1-\zeta|^2}$$

Or $\zeta \in \mathcal{O}$, donc $\operatorname{Re}(\zeta) \leq |\zeta| < 1$ et on obtient bien

$$\det J_F(X)^{(\{1\})} = \det J_F(X)^{(\{2\})} > 0$$

Conclusion :

$$J_F(X) \in \mathcal{M}_2^+$$

On a testé la condition $\det J_F(X)^{(\Sigma)} > 0$ pour Σ valant $\emptyset$, $\{1\}$ et $\{2\}$. Il manque donc le cas $\Sigma = \{1, 2\}$. Mais la matrice $J_F(X)^{\{1,2\}}$ est une matrice de taille 0×0 . On est bien obligé d'admettre qu'une telle matrice a un déterminant strictement positif.

TROISIÈME PARTIE

6.a Puisque $P \in \mathcal{M}_n^+$, son déterminant est non nul et P est une matrice inversible. Ainsi, le système linéaire

$$P \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

est de Cramer. On peut donc utiliser les formules de Cramer, qui donnent ici

$$u_1 = \frac{\det P_1}{\det P}$$

où la matrice P_1 est la matrice P dans laquelle on a remplacé la première colonne par la colonne ${}^t(1, 0, \dots, 0)$. La matrice P_1 est donc de la forme

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & P^{(\{1\})} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

En développant son déterminant par rapport à sa première colonne, on obtient ainsi $\det P_1 = \det P^{(\{1\})}$. Comme $P \in \mathcal{M}_n^+$, les déterminants $\det P^{(\{1\})}$ et $\det P$ sont strictement positifs. Finalement,

$$u_1 = \frac{\det P^{(\{1\})}}{\det P} > 0$$

6.b Comme C est la première colonne de la matrice P^{-1} , la première colonne du produit PP^{-1} est égale au produit PC mais également à ${}^t(1, 0, \dots, 0)$. Le vecteur C est donc solution du système de Cramer de la question 6.a. Par unicité des solutions des systèmes de Cramer, on obtient

$$c_1 = u_1 > 0$$

Ainsi, l'ensemble $E = \{x_i/c_i \mid c_i > 0, i \in \llbracket 1; n \rrbracket\}$ est non vide. De plus, comme $X \succcurlyeq 0$, l'ensemble E est inclus dans $\mathbb{R}^+$ et est donc minoré par 0. Finalement, puisque E est une partie non vide minorée de $\mathbb{R}$, il admet une borne inférieure et

$$m = \inf \left\{ \frac{x_i}{c_i} \mid c_i > 0, i \in \llbracket 1; n \rrbracket \right\} \text{ existe.}$$

Puisque E est minoré par 0,

$$m \geq 0$$

On aurait aussi pu dire que E est une partie non vide et finie de $\mathbb{R}$ et donc que sa borne inférieure existe et est même atteinte, ce qui justifie l'existence de l'entier j .

6.c Montrons que $Y \succcurlyeq 0$. Fixons donc $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et montrons que le i -ème coefficient de Y , à savoir $x_i - mc_i$, est positif. Distinguons deux cas :

- Si $c_i > 0$, alors par définition de m on a

$$m \leq \frac{x_i}{c_i} \quad \text{d'où} \quad mc_i \leq x_i \quad \text{et} \quad x_i - mc_i \geq 0$$

- Si $c_i \leq 0$, alors d'après la question 6.b, on a $m \geq 0$ donc $mc_i \leq 0$ et finalement

$$x_i - mc_i \geq x_i \geq 0 \quad \text{puisque} \quad X \succcurlyeq 0$$

Conclusion :

$$Y \succcurlyeq 0$$

Montrons maintenant que $0 \succcurlyeq PY$. On a déjà remarqué à la question 6.b que $PC = {}^t(1, 0, \dots, 0)$. Un rapide calcul donne donc

$$PY = PX - mPC = PX - m \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = PX - \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Or, par hypothèse $0 \succcurlyeq PX$ et d'après la question 6.b, $m \geq 0$. Les coefficients de PY sont donc tous négatifs ou nuls et

$$0 \succcurlyeq PY$$

6.d Appliquons la propriété $\mathcal{Q}_{n-1}$.

Cette troisième partie est une vaste récurrence : il faut bien chercher à appliquer l'hypothèse de récurrence à un moment ou à un autre.

Vérifions tout d'abord que $\tilde{P} \in \mathcal{M}_{n-1}^+$. Notons pour cela

$$\phi: \begin{cases} \llbracket 1; n-1 \rrbracket \longrightarrow \llbracket 1; n \rrbracket \\ i \longmapsto \begin{cases} i & \text{si } i < j \\ i+1 & \text{si } i \geq j \end{cases} \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $\Sigma \subseteq \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, on a $\tilde{P}^{(\Sigma)} = (P^{(\{j\})})^{(\Sigma)} = P^{(\phi(\Sigma))}$ d'où $\det \tilde{P}^{(\Sigma)} > 0$ puisque $P \in \mathcal{M}_n^+$. On en déduit que $\tilde{P} \in \mathcal{M}_{n-1}^+$. L'hypothèse $\tilde{Y} \succcurlyeq 0$ découle du premier résultat de la question 6.c : $Y \succcurlyeq 0$. Montrons maintenant que $0 \succcurlyeq \tilde{P}\tilde{Y}$. Notons $Y = {}^t(y_1, \dots, y_n)$, $P = (p_{i,j})_{0 \leq i, j \leq n}$ et $\tilde{P}\tilde{Y} = {}^t(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$. On veut montrer que les α_i sont négatifs ou nuls. On a montré à la question 6.d que $0 \succcurlyeq PY$, ce qui signifie

