II. Résolution d'une équation fonctionnelle

12 Soit $x > 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$|\varphi_k(x)| = \left|\frac{(-1)^k}{(x+k)^2}\right| = \frac{1}{(x+k)^2} \leqslant \frac{1}{k^2}$$

Or la série de terme général $1/k^2$ est une série de Riemann convergente. Par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que la série

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$$

est absolument convergente. Ainsi,

$$\boxed{\text{La série de fonctions } \sum_{k\geqslant 0} \varphi_k \text{ converge simplement sur }]\,0\,;+\infty\,[.}$$

> On pouvait également prouver la convergence simple de cette série de fonctions en invoquant le théorème spécial des séries alternées.

13 Soient $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculons

$$\sum_{k=0}^{n} \varphi_k(x) + \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(x+1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+1+k)^2}$$

Procédons au changement d'indice $k \leftarrow k+1$ dans la deuxième somme. Il vient

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \varphi_k(x) + \sum_{k=0}^{n} \varphi_k(x+1) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{(x+k)^2} \\ &= \frac{1}{x^2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k + (-1)^{k-1}}{(x+k)^2} + \frac{(-1)^n}{(x+n+1)^2}\end{aligned}$$

Or, pour tout $k \in [\![\,1\,;n\,]\!]$, $(-1)^k + (-1)^{k-1} = 0$, et

$$\left|\frac{(-1)^n}{(x+n+1)^2}\right| = \frac{1}{(x+n+1)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Ainsi, en faisant tendre n vers l'infini, comme la série de fonctions $\sum \varphi_k$ converge simplement vers φ, on obtient

$$\boxed{\forall x \in\,]\,0\,;+\infty\,[\qquad \varphi(x) + \varphi(x+1) = \frac{1}{x^2}}$$

14 Fixons $x > 0$, et suivons l'indication de l'énoncé. La suite $\big(1/(x+n)^2\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, décroissante et tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Par conséquent, la série

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{(x+n)^2}$$

est une série alternée : d'après le théorème spécial, son reste vérifie

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}\right| \leqslant \frac{1}{(x+n+1)^2}$$

soit

$$\boxed{\forall x > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k(x)\right| \leqslant \frac{1}{(x+n+1)^2}}$$

15 Prouvons que $\varphi(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Pour cela, fixons $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\frac{1}{(n_0+1)^2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

ce qui est possible car $1/(n+1)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On a alors

$$\left|\sum_{k=0}^{n_0} \varphi_k(x)\right| \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

puisque $\varphi_k(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ pour tout $k \in [\![\, 0\,;n_0\,]\!]$ et car la somme est finie. On peut donc fixer $x_0 > 0$ tel que, pour tout $x > x_0$,

$$\left|\sum_{k=0}^{n_0} \varphi_k(x)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Il s'ensuit que, pour tout $x > x_0$, grâce au résultat de la question 14,

$$|\varphi(x)| \leqslant \left|\sum_{k=0}^{n_0} \varphi_k(x)\right| + \left|\sum_{k=n_0+1}^{+\infty} \varphi_k(x)\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{(x+n_0+1)^2} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{(n_0+1)^2} \leqslant \varepsilon$$

On a bien montré que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_0 > 0 \quad \forall x > x_0 \qquad |\varphi(x)| \leqslant \varepsilon$$

c'est-à-dire que la fonction φ a une limite nulle en $+\infty$. De plus, d'après la question 13, elle vérifie l'équation fonctionnelle du problème (P). En conclusion,

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ est solution du problème (P).}}$$

16 Soit $f : \,]\,0\,;+\infty\,[\, \to \mathbb{R}$ une solution du problème (P). Montrons par récurrence que la propriété

$$\mathscr{P}(n) : \quad \forall x > 0 \qquad f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- $\underline{\mathscr{P}(0)}$ est vraie : en effet, comme f est solution de (P), on a pour tout $x > 0$,

$$f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x^2}$$

soit $\;f(x) = -f(x+1) + \dfrac{1}{x^2} = (-1)^{0+1} f(x+0+1) + \displaystyle\sum_{k=0}^{0} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$

- $\underline{\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)}$: soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathscr{P}(n)$ soit vraie. Montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. Soit $x > 0$. Alors, par hypothèse de récurrence,

$$f(x+1) = (-1)^{n+1} f(x+n+2) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+1+k)^2}$$

