

A. FONCTION D'EXCLUSION ASSOCIÉE À UN POLYNÔME

A.1 L'application $M_x : t \mapsto M(x, t)$ est une application polynomiale. Elle est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $t \geq 0$,

$$M'_x(t) = - \sum_{k=1}^n \frac{|P^{(k)}(x)|}{(k-1)!} t^{k-1}$$

Les termes intervenant dans cette somme sont tous négatifs donc cette quantité est négative. La fonction M_x est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Remarquons de plus que puisque P est de degré n et de coefficient dominant a_n , le coefficient du terme t^{n-1} de la somme est égal à $-P^{(n)}(x)/(n-1)!$ soit $-n a_n \neq 0$. Ceci prouve que M'_x n'est pas l'application polynomiale nulle. Elle n'a donc qu'un nombre fini de racines, et ne peut notamment pas s'annuler sur tout un intervalle non réduit à un point. On peut ainsi affirmer que

Pour tout réel x , l'application $t \mapsto M(x, t)$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Par définition, $M_x(0) = |P(x)| \geq 0$. De plus, M_x est une application polynomiale de coefficient dominant $-P^{(n)}(x)/n!$ soit $-a_n$ strictement négatif. Il s'ensuit que M_x a une limite nulle égale à $-\infty$ en $+\infty$. La continuité de cette fonction et le théorème des valeurs intermédiaires assure qu'elle s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}_+$. La décroissance stricte assure l'unicité du point d'annulation.

Pour tout réel x , l'application $t \mapsto M(x, t)$ s'annule en un unique point sur $\mathbb{R}_+$.

A.2 Par définition de P et de M , pour tous $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$,

$$M(x, t) = |x^2 - 1| - |2x| t - t^2$$

Le discriminant de cette quantité, vue comme un polynôme en t , est donné par

$$\Delta = 4x^2 + 4|x^2 - 1|$$

Ce dernier est strictement positif car les termes positifs x^2 et $|x^2 - 1|$ ne peuvent s'annuler simultanément. L'application $t \mapsto M(x, t)$ s'annule donc en deux points sur $\mathbb{R}$, en

$$t_1 = \frac{-1}{2} \left(|2x| + \sqrt{4x^2 + 4|x^2 - 1|} \right) \quad \text{et} \quad t_2 = \frac{-1}{2} \left(|2x| - \sqrt{4x^2 + 4|x^2 - 1|} \right)$$

Le réel $m(x)$ est l'unique valeur positive parmi ces deux racines, soit après simplifications

$$m(x) = -|x| + \sqrt{x^2 + |x^2 - 1|}$$

Cette fonction coïncide localement avec les fonctions suivantes :

- $x \mapsto x + \sqrt{2x^2 - 1}$ sur $] -\infty; -1]$
- $x \mapsto x + 1$ sur $[-1; 0]$
- $x \mapsto 1 - x$ sur $[0; 1]$
- et enfin $x \mapsto -x + \sqrt{2x^2 - 1}$ sur $[1; +\infty[$.

Ces quatre fonctions étant chacune de classe $\mathcal{C}^1$ sur les intervalles sur lesquelles elles coïncident avec m , on en déduit aussitôt que

La fonction m est continue sur $\mathbb{R}$ mais dérivable seulement sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$. Elle est en revanche dérivable à gauche et à droite en les points -1 , 0 et 1 .

A.3 Supposons $P(x)$ nul. L'application $t \mapsto M(x, t)$ est alors nulle en 0, ce qui assure par définition de $m(x)$ que $m(x) = 0$. Réciproquement, en vertu de la relation (1) donnée par l'énoncé, on a les égalités

$$|P(x)| = m(x) \sum_{k=1}^n \frac{|P^{(k)}(x)|}{k!} m(x)^{k-1}$$

Si $m(x)$ est nul, on en déduit aussitôt que $P(x)$ est nul également.

Le réel $m(x)$ est nul si et seulement si $P(x)$ est nul.

A.4 D'après l'égalité de Taylor-Lagrange, le polynôme P étant de degré n , il vient pour tous $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$P(y) = P(x) + \sum_{k=1}^n \frac{P^{(k)}(x)}{k!} (y-x)^k$$

L'inégalité triangulaire permet aussitôt d'obtenir la minoration souhaitée

$$|P(y)| \geq |P(x)| - \sum_{k=1}^n \frac{|P^{(k)}(x)|}{k!} |y-x|^k$$

Finalement,

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |P(y)| \geq M(x, |y-x|)$$

Soit maintenant x tel que $P(x)$ est non nul et y tel que $|y-x| < m(x)$. Puisque $M(x, m(x)) = 0$, il vient

$$\begin{aligned} M(x, |y-x|) &= M(x, |y-x|) - M(x, m(x)) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{|P^{(k)}(x)|}{k!} \left[m(x)^k - |y-x|^k \right] \end{aligned}$$

Puisque $0 \leq |y-x| < m(x)$, la somme ci-dessus est une somme de termes positifs et celui d'indice n est à nouveau strictement positif. Par suite, $M(x, |y-x|) > 0$ et la minoration précédente justifie que $P(y)$ est non nul. Pour conclure,

Si x est un réel tel que $P(x)$ est non nul, alors P n'a pas de racine dans l'intervalle $]x - m(x); x + m(x)[$.

A.5 Soit x un réel. Si x est un élément de Z , d'une part $d(x, Z) = 0$, d'autre part $P(x) = 0$ par définition de Z . Il vient que $m(x)$ est nul d'après la question A.3. L'inégalité $m(x) \leq d(x, Z)$ est donc satisfaite.