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \sum_{k=1}^n p_{i,k} y_k \leq 0 \quad (1)$$

$$\text{Or,} \quad \forall i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket \quad \alpha_i = \begin{cases} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n p_{i,k} y_k & \text{si } i < j \\ \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n p_{i+1,k} y_k & \text{si } i \geq j \end{cases}$$

Que valent les $p_{i,j}y_j$? Par définition $y_j = x_j - mc_j = x_j - (x_j/c_j)c_j = 0$. Par suite $p_{i,j}y_j = 0$ et on peut réécrire

$$\forall i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket \quad \alpha_i = \begin{cases} \sum_{k=1}^n p_{i,k} y_k & \text{si } i < j \\ \sum_{k=1}^n p_{i+1,k} y_k & \text{si } i \geq j \end{cases}$$

ce qui montre, en utilisant les relations (??), que les α_i sont tous négatifs ou nuls. On en déduit $0 \succcurlyeq \tilde{P}\tilde{Y}$.

Attention, le vecteur $\tilde{P}\tilde{Y}$ n'est pas a priori le vecteur PY auquel on a supprimé le j -ième coefficient. Cela ne marche que parce que $y_j = 0$.

On peut ainsi appliquer la propriété $\mathcal{Q}_{n-1}$ à $\tilde{P}$ et $\tilde{Y}$ et conclure que

$$\tilde{Y} = 0$$

Comme on a également montré que $y_j = 0$, il vient immédiatement

$$Y = 0$$

6.e On vient de montrer que $Y = 0$. Or $Y = X - mC$, d'où l'on tire $X = mC$ puis $PX = PmC = mPC = {}^t(m, 0, \dots, 0)$. On a également vu que $m \geq 0$. Conclusion :

$$PX \succcurlyeq 0$$

6.f Le vecteur PX vérifie $PX \succ 0$ (on vient de le montrer) et $0 \succ PX$ (par hypothèse). On en déduit que $PX = 0$ puisque ses coefficients sont positifs et négatifs donc nuls.

Or, on a montré à la question 6.e que $PX = {}^t(m, 0, \dots, 0)$. On a donc $m = 0$ et par suite $Y = X - mC = X$. Le résultat de la question 6.d permet alors de conclure que $X = Y = 0$.

On a donc montré que, pour tout $n \geq 2$, si la propriété $\mathcal{Q}_{n-1}$ est vraie, alors la propriété $\mathcal{Q}_n$ est vraie.

Établissons la propriété $\mathcal{Q}_1$. Soit $P \in \mathcal{M}_1^+$. La matrice P est de taille 1×1 , de déterminant strictement positif : c'est un réel strictement positif. Si $X \in \mathbb{R}$ vérifie $X \succ 0$, soit $X \geq 0$, et $0 \succ PX$, soit $0 \geq PX$, il vérifie également $X \geq 0 \geq X$ et donc $X = 0$. On en déduit que $\mathcal{Q}_1$ est vraie.

Finalement, on a montré par récurrence que

Pour tout $n \geq 1$, si $P \in \mathcal{M}_n^+$ et $X \in \mathbb{R}^n$ vérifient $X \succ 0$ et $0 \succ PX$, alors $X = 0$.

Il ne faut pas se contenter de montrer que $X = 0$. Il faut aussi, et surtout, conclure la récurrence.

QUATRIÈME PARTIE

7 Montrons $(\mathcal{P}_1)$. Soit $M \in O(1)$. La matrice M vaut (1) ou (-1) . Dans les deux cas, $M \in \mathcal{D}_1$. En prenant $X = (1)$ et $D = M$, on obtient bien $X \succ 0$, $D \in \mathcal{D}_1$ et $MX = DX$. Ainsi,

La propriété $(\mathcal{P}_1)$ est vraie.

Montrons maintenant $(\mathcal{P}_2)$. Fixons donc $M \in O(2)$. La matrice M est soit la matrice d'une rotation, soit la matrice d'une symétrie axiale et on sait qu'il existe un angle $\theta \in [0; 2\pi[$ tel que

$$M = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad M = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

le premier cas correspondant à une rotation, le deuxième à une symétrie axiale. Fixons un tel angle θ . Si $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, M est dans $\mathcal{D}_2$ et il suffit de prendre $D = M$ et $X = {}^t(1, 1)$. Supposons donc $\theta \neq 0$ et $\theta \neq \pi$.

- Si M est la matrice d'une rotation, cherchons un X sous la forme $\begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ avec $\alpha \in]0; \pi/2[$ de telle sorte que $X \succ 0$. On remarque qu'il existe en tout et pour tout quatre matrices dans $\mathcal{D}_2$: l'identité, la matrice D_x de la symétrie axiale s_x par rapport à l'axe Ox , la matrice D_y de la symétrie axiale s_y par rapport à l'axe Oy et enfin la matrice $-I_2$ qui est la matrice de la symétrie centrale par rapport à O . On cherche donc un X tel que MX soit égal à $s_x(X)$ ou à $s_y(X)$, c'est-à-dire tel que l'angle entre X et $s_x(X)$ ou l'angle entre X