Par ailleurs, comme f est solution de (P), on peut écrire

$$\begin{aligned}
f(x) &= -f(x+1) + \frac{1}{x^2} \\
&= -\left((-1)^{n+1} f(x+n+2) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+1+k)^2}\right) + \frac{1}{x^2} \\
&= (-1)^{n+2} f(x+n+2) + \sum_{j=1}^{n+1} \frac{(-1)^j}{(x+j)^2} + \frac{1}{x^2} \qquad (j = k+1) \\
f(x) &= (-1)^{n+2} f(x+n+2) + \sum_{j=0}^{n+1} \frac{(-1)^j}{(x+j)^2}
\end{aligned}$$

ce qui prouve que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

- Conclusion : $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \left]\,0\,;+\infty\,\right[\qquad f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}}$$

17 Soit $f : \left]\,0\,;+\infty\,\right[\to \mathbb{R}$ une solution de (P). Elle vérifie par conséquent

$$\forall x > 0 \qquad f(x+n+1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

d'où, puisque la suite $((-1)^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée,

$$\forall x > 0 \qquad (-1)^{n+1} f(x+n+1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Faisons tendre n vers l'infini dans le résultat de la question précédente. Comme pour tout $x > 0$, la série $\sum (-1)^k/(x+k)^2$ converge d'après la question 12, on obtient

$$\forall x > 0 \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} = \varphi(x)$$

ce qui prouve que

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ est l'unique solution au problème (P).}}$$

18 Montrons que la série de fonctions qui définit φ converge même normalement sur $\left[\,\varepsilon\,;+\infty\,\right[$. Soit $x \in \left[\,\varepsilon\,;+\infty\,\right[$. Alors

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad |\varphi(x)| = \frac{1}{(x+k)^2} \leqslant \frac{1}{(\varepsilon+k)^2}$$

et la série $\sum 1/(\varepsilon+k)^2$ converge d'après la question 12. Ainsi,

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{La série de fonctions } \sum\limits_{k\geqslant 0} \varphi_k \text{ converge norma-} \\ \text{lement, donc uniformément, sur } \left[\,\varepsilon\,;+\infty\,\right[.\end{array}}$$

> Il était possible de prouver la convergence uniforme en montrant que le reste converge uniformément vers 0, grâce au résultat de la question 14.

19 Pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction φ_k est continue sur $\left[\,\varepsilon\,;+\infty\,\right[$, et la série de fonctions $\sum \varphi_k$ converge uniformément sur $\left[\,\varepsilon\,;+\infty\,\right[$. Par conséquent, d'après le théorème de continuité de la somme d'une série de fonctions, la fonction φ est continue sur $\left[\,\varepsilon\,;+\infty\,\right[$ pour tout $\varepsilon > 0$, autrement dit

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ est continue sur } \left]\,0\,;+\infty\,\right[.}$$

Déterminons un équivalent de $\varphi(x)$ au voisinage de 0^+. Comme φ est solution du problème (P), on a pour tout $x > 0$,

$$x^2\varphi(x) = -x^2\varphi(x+1) + 1$$

La fonction φ étant continue sur $]\,0\,;+\infty\,[$, $\varphi(x+1) \xrightarrow[x\to 0^+]{} \varphi(1)$ donc

$$x^2\varphi(x+1) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0 \qquad \text{puis} \qquad x^2\varphi(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1$$

et donc

$$\boxed{\varphi(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{1}{x^2}}$$

20 Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction φ_k est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et

$$\forall x \in \,]\,0\,;+\infty\,[\qquad {\varphi_k}'(x) = \frac{-2(-1)^k}{(x+k)^3} = \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [\,\varepsilon\,;+\infty\,[$,

$$|{\varphi_k}'(x)| = \left|\frac{2}{(x+k)^3}\right| \leqslant \frac{2}{(\varepsilon+k)^3}$$

et

$$\frac{2}{(\varepsilon+k)^3} \underset{k\to+\infty}{\sim} \frac{2}{k^3}$$

Or la série de terme général $2/k^3$ converge, donc par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum 2/(\varepsilon+k)^3$ converge. Par conséquent, la série $\sum {\varphi_k}'$ converge normalement, donc uniformément sur $[\,\varepsilon\,;+\infty\,[$. De plus, la série de fonctions qui définit φ converge simplement sur $[\,\varepsilon\,;+\infty\,[$. D'après le théorème de dérivabilité de la somme d'une série de fonctions, la fonction φ est donc de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,\varepsilon\,;+\infty\,[$ pour tout $\varepsilon > 0$, ce qui entraîne que

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ est dérivable sur }]\,0\,;+\infty\,[.}$$

En outre, on peut dériver terme à terme et obtenir :

$$\boxed{\forall x \in \,]\,0\,;+\infty\,[\qquad \varphi'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^k}{(x+k)^3}}$$

