

III. ÉTUDE D'UN ENDOMORPHISME SUR UN ESPACE PRÉHILBERTIEN

14 Commençons par dériver la fonction w qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions $\mathcal{C}^\infty$: pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} w'(x) &= -2x e^{-x^2} \\ w''(x) &= (-2 + 4x^2) e^{-x^2} \end{aligned}$$

et
$$w'''(x) = (8x + 4x - 8x^3) e^{-x^2} = (12x - 8x^3) e^{-x^2}$$

Par définition de H_n , on obtient alors

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2 \quad \text{et} \quad H_3(x) = 8x^3 - 12x$$

15 Soit $n \in \mathbb{N}$. Dérivons l'égalité qui définit H_n : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$H_n'(x) = (-1)^n \left(e^{x^2} w^{(n+1)}(x) + 2x e^{x^2} w^{(n)}(x) \right) = -H_{n+1}(x) + 2x H_n(x)$$

d'où

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad H_{n+1}(x) = 2x H_n(x) - H_n'(x)$$

16 Montrons par récurrence que la propriété

$$\mathcal{P}(n) : \quad \text{« } H_n \text{ est un polynôme de degré } n \text{ de même parité que } n \text{ »}$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- $\mathcal{P}(0)$ est vraie car $H_0 = 1$.
- $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$: soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Alors $2X H_n$ est un polynôme de degré $n+1$ et H_n' est un polynôme de degré $n-1$, donc H_{n+1} est bien un polynôme de degré $n+1$ par la relation établie à la question 15. De plus, comme H_n est de même parité que n , on a l'égalité $H_n(-X) = (-1)^n H_n(X)$, qui donne $2(-X) H_n(-X) = 2(-1)^{n+1} X H_n(X)$ en multipliant par $2(-X)$, ou encore $-H_n'(-X) = (-1)^n H_n'(X)$ en dérivant. Les polynômes $2X H_n$ et H_n' sont donc de même parité que $n+1$, donc H_{n+1} aussi par somme. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- Conclusion :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, H_n \text{ est un polynôme de degré } n \text{ de même parité que } n.$$

17 Montrons par récurrence que la propriété

$$\mathcal{P}(n) : \quad \text{« } H_n \text{ a pour coefficient dominant } 2^n \text{ »}$$

est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- $\mathcal{P}(0)$ est vraie car $H_0 = 1$.
- $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$: soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Puisque $2X H_n$ est un polynôme de degré $n+1$ et H_n' est de degré $n-1$, le coefficient dominant de $H_{n+1} = 2X H_n + H_n'$ est celui de $2X H_n$. Par hypothèse de récurrence, c'est donc $2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- Conclusion :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ le coefficient dominant de } H_n \text{ est } 2^n.$$

18 Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ contenant $\mathbb{R}[X]$.

- Présence du neutre : la fonction $x \mapsto 0 \times e^{-x^2}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}$, la fonction nulle appartient à E .
- Stabilité par combinaison linéaire : soient $f, g \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. La fonction $f + \lambda g$ est continue sur $\mathbb{R}$ et, en utilisant l'inégalité $2ab \leq a^2 + b^2$, il vient

$$(f + \lambda g)^2 = f^2 + \lambda^2 g^2 + 2\lambda fg \leq f^2 + \lambda^2 g^2 + f^2 + \lambda^2 g^2$$

puis

$$\int_{-\infty}^{+\infty} ((f + \lambda g)(x))^2 e^{-x^2} dx \leq 2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)^2 e^{-x^2} dx + 2\lambda^2 \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)^2 e^{-x^2} dx$$

où les deux intégrales à droite convergent car $f, g \in E$. Donc $f + \lambda g \in E$.

- Inclusion de $\mathbb{R}[X]$: pour $P \in \mathbb{R}[X]$, par croissance comparée,

$$P(x)^2 e^{-x^2} = o_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{1}{x^2} \right)$$

En intégrant le terme de droite, on obtient une intégrale de Riemann convergente. D'après le théorème de comparaison pour les fonctions positives,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)^2 e^{-x^2} dx$$

converge, donc $P \in E$, et par suite $\mathbb{R}[X] \subset E$. Par conséquent,

L'espace E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel contenant $\mathbb{R}[X]$.