8 Soit $D \in \mathcal{D}_n$ vérifiant ${}^tX_1 DX_2 = {}^tX_1 X_2$. En notant $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ les éléments diagonaux de D , $X_1 = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ et $X_2 = {}^t(y_1, \dots, y_n)$. On peut écrire

$${}^tX_1 DX_2 = \sum_{i=1}^n x_i \varepsilon_i y_i \quad \text{et} \quad {}^tX_1 X_2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

soit
$$\sum_{i=1}^n (1 - \varepsilon_i) x_i y_i = 0 \quad \text{en faisant la différence.}$$

Or les x_i et les y_i sont positifs et les ε_i valent 1 ou -1 ; les termes $(1 - \varepsilon_i) x_i y_i$ sont donc tous positifs ou nuls. Comme leur somme est nulle, ils sont tous nuls

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad (1 - \varepsilon_i) x_i y_i = 0$$

Enfin, puisque les x_i et les y_i sont non nuls, les ε_i valent tous 1, c'est-à-dire

$$\boxed{D = I_n}$$

Soient (D_1, X_1) et (D_2, X_2) deux solutions pour $M \in O(n)$. Calculons le produit ${}^t(MX_1)MX_2$ de deux façons différentes :

$$\begin{aligned} {}^t(MX_1)MX_2 &= {}^tX_1 {}^tM MX_2 \\ &= {}^tX_1 I_n X_2 = {}^tX_1 X_2 \quad \text{car } M \in O(n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{et} \quad {}^t(MX_1)MX_2 &= {}^t(D_1 X_1) D_2 X_2 \\ &= {}^tX_1 ({}^tD_1 D_2) X_2 \end{aligned}$$

$$\text{d'où} \quad {}^tX_1 X_2 = {}^tX_1 (D_1 D_2) X_2 \quad \text{car } D_1 \text{ est diagonale}$$

Du fait que D_1 et D_2 sont des matrices diagonales à coefficients diagonaux dans $\{-1, 1\}$, on sait que $(D_1 D_2)$ est aussi une telle matrice, ie $(D_1 D_2) \in \mathcal{D}_n$. D'après ce que l'on vient de montrer, on conclut que $D_1 D_2 = I_n$. En notant $\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_n$ les éléments diagonaux de D_1 , et $\varepsilon''_1, \dots, \varepsilon''_n$ les éléments diagonaux de D_2 , on trouve pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\varepsilon'_i \varepsilon''_i = 1$ soit $\varepsilon'_i = \varepsilon''_i$ puisque ε'_i et ε''_i valent 1 ou -1 . On peut en conclure que

$$\boxed{D_1 = D_2}$$

9.a On sait que M est orthogonale si et seulement si ${}^tM M = I_n$. Cette condition s'écrit également

$${}^tM M = \begin{pmatrix} {}^tW & V \\ {}^tU & \rho \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} W & U \\ {}^tV & \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tW W + V {}^tV & {}^tW U + V \rho \\ {}^tU W + \rho {}^tV & {}^tU U + \rho^2 \end{pmatrix} = I_n$$

$$\text{soit} \quad \begin{cases} {}^tW W + V {}^tV = I_{n-1} \\ {}^tW U + V \rho = 0 \\ {}^tU W + \rho {}^tV = 0 \\ {}^tU U + \rho^2 = 1 \end{cases}$$

Les deuxième et troisième égalités étant la transposée l'une de l'autre, on obtient

$$\boxed{\begin{array}{l} M \text{ est orthogonale si et seulement si } \left\{ \begin{array}{l} {}^tW W + V {}^tV = I_{n-1} \\ {}^tW U + V \rho = 0 \\ {}^tU U + \rho^2 = 1 \end{array} \right. \end{array}}$$

Comme ${}^t\mathbf{U}\mathbf{U}$ est une somme de carrés, on a ${}^t\mathbf{U}\mathbf{U} \geq 0$ et

$$1 = {}^t\mathbf{U}\mathbf{U} + \rho^2 \geq \rho^2$$

d'où

$$|\rho| \leq 1$$

9.b Supposons $|\rho| = 1$. L'équation ${}^t\mathbf{U}\mathbf{U} + \rho^2 = 1$ devient ${}^t\mathbf{U}\mathbf{U} = 0$. On en déduit $\mathbf{U} = 0$ (le carré de sa norme euclidienne canonique étant nul). De ${}^t\mathbf{U}\mathbf{W} + \rho^t\mathbf{V} = 0$, on tire alors $\mathbf{V} = 0$ et de ${}^t\mathbf{W}\mathbf{W} + \mathbf{V}^t\mathbf{V} = \mathbf{I}_{n-1}$ on conclut que ${}^t\mathbf{W}\mathbf{W} = \mathbf{I}_{n-1}$:

W est orthogonale.

Puisque $\mathbf{W} \in \mathcal{O}(n-1)$, d'après l'hypothèse de récurrence ($\mathcal{P}_{n-1}$), $\mathbf{W}$ admet une solution $(\mathbf{D}', \mathbf{X}')$. Notons $\mathbf{X} = {}^t({}^t\mathbf{X}', 1)$. Comme $\mathbf{U}$ et $\mathbf{V}$ sont nuls d'après ce qui précède,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\mathbf{X} &= \begin{pmatrix} \mathbf{W} & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X}' \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{W}\mathbf{X}' \\ \rho \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{D}'\mathbf{X}' \\ \rho \end{pmatrix} \text{ car } (\mathbf{D}', \mathbf{X}') \text{ est une solution pour } \mathbf{W} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{D}' & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X}' \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

soit

$$\mathbf{M}\mathbf{X} = \mathbf{D}\mathbf{X} \quad \text{en notant } \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}' & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}$$

Comme $\rho = \pm 1$ et $\mathbf{D}' \in \mathcal{D}_{n-1}$, la matrice $\mathbf{D}$ est dans $\mathcal{D}_n$. De plus, puisque $\mathbf{X}' \succ 0$, on a également $\mathbf{X} \succ 0$.