21 Soit $x \in \,]\,0\,;+\infty\,[$. La suite $\big(2/(x+k)^3\big)_{k\in\mathbb{N}}$ est positive et tend vers 0 en décroissant. Par conséquent, la série

$$\sum_{k\geqslant 0} \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}$$

est une série alternée. Elle vérifie en particulier, d'après le théorème spécial,

$$\left|\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}\right| \leqslant \left|\frac{2(-1)^{1+1}}{(x+1)^3}\right| = \frac{2}{(x+1)^3} < \frac{2}{x^3}$$

Or

$$\varphi'(x) = -\frac{2}{x^3} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}$$

Au vu de ce qui précède, $\varphi'(x) < 0$ pour tout $x > 0$. On en conclut que

$$\boxed{\text{La fonction } \varphi \text{ est décroissante sur }]\,0\,;+\infty\,[.}$$

22 Soit $x \in]\,1\,;+\infty\,[$. En utilisant la décroissance de φ et la relation (P), on a

$$2\varphi(x) = \varphi(x) + \varphi(x) \leqslant \varphi(x-1) + \varphi(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$$

mais aussi
$$\frac{1}{x^2} = \varphi(x) + \varphi(x+1) \leqslant 2\varphi(x)$$

Ainsi,
$$\boxed{\forall x \in]\,1\,;+\infty\,[\qquad \frac{1}{x^2} \leqslant 2\varphi(x) \leqslant \frac{1}{(x-1)^2}}$$

Il découle du résultat ci-dessus que

$$\forall x \in]\,1\,;+\infty\,[\qquad 1 \leqslant 2x^2\varphi(x) \leqslant \frac{x^2}{(x-1)^2}$$

et on a
$$\frac{x^2}{(x-1)^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$$

On en déduit, d'après le théorème d'encadrement, $2x^2\varphi(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$. Nous avons donc prouvé

$$\boxed{\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2x^2}}$$

23 Soient $k \in \mathbb{N}$ et $a \in]\,0\,;1\,[$. La fonction $t \mapsto t^{x+k-1}$ est continue sur $[\,a\,;1\,]$, et la fonction ln est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,a\,;1\,]$. On peut donc effectuer l'intégration par parties suivante :

$$\begin{aligned}
\int_a^1 |t^{x+k-1}\ln(t)|\,\mathrm{d}t &= -\int_a^1 t^{x+k-1}\ln(t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\left[\frac{t^{x+k}}{x+k}\ln(t)\right]_a^1 + \int_a^1 \frac{t^{x+k}}{x+k}\,\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{a^{x+k}}{x+k}\ln(a) + \left[\frac{t^{x+k}}{(x+k)^2}\right]_a^1 \\
\int_a^1 |t^{x+k-1}\ln(t)|\,\mathrm{d}t &= \frac{a^{x+k}}{x+k}\ln(a) + \frac{1-a^{x+k}}{(x+k)^2}
\end{aligned}$$

Comme $x+k>0$, on a $a^{x+k} \xrightarrow[a\to 0^+]{} 0$ et d'après le théorème des croissances comparées, $a^{x+k}\ln(a) \xrightarrow[a\to 0^+]{} 0$. Ainsi

$$\int_a^1 |t^{x+k-1}\ln(t)|\,\mathrm{d}t \xrightarrow[a\to 0^+]{} \frac{1}{(x+k)^2}$$

ce qui prouve que

$$\boxed{\text{Pour tout } k \in \mathbb{N}, \text{ la fonction } t \mapsto t^{x+k-1}\ln(t) \text{ est intégrable sur }]\,0\,;1\,].}$$

Nous avons également montré que

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \qquad \int_0^1 t^{x+k-1}\ln(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 |t^{x+k-1}\ln(t)|\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{(x+k)^2}}$$

24 Pour tout $t \in]\,0\,;1\,]$, on a

$$\left|\frac{t^{x-1}\ln(t)}{1+t}\right| \leqslant |t^{x-1}\ln(t)|$$

Or, en prenant $k = 0$ dans le résultat de la question précédente, on obtient que la fonction $t \mapsto |t^{x-1}\ln(t)|$ est intégrable sur $]\,0\,;1\,]$. Par comparaison d'intégrales, il s'ensuit

$$\boxed{\text{La fonction } t \mapsto \frac{t^{x-1}\ln(t)}{1+t} \text{ est intégrable sur }]\,0\,;1\,].}$$

De plus, toujours d'après la question précédente,

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^{k+1} t^{x+k-1} \ln(t)\,\mathrm{d}t$$