19 Montrons que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .

- Bonne définition : pour $f, g \in E$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |f(x)g(x)| \leq \frac{1}{2}(f(x)^2 + g(x)^2)$$

et en multipliant le terme de droite par e^{-x^2} , on obtient la somme de deux intégrales convergentes puisque $f, g \in E$. Ainsi, d'après le théorème de comparaison, $x \mapsto f(x)g(x)e^{-x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, et $\langle f, g \rangle \in \mathbb{R}$ est bien défini. Ceci établit également que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- Bilinéarité : la linéarité du produit réel et de l'intégrale entraîne la bilinéarité de $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
- Symétrie : par commutativité du produit sur $\mathbb{R}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique.
- Définie positivité : pour $f \in E$, par positivité de l'intégrale,

$$\langle f, f \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)^2 e^{-x^2} dx \geq 0$$

De plus, f^2 étant continue et positive, $\langle f, f \rangle = 0$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)^2 e^{-x^2} = 0$, c'est-à-dire $f = 0$ car e^{-x^2} est non nul pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Ainsi,

L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E .

20 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}[X]$. Calculons

$$\begin{aligned}\langle P', H_{n-1} \rangle &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P'(x) (-1)^{n-1} e^{x^2} w^{(n-1)}(x) e^{-x^2} dx \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P'(x) w^{(n-1)}(x) dx \\ \langle P', H_{n-1} \rangle &= \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{\pi}} \left(\left[P(x) w^{(n-1)}(x) \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) w^{(n)}(x) dx \right)\end{aligned}$$

Cette intégration par parties est légitime, car les fonctions $x \mapsto P(x)$ et $x \mapsto w^{(n-1)}(x)$ sont $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et $P(x) w^{(n-1)}(x) = (-1)^{n-1} P(x) H_{n-1}(x) e^{-x^2}$ qui est de limite nulle en $\pm \infty$ par croissance comparée. Ainsi,

$$\langle P', H_{n-1} \rangle = \frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) w^{(n)}(x) dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) H_n(x) e^{-x^2} dx$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall P \in \mathbb{R}[X] \quad \langle P', H_{n-1} \rangle = \langle P, H_n \rangle}$$

21 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. En itérant l'égalité obtenue à la question 20, on obtient par récurrence sur k que pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $\langle P, H_n \rangle = \langle P^{(k)}, H_{n-k} \rangle$. En particulier, pour $k = n$ on a $P^{(n)} = 0$, d'où

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \quad \langle P, H_n \rangle = 0}$$

22 Pour $i < j$ des entiers naturels, l'égalité précédente donne $\langle H_i, H_j \rangle = 0$, puisque on a $H_i \in \mathbb{R}_i[X] \subset \mathbb{R}_{j-1}[X]$ d'après la question 16. Pour $n \in \mathbb{N}$, la famille $(H_0, \dots, H_n)$ est donc orthogonale et les H_i sont tous non nuls : c'est donc une famille libre. De plus, elle est de cardinal $n+1 = \dim \mathbb{R}_n[X]$. Finalement,

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(H_0, \dots, H_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

23 Par définition de la norme euclidienne,

$$\|H_n\|^2 = \langle H_n, H_n \rangle$$

D'après l'égalité obtenue à la question 21, en prenant $k = n$, on en déduit

$$\boxed{\|H_n\|^2 = \langle H_n^{(n)}, H_0 \rangle}$$

24 Le polynôme H_n est de degré n d'après la question 16 et de coefficient dominant 2^n d'après la question 17. Or, la dérivée n -ième de X^k est 0 pour tout $k < n$ et $n!$ pour $k = n$, d'où $H_n^{(n)} = 2^n n!$. Ainsi, d'après la question précédente,