Le couple $\left(\begin{pmatrix} \mathbf{D}' & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{X}' \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est donc une solution pour $\mathbf{M}$.

10 Calculons

$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{M}_1\mathbf{M}_1 &= {}^t\left(\mathbf{W} + \frac{1}{1-\rho}\mathbf{U}^t\mathbf{V}\right)\left(\mathbf{W} + \frac{1}{1-\rho}\mathbf{U}^t\mathbf{V}\right) \\ &= \left({}^t\mathbf{W} + \frac{1}{1-\rho}\mathbf{V}^t\mathbf{U}\right)\left(\mathbf{W} + \frac{1}{1-\rho}\mathbf{U}^t\mathbf{V}\right) \\ {}^t\mathbf{M}_1\mathbf{M}_1 &= {}^t\mathbf{W}\mathbf{W} + \frac{1}{1-\rho}({}^t\mathbf{W}\mathbf{U}^t\mathbf{V} + \mathbf{V}^t\mathbf{U}\mathbf{W}) + \left(\frac{1}{1-\rho}\right)^2 \mathbf{V}^t\mathbf{U}\mathbf{U}^t\mathbf{V} \end{aligned}$$

En utilisant les relations obtenues à la question 9.a,

$${}^t\mathbf{W}\mathbf{W} + \mathbf{V}^t\mathbf{V} = \mathbf{I}_{n-1} \quad \text{et} \quad {}^t\mathbf{W}\mathbf{U} + \rho\mathbf{V} = {}^t\mathbf{U}\mathbf{W} + \rho^t\mathbf{V} = 0 \quad \text{et} \quad {}^t\mathbf{U}\mathbf{U} + \rho^2 = 1$$

on obtient

$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{M}_1\mathbf{M}_1 &= (\mathbf{I}_{n-1} - \mathbf{V}^t\mathbf{V}) + \frac{1}{1-\rho}((- \rho\mathbf{V})^t\mathbf{V} + \mathbf{V}(- \rho^t\mathbf{V})) + \left(\frac{1}{1-\rho}\right)^2 \mathbf{V}(1-\rho^2)^t\mathbf{V} \\ &= \mathbf{I}_{n-1} + \left(-1 - \frac{2\rho}{1-\rho} + \frac{1-\rho^2}{(1-\rho)^2}\right) \mathbf{V}^t\mathbf{V} \\ &= \mathbf{I}_{n-1} + \frac{-(1-\rho)^2 - 2\rho(1-\rho) + 1-\rho^2}{(1-\rho)^2} \mathbf{V}^t\mathbf{V} \end{aligned}$$

$${}^t\mathbf{M}_1\mathbf{M}_1 = \mathbf{I}_{n-1}$$

d'où

$\mathbf{M}_1$ est orthogonale.

De même,

$$\begin{aligned}
 {}^tM_2 M_2 &= {}^tW W - \frac{1}{1+\rho}({}^tW U {}^tV + V {}^tU W) + \left(\frac{1}{1+\rho}\right)^2 V {}^tU U {}^tV \\
 &= I_{n-1} + \left(-1 + \frac{2\rho}{1+\rho} + \frac{1-\rho^2}{(1+\rho)^2}\right) V {}^tV \\
 &= I_{n-1} + \frac{-(1+\rho)^2 + 2\rho(1+\rho) + 1-\rho^2}{(1+\rho)^2} V {}^tV \\
 {}^tM_2 M_2 &= I_{n-1}
 \end{aligned}$$

d'où

M_2 est orthogonale.

11.a En utilisant les égalités $M_1 X_1 = D_1 X_1$ et $M_2 X_2 = D_2 X_2$, on trouve

$${}^tX_2 D_2 D_1 X_1 = {}^t(D_2 X_2) D_1 X_1 = {}^t(M_2 X_2) M_1 X_1 = {}^tX_2 {}^tM_2 M_1 X_1$$

Utilisons les égalités de la question 9.a :

$$\begin{aligned}
 {}^tM_2 M_1 &= {}^t\left(W - \frac{1}{1+\rho} U {}^tV\right) \left(W + \frac{1}{1-\rho} U {}^tV\right) \\
 &= {}^tW W + \frac{1}{1-\rho} {}^tW U {}^tV - \frac{1}{1+\rho} V {}^tU W - \frac{1}{(1-\rho)(1+\rho)} V {}^tU U {}^tV \\
 &= (I_{n-1} - V {}^tV) + \frac{1}{1-\rho} (-\rho V) {}^tV - \frac{1}{1+\rho} V (-\rho {}^tV) - \frac{1}{1-\rho^2} V (1-\rho^2) {}^tV \\
 &= I_{n-1} - \left(\rho \left(\frac{1}{1-\rho} - \frac{1}{1+\rho}\right) + \frac{1-\rho^2}{1-\rho^2}\right) V {}^tV \\
 &= I_{n-1} - \left(\rho \frac{1+\rho-1+\rho}{1-\rho^2} + \frac{1-\rho^2}{1-\rho^2}\right) V {}^tV \\
 {}^tM_2 M_1 &= I_{n-1} - \frac{1+\rho^2}{1-\rho^2} V {}^tV
 \end{aligned}$$