Justifions que l'on peut permuter série et intégrale dans cette égalité. Posons, pour tout $t \in]\,0\,;1\,[$ et tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\psi_k(t) = (-1)^{k+1} t^{x+k-1} \ln(t)$$

- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction ψ_k est continue et intégrable sur $]\,0\,;1\,[$ d'après la question précédente.
- Pour tout $t \in]\,0\,;1\,[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} \psi_k(t) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} t^{x+k-1} \ln(t) \\ &= -t^{x-1}\ln(t) \sum_{k=0}^{n} (-t)^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} -t^{x-1}\ln(t)\frac{1}{1+t} \qquad (|t| < 1)\end{aligned}$$

  ce qui prouve que la série de fonctions $\sum \psi_k$ converge simplement vers une fonction continue sur $]\,0\,;1\,[$.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, d'après la question précédente,

$$\int_0^1 |\psi_k(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^1 |(-1)^{k+1} t^{x+k-1} \ln(t)|\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(x+k)^2}$$

  et la série de terme général $1/(x+k)^2$ converge (nous l'avons justifié à la question 12).

Par conséquent, d'après le théorème d'interversion série-intégrale,

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^1 \psi_k(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \psi_k(t)\right)\mathrm{d}t$$

Or, pour tout $t \in]\,0\,;1\,[$, $\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \psi_k(t) = \frac{-t^{x-1}\ln(t)}{1+t}$

ce qui permet de conclure

$$\boxed{\varphi(x) = -\int_0^1 \frac{t^{x-1}\ln(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t}$$

III. Approximation d'une racine carrée par la méthode de Héron

> Le caractère bien défini de la suite de fonctions $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ (c'est-à-dire le fait que pour tout $x \geqslant 0$ et tout $k \in \mathbb{N}$, on a $f_k(x) \neq 0$) et l'inégalité admise en début d'énoncé peuvent se démontrer facilement par récurrence.

25 Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Suivons l'indication de l'énoncé et calculons

$$\begin{aligned} f_k(x)^2 - x &= \frac{1}{4}\left(f_{k-1}(x) + \frac{x}{f_{k-1}(x)}\right)^2 - x \\ &= \frac{1}{4}\left(f_{k-1}(x)^2 + 2x + \frac{x^2}{f_{k-1}(x)^2}\right) - x \\ &= \frac{1}{4}\left(f_{k-1}(x)^2 - 2x + \frac{x^2}{f_{k-1}(x)^2}\right) \\ f_k(x)^2 - x &= \frac{1}{4}\left(f_{k-1}(x) - \frac{x}{f_{k-1}(x)}\right)^2 \end{aligned}$$

ce qui prouve que $f_k(x)^2 - x \geqslant 0$, ou encore $f_k(x)^2 \geqslant x$. Par croissance de la fonction racine carrée, et comme $f_k(x) > 0$, on en déduit

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad f_k(x) \geqslant \sqrt{x}}$$

26 Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculons

$$f_{k+1}(x) - f_k(x) = \frac{1}{2}\left(f_k(x) + \frac{x}{f_k(x)}\right) - f_k(x) = \frac{1}{2}\left(-f_k(x) + \frac{x}{f_k(x)}\right)$$

Or d'après la question précédente, $f_k(x) \geqslant \sqrt{x}$ d'où par croissance de la fonction carré sur $\mathbb{R}_+$, $f_k(x)^2 \geqslant x$. Comme par hypothèse, $f_k(x) > 0$, il s'ensuit

$$f_k(x) \geqslant \frac{x}{f_k(x)}$$

Ainsi $f_{k+1}(x) - f_k(x) \leqslant 0$, ce qui prouve que

$$\boxed{\text{La suite } (f_k(x))_{k\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante.}}$$

> L'hypothèse $k \in \mathbb{N}^*$ est importante ici : en effet, si $x > 1$, on a
> $$f_1(x) = \frac{1}{2}\left(f_0(x) + \frac{x}{f_0(x)}\right) = \frac{1+x}{2} > 1 = f_0(x)$$

27 Soit $x \in \mathbb{R}_+$. D'après les deux questions précédentes, la suite $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par $\sqrt{x}$. Par conséquent, elle converge d'après le théorème de la limite monotone. Notons ℓ sa limite. Distinguons alors deux cas :

- Si $x > 0$, par passage à la limite des inégalités dans le résultat de la question 25, on a $\ell \geqslant \sqrt{x} > 0$. Il s'ensuit, par unicité de la limite,

  $$\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{x}{\ell}\right)$$

  ce qui se réécrit $2\ell^2 = \ell^2 + x$, ou encore $\ell^2 = x$. Comme $\ell > 0$, on en déduit finalement $\ell = \sqrt{x}$.