$$\|H_n\|^2 = \langle H_n^{(n)}, H_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} 2^n n! e^{-x^2} dx = 2^n n! \frac{J}{\sqrt{\pi}} = 2^n n!$$

par le résultat de la question 8. Donc

$$\boxed{\|H_n\| = \sqrt{2^n n!}}$$

25 L'application u est bien définie de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$. Pour $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$u(P + \lambda Q) = -P'' - \lambda Q'' + 2X P' + 2\lambda X Q' + P + \lambda Q = u(P) + \lambda u(Q)$$

donc

L'application u est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

De plus, pour $n \in \mathbb{N}$, si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors $\deg(-P'') \leq \deg P - 2 \leq n - 2$ et

$$\deg(2X P') \leq 1 + (\deg P - 1) \leq n$$

Puisque $u(P)$ est la somme de ces deux polynômes et de P , on en déduit $u(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.
Donc

Pour $n \in \mathbb{N}$, le sous-espace $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par u .

26 Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on a

$$v \circ w(P) = v(P') = 2X P' - P'' = u(P) - P$$

et

$$w \circ v(P) = w(2X P - P') = 2P + 2X P' - P'' = P + u(P)$$

Donc

$$v \circ w = u - \text{Id} \quad \text{et} \quad w \circ v = u + \text{Id}$$

27 On déduit du résultat précédent que $u = v \circ w + \text{Id}$, ce qui entraîne

$$u \circ v = v \circ w \circ v + v = v \circ (u + \text{Id}) + v = v \circ u + 2v$$

d'où

$$u \circ v - v \circ u = 2v$$

28 Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $u(P) = \lambda P$. Alors, d'après la question 27,

$$\begin{aligned} u(v(P)) &= v(u(P)) + 2v(P) \\ &= v(\lambda P) + 2v(P) \end{aligned}$$

$$u(v(P)) = (\lambda + 2) v(P)$$

29 Montrons par récurrence que la propriété

$$\mathcal{P}(k) : \quad u(H_k) = (2k + 1) H_k$$

est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$.

- $\mathcal{P}(0)$: $H_0 = 1$ et $u(1) = -0 + 2X \cdot 0 + 1 = 1$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- $\mathcal{P}(k) \implies \mathcal{P}(k+1)$: soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Alors, d'après la question 15, $H_{k+1} = 2X H_k - H'_k = v(H_k)$, d'où, en utilisant la question 28

$$\begin{aligned} u(H_{k+1}) &= u(v(H_k)) \\ &= (2k + 1 + 2) v(H_k) \\ u(H_{k+1}) &= (2(k + 1) + 1) H_{k+1} \end{aligned}$$

On obtient bien que $\mathcal{P}(k + 1)$ est vraie.

- Conclusion :

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, H_k est un vecteur propre de u associé à la valeur propre $2k + 1$.

30 On sait, d'après la question 22, que $(H_0, \dots, H_n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Cette base est constituée de vecteurs propres de u d'après la question précédente, donc de vecteurs propres de u_n . Ainsi,

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'endomorphisme u_n est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

31 Soient $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. On a

$$\begin{aligned} \langle P', Q' \rangle &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} P'(x) Q'(x) e^{-x^2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[Q(x) P'(x) e^{-x^2} \right]_{-\infty}^{+\infty} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} Q(x) (P''(x) - 2x P'(x)) e^{-x^2} dx \end{aligned}$$

où l'intégration par parties est justifiée par le caractère $\mathcal{C}^1$ de toutes les fonctions considérées, et puisque par croissance comparée,

$$Q(x) P'(x) e^{-x^2} \xrightarrow{x \rightarrow \pm \infty} 0$$

Ainsi,

$$\langle P', Q' \rangle = \langle -P'' + 2X P', Q \rangle$$

d'où

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}[X] \quad \langle P', Q' \rangle = \langle u(P), Q \rangle - \langle P, Q \rangle$$

32 Pour $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, d'après le résultat précédent,

$$\begin{aligned} \langle u(P), Q \rangle &= \langle P', Q' \rangle + \langle P, Q \rangle \\ &= \langle Q', P' \rangle + \langle Q, P \rangle && \text{(par symétrie)} \\ \langle u(P), Q \rangle &= \langle P, u(Q) \rangle \end{aligned}$$

Par conséquent, $\langle u_n(P), Q \rangle = \langle P, u_n(Q) \rangle$ pour tous $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$, c'est-à-dire que

L'endomorphisme u_n est autoadjoint.