En multipliant à gauche par tX_2 et à droite par X_1 et en posant $\sigma = \frac{1+\rho^2}{1-\rho^2}$,

$${}^tX_2 D_2 D_1 X_1 = {}^tX_2 X_1 - \sigma {}^tX_2 V {}^tV X_1$$

Puisque ${}^tX_2 V$ et ${}^tV X_1$ sont des scalaires, ils commutent et on obtient également ${}^tX_2 V = {}^t({}^tX_2 V) = {}^tV X_2$. De plus, on a bien $\sigma \geq 0$ puisque $\rho^2 < 1$. On aboutit à

$${}^tX_2 D_2 D_1 X_1 = {}^tX_2 X_1 - \sigma ({}^tV X_1) ({}^tV X_2)$$

11.b Notons $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$ les éléments diagonaux de $D_1 D_2$, $X_1 = {}^t(x_1, \dots, x_{n-1})$ et $X_2 = {}^t(y_1, \dots, y_{n-1})$:

$${}^tX_2 X_1 - {}^tX_2 D_1 D_2 X_1 = \sum_{i=1}^{n-1} y_i x_i - \sum_{i=1}^{n-1} y_i \varepsilon_i x_i = \sum_{i=1}^{n-1} (1 - \varepsilon_i) x_i y_i$$

Comme $X_1 \succ 0$, $X_2 \succ 0$ et les ε_i valent 1 ou -1 : tous les termes sont positifs ou nuls. Comme $D_1 \neq D_2$, au moins un ε_i vaut -1 et au moins un terme de la somme est non nul. On en déduit

$${}^tX_2 X_1 - {}^tX_2 D_1 D_2 X_1 = \sum_{i=1}^{n-1} (1 - \varepsilon_i) x_i y_i > 0$$

Grâce au résultat de la question 11.a, on obtient

$$\sigma({}^tV X_1)({}^tV X_2) > 0$$

En particulier, ${}^tV X_1$ et ${}^tV X_2$ sont non nuls. Comme $\sigma \geq 0$, on a également

$$({}^tV X_1)({}^tV X_2) > 0$$

Ainsi,

$${}^tV X_1 \text{ et } {}^tV X_2 \text{ sont non nuls et de même signe.}$$

Utilisons maintenant les définitions de M_1 et M_2 :

$$\begin{aligned} M \begin{pmatrix} X_1 \\ \frac{1}{1-\rho} {}^tV X_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} W & U \\ {}^tV & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ \frac{1}{1-\rho} {}^tV X_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} WX_1 + \frac{1}{1-\rho} U {}^tV X_1 \\ {}^tV X_1 + \frac{\rho}{1-\rho} {}^tV X_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} M_1 X_1 \\ \frac{1}{1-\rho} {}^tV X_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} D_1 X_1 \\ \frac{1}{1-\rho} {}^tV X_1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

soit

$$M \begin{pmatrix} X_1 \\ \frac{1}{1-\rho} {}^tV X_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ \frac{1}{1-\rho} {}^tV X_1 \end{pmatrix}$$

De même,

$$\begin{aligned} M \begin{pmatrix} X_2 \\ -\frac{1}{1+\rho} {}^tV X_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} W & U \\ {}^tV & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_2 \\ -\frac{1}{1+\rho} {}^tV X_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} WX_2 - \frac{1}{1+\rho} U {}^tV X_2 \\ {}^tV X_2 - \frac{\rho}{1+\rho} {}^tV X_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} M_2 X_2 \\ -\frac{1}{1+\rho} {}^tV X_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} D_2 X_2 \\ -\frac{1}{1+\rho} {}^tV X_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

soit

$$M \begin{pmatrix} X_2 \\ -\frac{1}{1+\rho} {}^tV X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_2 \\ -\frac{1}{1+\rho} {}^tV X_2 \end{pmatrix}$$

Puisque D_1 et D_2 sont des matrices diagonales à coefficients diagonaux dans $\{-1, 1\}$, les matrices $\begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} D_2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sont dans $\mathcal{D}_n$. Si ${}^tV X_1 > 0$, puisque $X_1 \succ 0$ et $1 - \rho > 0$, on a ${}^t({}^tX_1, \frac{1}{1-\rho} {}^tV X_1) \succ 0$ et

Si ${}^tV X_1 > 0$, le couple $\left(\begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_1 \\ \frac{1}{1-\rho} {}^tV X_1 \end{pmatrix} \right)$ est une solution pour M .

Sinon, ${}^tV X_1$ étant non nul, il vérifie ${}^tV X_1 < 0$ et on obtient ${}^tV_2 X_2 < 0$. On en déduit, puisque $X_2 \succ 0$ et $1 + \rho > 0$, que ${}^t\left({}^tX_2, -\frac{1}{1+\rho} {}^tV X_2\right) \succ 0$.

Si ${}^tV X_1 \leq 0$, le couple $\left(\begin{pmatrix} D_2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_2 \\ -\frac{1}{1+\rho} {}^tV X_2 \end{pmatrix}\right)$ est une solution pour M.