- Si $x = 0$, alors par unicité de la limite, $\ell = \ell/2$ d'où $\ell = 0 = \sqrt{0}$.

Dans tous les cas, $\ell = \sqrt{x}$. En conclusion,

$$\boxed{\text{La suite de fonctions } (f_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \text{ converge simplement vers la fonction racine carrée sur } \mathbb{R}_+.}$$

La méthode de Héron permet donc de construire une suite récurrente dont les termes approximent la racine carrée d'un nombre positif. Il s'agit d'un cas particulier d'une méthode plus générale, appelée la méthode de Newton, qui était au programme d'informatique de première année avant 2020. Cette méthode permet d'approximer les points d'annulation d'une fonction. Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ qui s'annule en un point a mais dont la dérivée ne s'annule pas, on étudie une suite vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = u_n - \frac{g(u_n)}{g'(u_n)}$$

On a ici appliqué cette méthode à la fonction g définie par $g(t) = t^2 - x$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, qui s'annule en $a = \sqrt{x}$.

Il existe plusieurs théorèmes assurant la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers a. En particulier, si la fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$, si sa dérivée seconde est positive ou nulle (on dit que la fonction g est convexe), et si $g'(a) > 0$, alors la suite converge vers a quel que soit le choix de $u_0 \geqslant a$. Ces conditions sont bien vérifiées pour la méthode de Héron : en effet, $g'(\sqrt{x}) = 2\sqrt{x} > 0$, $g''(t) = 2 \geqslant 0$ pour tout $t > 0$, et quel que soit le choix de $u_0 > 0$, on a $u_1 \geqslant \sqrt{x}$.

28 Soit $k \in \mathbb{N}$. Calculons

$$\begin{aligned} f_{k+1}(x) - \sqrt{x} &= \frac{1}{2}\left(f_k(x) + \frac{x}{f_k(x)}\right) - \sqrt{x} \\ &= \frac{f_k(x) - \sqrt{x}}{2} - \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{x}{2f_k(x)} \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\frac{f_k(x) - \sqrt{x}}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{f_k(x)}\right) = \frac{f_k(x) - \sqrt{x}}{2} - \frac{\sqrt{x}}{2} + \frac{x}{2f_k(x)}$$

On a bien égalité entre les deux quantités, ce qui permet de conclure que

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \qquad f_{k+1}(x) - \sqrt{x} = \frac{f_k(x) - \sqrt{x}}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{f_k(x)}\right)}$$

29 Remarquons d'abord que, d'après la question 25, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$|f_k(x) - \sqrt{x}| = f_k(x) - \sqrt{x}$$

Prouvons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que la propriété

$$\mathscr{P}(k) : \quad f_k(x) - \sqrt{x} \leqslant \frac{1+x}{2^k}$$

est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

- $\underline{\mathscr{P}(1)}$ est vraie : en effet,

$$f_1(x) - \sqrt{x} = \frac{1}{2}\left(f_0(x) + \frac{x}{f_0(x)}\right) - \sqrt{x} = \frac{1+x}{2} - \sqrt{x} \leqslant \frac{1+x}{2^1}$$

- $\underline{\mathscr{P}(k) \Longrightarrow \mathscr{P}(k+1)}$: soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}(k)$ soit vraie. Montrons $\mathscr{P}(k+1)$. D'après la question 25, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leqslant \frac{\sqrt{x}}{f_k(x)} \leqslant 1$$

d'où
$$0 \leqslant 1 - \frac{\sqrt{x}}{f_k(x)} \leqslant 1$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence dans le résultat de la question précédente, comme $1 - \sqrt{x}/f_k(x) \geqslant 0$, il vient

$$f_{k+1}(x) - \sqrt{x} = \frac{f_k(x) - \sqrt{x}}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{f_k(x)}\right) \leqslant \frac{1+x}{2^{k+1}}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{f_k(x)}\right)$$

Il s'ensuit
$$f_{k+1}(x) - \sqrt{x} \leqslant \frac{1+x}{2^{k+1}}$$

puisque $1 - \sqrt{x}/f_k(x) \leqslant 1$, et $\mathscr{P}(k+1)$ est démontrée.

- $\underline{\text{Conclusion}}$: par récurrence, $\mathscr{P}(k)$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad |f_k(x) - \sqrt{x}| \leqslant \frac{1+x}{2^k}}$$

> Ce résultat montre que la suite $(f_k(x))_{k\in\mathbb{N}}$ converge très rapidement vers $\sqrt{x}$: le nombre de décimales correctes double à chaque itération. On parle dans ce cas de convergence quadratique.