33 D'après le résultat précédent, on peut appliquer le théorème spectral à u_n . Ainsi,

L'endomorphisme u_n est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ dans une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ formée de vecteurs propres de u_n .

34 Puisque $(H_0, \dots, H_n)$ forme une base propre orthogonale pour u_n d'après la question 30, il suffit de normaliser chaque vecteur. D'après la question 24, $\|H_k\| = \sqrt{2^k k!}$ pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Par conséquent,

La base $(H_k / \sqrt{2^k k!})_{0 \leq k \leq n}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ constituée de vecteurs propres de u_n .

IV. UNE FAMILLE TOTALE

35 | L'énoncé comporte une coquille inoffensive : au lieu de « $\xi \in E$ », il faut lire « $f \in E$ ».

Comme suggéré dans l'énoncé, écrivons

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \quad f(x) e^{-i x \xi} e^{-x^2} = f(x) e^{-x^2/2} e^{-i x \xi} e^{-x^2/2}$$

d'où, par l'inégalité $ab \leq (a^2 + b^2)/2$ et l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} \left| f(x) e^{-i x \xi} e^{-x^2} \right| &\leq \frac{1}{2} \left(f(x)^2 e^{-x^2} + |e^{-i x \xi}|^2 e^{-x^2} \right) \\ &\leq \frac{1}{2} \left(f(x)^2 e^{-x^2} + e^{-x^2} \right) \end{aligned}$$

Puisque $f \in E$, et d'après la question 8, les intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)^2 e^{-x^2} dx \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

convergent. Ainsi, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| f(x) e^{-i x \xi} e^{-x^2} \right| dx$$

converge également. En conclusion,

Pour tous $\xi \in \mathbb{R}$ et $f \in E$, la fonction $x \mapsto f(x) e^{-i x \xi} e^{-x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

36 | Par croissance comparée, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$x^{2p} e^{-x^2} = o_{x \rightarrow \pm \infty} \left(\frac{1}{x^2} \right)$$

Comme précédemment, par comparaison avec une intégrale de Riemann convergente en $+\infty$ et en $-\infty$,

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^{2p} e^{-x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

De plus, si $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} M_{p+1} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2p+1} x e^{-x^2} dx \\ &= \left[x^{2p+1} \left(-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right) \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} (2p+1) x^{2p} \left(-\frac{1}{2} e^{-x^2} \right) dx \end{aligned}$$

en intégrant par parties. Comme précédemment, l'intégration par parties est justifiée par le fait que le terme entre crochets tend vers 0 en $\pm \infty$ par croissance comparée. Par conséquent,

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad M_{p+1} = \left(p + \frac{1}{2} \right) M_p$$

De plus, d'après la question 8,

$$M_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

On en déduit par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} M_p &= \sqrt{\pi} \prod_{k=0}^{p-1} \left(k + \frac{1}{2}\right) \\ &= \sqrt{\pi} \prod_{k=0}^{p-1} \frac{2k+1}{2} \\ &= \sqrt{\pi} \prod_{k=0}^{p-1} \frac{(2k+1)(2k+2)}{4(k+1)} \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N} \quad M_p = \sqrt{\pi} \frac{(2p)!}{4^p p!}}$$

37 Développons $e^{-ix\xi}$ en série entière dans l'intégrale : pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-i)^n \xi^n x^n}{n!} \right) e^{-x^2} dx$$

donc

$$\boxed{\forall \xi \in \mathbb{R} \quad \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f(x) e^{-x^2} \frac{(-i)^n \xi^n x^n}{n!} dx}$$

38 Soit $\xi \in \mathbb{R}$. Vérifions les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme.

- La fonction

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f(x) e^{-x^2} \frac{(-i)^n \xi^n x^n}{n!} = f(x) e^{-ix\xi} e^{-x^2}$$

est continue sur $\mathbb{R}$ par produit de fonctions continues.