11.c Comme $D_1 = D_2$, le produit $D_1 D_2$ est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux valent 1^2 ou $(-1)^2$: c'est la matrice identité. L'égalité obtenue à la question 11.a devient

$${}^tX_2 D_2 D_1 X_1 = {}^tX_2 X_1 = {}^tX_2 X_1 - \sigma({}^tV X_1)({}^tV X_2)$$

On en tire $\sigma({}^tV X_1)({}^tV X_2) = 0$. Comme $\sigma \neq 0$, il vient que

L'un des réels ${}^tV X_1$ ou ${}^tV X_2$ est nul.

Supposons ${}^tV X_1 = 0$. Les calculs faits à la question précédente restent valables :

$$M \begin{pmatrix} X_1 \\ \frac{1}{1-\rho} {}^tV X_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ \frac{1}{1-\rho} {}^tV X_1 \end{pmatrix}$$

soit $MX = DX$ avec $D = \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \frac{1}{1-\rho} {}^tV X_1 \end{pmatrix}$

On a toujours $D \in \mathcal{D}_n$ et, puisque $X_1 \succ 0$, $x_i > 0$ pour tout $i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$. De plus ${}^tV X_1 = 0$, si bien que $X \succ 0$. Si ${}^tV X_2 = 0$. On obtient

$$M \begin{pmatrix} X_2 \\ -\frac{1}{1+\rho} {}^tV X_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_2 \\ -\frac{1}{1+\rho} {}^tV X_2 \end{pmatrix}$$

soit $MX' = D'X'$ avec $D' = \begin{pmatrix} D_2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} X_2 \\ -\frac{1}{1+\rho} {}^tV X_2 \end{pmatrix}$

avec encore $D' \in \mathcal{D}_n$, $x'_i > 0$ pour tout $i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ et $X' \succ 0$ (car ${}^tV X_2 = 0$). Dans tous les cas,

Il existe une matrice $D \in \mathcal{D}_n$ et un vecteur $X \succ 0$ tel que $x_i > 0$ pour tout $i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ et satisfaisant $MX = DX$.

11.d On souhaite appliquer le résultat de la question précédente pour obtenir un vecteur $X' \succ 0$ vérifiant $x'_i > 0$ pour tout $i \in \llbracket 2; n \rrbracket$. On peut donc essayer d'échanger les première et dernière coordonnées des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Introduisons pour cela

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

qui est la matrice de changement de base de la base canonique $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ à la base $(e_n, e_2, \dots, e_{n-1}, e_1)$. Puisque les bases $(e_1, \dots, e_n)$ et $(e_n, e_2, \dots, e_{n-1}, e_1)$ sont des bases orthonormées, la matrice A est orthogonale.

┌ Pour montrer que A est orthogonale, on peut aussi dire que ses colonnes forment une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$.

Puisque l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n$ forme un sous-groupe de l'ensemble des matrices inversibles, la matrice $A^{-1}MA$ est orthogonale et on peut lui appliquer le résultat de la question précédente. On obtient une matrice $D \in \mathcal{D}_n$ et un vecteur $X \succcurlyeq 0$ vérifiant $A^{-1}MAX = DX$ et $x_i > 0$ pour tout $i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, en notant $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$. On obtient alors

$$\begin{aligned} A^{-1}MAX &= DX \\ &= DA^{-1}AX \end{aligned}$$

d'où

$$M(AX) = (ADA^{-1})(AX)$$

En notant $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux de D et en interprétant A comme une matrice de passage, on obtient

$$ADA^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_n & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad AX = \begin{pmatrix} x_n \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_1 \end{pmatrix}$$

┌ On peut aussi faire les calculs.

Il ne reste plus qu'à poser $D' = ADA^{-1}$ et $X' = AX$. On a bien $MX = DX$, $D' \in \mathcal{D}_n$, $X' \succcurlyeq 0$ et $x'_i > 0$ pour tout $i \in \llbracket 2; n \rrbracket$ en notant $X' = {}^t(x'_1, \dots, x'_n)$. Conclusion :

Il existe une matrice $D' \in \mathcal{D}_n$ et un vecteur $X' \succcurlyeq 0$ tel que $x'_i > 0$ pour tout $i \in \llbracket 2; n \rrbracket$ et $MX' = D'X'$.

┌ On aurait aussi pu reprendre le raisonnement précédent depuis la question 9.a jusqu'à la 11.c mais en décomposant M en

$$M = \begin{pmatrix} \rho' & {}^tV' \\ U' & W' \end{pmatrix} \text{ avec } \rho' \in \mathbb{R}, U', V' \in \mathbb{R}^{n-1} \text{ et } W' \in \mathcal{M}_{n-1}$$

En suivant le raisonnement de la question 9.a, on montre que $|\rho'| < 1$. Si $|\rho'| = 1$ on obtient directement une solution pour M (9.b). Sinon, on obtient soit une solution pour M (11.b), soit un couple (D', X') avec $D' \in \mathcal{D}_n$ et $X' \succcurlyeq 0$ tel que $x'_i > 0$ pour tout $i \in \llbracket 2; n \rrbracket$ et $MX' = D'X'$ (11.c). Comme une solution (D, X) pour M vérifie aussi ces quatre propriétés, on conclut de la même manière que ci-dessus.

12.a À la question 11 on a obtenu soit une solution pour M, auquel cas il n'y a rien à faire, soit deux couples (D, X) et (D', X') vérifiant

$$\begin{aligned} D &\in \mathcal{D}_n & \text{et} & & D' &\in \mathcal{D}_n \\ X &\succ 0 & \text{et} & & X' &\succ 0 \\ x_i &> 0 \text{ pour tout } i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket & \text{et} & & x'_i > 0 \text{ pour tout } i \in \llbracket 2; n \rrbracket \\ MX &= DX & \text{et} & & MX' &= D'X' \end{aligned}$$

Supposons tout d'abord $D = D'$. Alors, en posant $Y = X + X'$, on obtient

$$MY = M(X + X') = MX + MX' = DX + D'X' = D(X + X') = DY$$

Les coefficients de Y sont les $x_i + x'_i$ qui vérifient

- $x_1 > 0$ et $x'_1 \geq 0$ donc $x_1 + x'_1 > 0$;
- $x_i > 0$ et $x'_i > 0$ donc $x_i + x'_i > 0$ pour tout $i \in \llbracket 2; n-1 \rrbracket$;
- $x_n \geq 0$ et $x'_n > 0$ donc $x_n + x'_n > 0$.

On en déduit que $Y \succ 0$. Comme $D \in \mathcal{D}_n$, le couple (D, Y) est une solution pour M.

Dans le cas général, construisons deux nouveaux couples $(\tilde{D}, \tilde{X})$ et $(\tilde{D}', \tilde{X}')$ vérifiant les mêmes propriétés que (D, X) et (D', X') ainsi que $\tilde{D} = \tilde{D}'$, $\tilde{X} = X$ et $\tilde{X}' = X'$. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les éléments diagonaux de D et $\lambda'_1, \dots, \lambda'_n$ ceux de D'. Démontrons tout d'abord que $\lambda_i = \lambda'_i$ pour tout $i \in \llbracket 2; n \rrbracket$. On a

$$\begin{aligned} {}^t(MX')MX &= {}^tX'({}^tMM)X \\ &= {}^tX'X && \text{car M est orthogonale} \\ &= \sum_{i=1}^n x_i x'_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{En outre,} \quad {}^t(MX')MX &= {}^tX'({}^tD'D)X && \text{car } MX = DX \text{ et } MX' = D'X' \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i \lambda'_i x_i x'_i \end{aligned}$$

$$\text{Enfin,} \quad \sum_{i=1}^n (1 - \lambda'_i \lambda_i)(x'_i x_i) = 0 \quad (\star) \quad \text{en faisant la différence.}$$

Tous les termes de cette somme étant positifs, ils sont tous nuls. De plus, pour un entier $i \in \llbracket 2; n-1 \rrbracket$, $x'_i x_i > 0$, d'où $1 - \lambda'_i \lambda_i = 0$ ie $\lambda'_i \lambda_i = 1$ et $\lambda'_i = \lambda_i$ car ils valent 1 ou -1. Posons

$$\tilde{D} = \tilde{D}' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda'_2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda'_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda'_n \end{pmatrix}$$

$$\text{si bien que} \quad \tilde{D}X = \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \vdots \\ \lambda_{n-1} x_{n-1} \\ \lambda'_n x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{D}'X' = \begin{pmatrix} \lambda_1 x'_1 \\ \lambda'_2 x'_2 \\ \vdots \\ \lambda'_n x'_n \end{pmatrix}$$

Si $x_n = 0$, on a $\tilde{D}'X = DX = MX$. Si $x_n \neq 0$, on obtient $x_n x'_n \neq 0$. D'après l'égalité $(\star)$, $1 - \lambda'_n \lambda_n = 0$ ie $\lambda'_n = \lambda_n$ et donc à nouveau $\tilde{D}X = DX = MX$.

De même, si $x'_1 = 0$ alors $\tilde{D}'X' = D'X' = MX'$ et si $x'_1 \neq 0$ alors $\lambda_1 = \lambda'_1$ et $\tilde{D}'X' = D'X' = MX'$ aussi.

On trouve ainsi deux couples $(\tilde{D}, X)$ et $(\tilde{D}', X')$ vérifiant les mêmes hypothèses que (D, X) et (D', X') ainsi que $\tilde{D} = \tilde{D}'$. D'après ce qui précède,

Le couple $(\tilde{D}, X + X')$ est une solution pour M.

12.b On a montré par récurrence que la propriété $(\mathcal{P}_n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$. L'initialisation a été faite à la question 8 et l'hérédité lors des questions 9 à 12.a.

La propriété $(\mathcal{P}_n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

13.a Soit λ une valeur propre réelle de N et X un vecteur propre réel associé. D'une part,

$${}^tX(NX) = {}^tX \lambda X = \lambda {}^tX X$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned} {}^tX(NX) &= ({}^tX N)X \\ &= {}^t({}^tN X)X \\ &= {}^t(-NX)X \quad \text{car N est antisymétrique} \end{aligned}$$

$${}^tX(NX) = -\lambda {}^tX X$$

soit

$$\lambda {}^tX X = -\lambda {}^tX X$$

d'où

$$\lambda {}^tX X = 0$$

Comme X est un vecteur propre, il n'est pas nul et le produit scalaire ${}^tX X$ non plus. On en déduit que $\lambda = 0$.

Toute valeur propre réelle de N est nulle.

En particulier, -1 n'est pas valeur propre de N et la matrice $N - (-1)I_n$ est inversible

$N + I_n$ est inversible.