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction

$$x \mapsto f(x) e^{-x^2} \frac{(-i)^n \xi^n x^n}{n!}$$

est continue et intégrable sur $\mathbb{R}$, puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \left| f(x) e^{-x^2} \frac{(-i)^n \xi^n x^n}{n!} \right| &= \frac{|\xi|^n}{n!} \left| f(x) e^{-x^2/2} x^n e^{-x^2/2} \right| \\ &\leq \frac{|\xi|^n}{2n!} \left(f(x)^2 e^{-x^2} + x^{2n} e^{-x^2} \right) \end{aligned}$$

et nous avons déjà montré que les deux termes de droite sont intégrables sur $\mathbb{R}$.

- Enfin, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| f(x) e^{-x^2} \frac{(-i)^n \xi^n x^n}{n!} \right| dx &= \frac{|\xi|^n}{n!} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| f(x) e^{-x^2/2} \times x^n e^{-x^2/2} \right| dx \\ &\leq \frac{|\xi|^n}{n!} \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)^2 e^{-x^2} dx} \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx} \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, soit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left| f(x) e^{-x^2} \frac{(-i)^n \xi^n x^n}{n!} \right| dx \leq \frac{|\xi|^n}{n!} \|f\| \sqrt{M_n}$$

Posons
$$v_n = \frac{|\xi|^n}{n!} \|f\| \sqrt{M_n}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il suffit donc de montrer que la série $\sum v_n$ converge. Si $\xi = 0$ ou f est la fonction nulle, le résultat est immédiat. Sinon, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n \neq 0$ et on constate que

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{|\xi|^{n+1} n! \|f\| \sqrt{M_{n+1}}}{|\xi|^n (n+1)! \|f\| \sqrt{M_n}} = \frac{\xi}{n} \sqrt{\frac{M_{n+1}}{M_n}} = \frac{|\xi|}{n} \sqrt{n + \frac{1}{2}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{|\xi|}{\sqrt{n}}$$

et que cette dernière expression tend vers $0 < 1$ quand n tend vers $+\infty$. Par conséquent, d'après le critère de d'Alembert, la série

$$\sum \frac{|\xi|^n}{n!} \|f\| \sqrt{M_n}$$

converge, et d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série suivante converge également :

$$\sum \int_{-\infty}^{+\infty} \left| f(x) e^{-x^2} \frac{(-i)^n \xi^n x^n}{n!} \right| dx$$

On peut donc appliquer le théorème d'intégration terme à terme, ce qui donne, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) x^n e^{-x^2} dx \right) \frac{(-i)^n \xi^n}{n!}$$

Par conséquent, $\mathcal{F}(f)$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

39 On a montré à la question 22 que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(H_0, \dots, H_n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$. En particulier, $X^n \in \mathbb{R}_n[X] = \text{Vect}(H_0, \dots, H_n)$, donc f est orthogonale à X^n , c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x) e^{-x^2} dx = 0$$

40 Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, les formules obtenues aux questions 38 et 39 donnent

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) x^n e^{-x^2} dx \right) \frac{(-i)^n \xi^n}{n!} = 0$$

Autrement dit, $\mathcal{F}(f)$ est la fonction nulle.

41 Puisque $\mathcal{F}$ est une application linéaire injective, $\text{Ker } \mathcal{F} = \{0\}$. On vient cependant de montrer que $f \in \text{Ker } \mathcal{F}$, donc $f = 0$. On en déduit que

$$(\text{Vect}(H_n, n \in \mathbb{N}))^\perp = \{0\}$$

c'est-à-dire La famille $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de E .