13.b Comme N est antisymétrique, on a ${}^tN = -N$ ainsi que ${}^t(I_n + N) = I_n - N$ et ${}^t(I_n - N) = I_n + N$. De plus, la transposée de l'inverse d'une matrice (inversible) étant égale à l'inverse de sa transposée, ${}^t((I_n + N)^{-1}) = (I_n - N)^{-1}$. Enfin, puisque $I_n + N$ et $I_n - N$ commutent,

$$\begin{aligned} M {}^tM &= (I_n + N)^{-1}(I_n - N) {}^t[(I_n + N)^{-1}(I_n - N)] \\ &= (I_n + N)^{-1}(I_n - N) {}^t(I_n - N) {}^t[(I_n + N)^{-1}] \\ &= (I_n + N)^{-1}(I_n - N)(I_n + N)(I_n - N)^{-1} \\ &= (I_n + N)^{-1}(I_n + N)(I_n - N)(I_n - N)^{-1} \end{aligned}$$

soit

$$M {}^tM = I_n$$

La matrice M est orthogonale.

On aurait aussi pu calculer le produit tMM mais il aurait alors fallu justifier que $(I_n - N)^{-1}$ et $(I_n + N)^{-1}$ commutent. Pour cela on peut montrer que si une matrice A commute avec une matrice inversible B , alors elle commute avec B^{-1} ; en effet, $AB^{-1} = B^{-1}BAB^{-1} = B^{-1}ABB^{-1} = B^{-1}A$.

13.c Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les coefficients diagonaux de D et $X = {}^t(x_1, \dots, x_n)$. Comme $Y = X + DX$,

$$Y = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1 \\ \vdots \\ \lambda_n x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 + \lambda_1)x_1 \\ \vdots \\ (1 + \lambda_n)x_n \end{pmatrix}$$

Puisque $D \in \mathcal{D}_n$, les λ_i valent 1 ou -1 et les $1 + \lambda_i$ valent 2 ou 0. Puisque $X \succ 0$, les x_i sont strictement positifs. Ainsi $(1 + \lambda_i)x_i \geq 0$ pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, c'est-à-dire

$$\boxed{Y \succcurlyeq 0}$$

Montrons que $NY \succcurlyeq 0$. $DX = MX$ car (D, X) est une solution pour M
 $= (I_n + N)^{-1}(I_n - N)X$

soit $(I_n + N)DX = (I_n - N)X$

et $DX + NDX = X - NX$

d'où $X - DX = NX + NDX$
 $= N(X + DX)$

et enfin $X - DX = NY$

Comme précédemment, les coefficients de $X - DX$ sont les $(1 - \lambda_i)x_i$ et sont donc positifs ou nuls. On en déduit que

$$\boxed{NY \succcurlyeq 0}$$

Enfin, $Y + NY = (X + DX) + (X - DX) = 2X$

et comme $X \succ 0$, $\boxed{Y + NY \succ 0}$

14 Considérons la matrice N définie par blocs par

$$N = \begin{pmatrix} 0 & P \\ -{}^tP & 0 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est bien antisymétrique car

$${}^tN = \begin{pmatrix} 0 & {}^t(-{}^tP) \\ {}^tP & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -P \\ {}^tP & 0 \end{pmatrix} = -N$$

On peut appliquer successivement les résultats des questions 13.a, 13.b et 13.c à N : il existe un vecteur Z satisfaisant $Z \succcurlyeq 0$, $NZ \succcurlyeq 0$ et $Z + NZ \succ 0$. Puisque P appartient à $\mathcal{M}_n$, la matrice N est dans $\mathcal{M}_{2n}$ et Z appartient à $\mathbb{R}^{2n}$. Notons Y et X les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ vérifiant ${}^tZ = {}^t({}^tY, {}^tX)$. On obtient

$$Z = \begin{pmatrix} Y \\ X \end{pmatrix}, \quad NZ = \begin{pmatrix} 0 & P \\ -{}^tP & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} PX \\ -{}^tP Y \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Z + NZ = \begin{pmatrix} Y + PX \\ X - {}^tP Y \end{pmatrix}$$

Comme $Z \succcurlyeq 0$ et $NZ \succcurlyeq 0$, on trouve, entre autres, $Y \succcurlyeq 0$ et $-{}^tPY \succcurlyeq 0$ c'est-à-dire $0 \succcurlyeq {}^tPY$. Ou bien $Y \neq 0$ et les inégalités larges $0 \succcurlyeq {}^tPY$ et $Y \succcurlyeq 0$ admettent une solution non nulle dans $\mathbb{R}^n$, ou bien $Y = 0$ et la condition $Z + NZ \succ 0$ donne $PX \succ 0$ et $X \succ 0$. Ainsi,

Au moins l'une des deux propriétés suivantes est vraie :

- soit les inégalités larges $0 \succcurlyeq {}^tPY$ et $Y \succcurlyeq 0$ admettent une solution non nulle dans $\mathbb{R}^n$;
- soit les inégalités strictes $PX \succ 0$ et $X \succ 0$ admettent une solution dans $\mathbb{R}^n$.

15 On a montré à la troisième partie que si $P \in \mathcal{M}_n^+$ et $X \in \mathbb{R}^n$ vérifient $0 \succcurlyeq PX$ et $X \succcurlyeq 0$, alors $X = 0$. En appliquant ceci à la matrice tP , qui est bien dans $\mathcal{M}_n^+$ d'après la question 1.c, on constate que la première propriété de l'alternative établie à la question 14 est fausse. La deuxième est donc vraie :

Les inégalités strictes $PX \succ 0$ et $X \succ 0$ admettent une solution dans $\mathbb{R}^n$.