Supposons maintenant $x \notin Z$. Cette fois, $P(x)$ est non nul ce qui permet d'appliquer le résultat de la question précédente : le polynôme P n'a pas de racines dans $]x - m(x); x + m(x)[$. En d'autres termes, Z ne contient aucun élément dans cet intervalle, et donc

$$\forall z \in Z, \quad |x-z| \geq m(x)$$

d'où en passant au min $d(x, Z) \geq m(x)$

Finalement, on a justifié l'inégalité dans tous les cas.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad m(x) \leq d(x, Z)$$

A.6.1 L'application $t \mapsto M(x, t)$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et s'annule au point $m(x)$. En vertu des inégalités $0 \leq m(x) - \varepsilon < m(x) < m(x) + \varepsilon$, il s'en déduit que

$$M(x, m(x) + \varepsilon) < 0 < M(x, m(x) - \varepsilon)$$

Remarquons ensuite qu'à t fixé, l'application $x \mapsto M(x, t)$ est continue sur $\mathbb{R}$, puisque les applications polynomiales et la valeur absolue sont continues. Appliquons cette continuité au point x pour $t_1 = m(x) + \varepsilon$. Puisque $M(x, m(x) + \varepsilon)$ est strictement négatif, on sait que

$$\exists \eta_1 > 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad |y - x| < \eta_1 \implies M(y, m(x) + \varepsilon) < 0$$

De la même manière, sachant que $M(x, m(x) - \varepsilon) > 0$, il vient en travaillant au point x avec $t_2 = m(x) - \varepsilon$,

$$\exists \eta_2 > 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad |y - x| < \eta_2 \implies M(y, m(x) - \varepsilon) > 0$$

Finalement, en posant $\eta = \min \{\eta_1, \eta_2\}$, on obtient le résultat attendu.

$$\exists \eta > 0 \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad |x - y| < \eta \implies M(y, m(x) + \varepsilon) < 0 < M(y, m(x) - \varepsilon)$$

A.6.2 La démonstration est identique à celle de la question précédente (il n'y a qu'à omettre le traitement de t_2).

$$\exists \eta > 0 \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad |x - y| < \eta \implies M(y, m(x) + \varepsilon) < 0$$

A.6.3 Fixons $y \in \mathbb{R}$ et supposons $|x - y| < \eta$. Distinguons les deux cas des deux questions précédentes.

- si $m(x) > \varepsilon$, alors d'après la question A.6.1, il vient $M(y, m(x) + \varepsilon) < 0$ et $M(y, m(x) - \varepsilon) > 0$. Or, l'application $t \mapsto M(y, t)$ est strictement décroissante et $m(y)$ est par définition l'unique point en lequel elle s'annule. Ces deux inégalités assurent donc que $m(y)$ est compris entre $m(x) - \varepsilon$ et $m(x) + \varepsilon$.
- si $m(x) \leq \varepsilon$, le résultat de la question A.6.2 assure par un raisonnement identique que $m(y)$ est inférieur à $m(x) + \varepsilon$. Puisqu'il est positif, il est également supérieur à la quantité négative $m(x) - \varepsilon$.

Dans les deux cas, on a justifié l'encadrement $m(x) - \varepsilon \leq m(y) \leq m(x) + \varepsilon$. Les résultats établis dans cette question 6 se résument finalement à l'énoncé suivant

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad |x - y| \leq \eta \implies |m(x) - m(y)| \leq \varepsilon$$

Il s'agit exactement de la définition de la continuité de m en tout point x de $\mathbb{R}$. Par conséquent,

$$\boxed{\text{La fonction } m \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

A.7.1 En appliquant la relation (1) aux points x et $x+h$, il vient les deux égalités

$$|P(x+h)| - \sum_{k=1}^n \frac{|P^{(k)}(x+h)|}{k!} m(x+h)^k = 0$$

et

$$|P(x)| - \sum_{k=1}^n \frac{|P^{(k)}(x)|}{k!} m(x)^k = 0$$

Soustrayons ces deux égalités et divisons le résultat par $h \neq 0$. Il vient

$$\frac{|P(x+h)| - |P(x)|}{h} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{h k!} [|P^{(k)}(x+h)| m(x+h)^k - |P^{(k)}(x)| m(x)^k] = 0$$

Il ne reste plus qu'à réécrire le terme entre crochet dans la somme de la manière suivante :

$$\begin{aligned} & |P^{(k)}(x+h)| m(x+h)^k - |P^{(k)}(x)| m(x)^k \\ &= [|P^{(k)}(x+h)| m(x+h)^k - |P^{(k)}(x+h)| m(x)^k] \\ &\quad + [|P^{(k)}(x+h)| m(x)^k - |P^{(k)}(x)| m(x)^k] \\ &= |P^{(k)}(x+h)| (m(x+h)^k - m(x)^k) \\ &\quad + m(x)^k (|P^{(k)}(x+h)| - |P^{(k)}(x)|) \end{aligned}$$

ce qui donne aussitôt l'égalité souhaitée

$$\boxed{\begin{aligned} & \frac{|P(x+h)| - |P(x)|}{h} - \sum_{k=1}^n |P^{(k)}(x+h)| \frac{m(x+h)^k - m(x)^k}{h k!} \\ & - \sum_{k=1}^n \frac{|P^{(k)}(x+h)| - |P^{(k)}(x)|}{h k!} m(x)^k = 0 \end{aligned}}$$

A.7.2 Pour tous réels α et β , et tout entier k , on a la factorisation

$$\begin{aligned} \alpha^k - \beta^k &= (\alpha - \beta)(\alpha^{k-1} + \alpha^{k-2}\beta + \dots + \alpha\beta^{k-2} + \beta^{k-1}) \\ &= (\alpha - \beta) \sum_{p=0}^{k-1} \alpha^{k-1-p} \beta^p \end{aligned}$$

En utilisant cette relation dans l'égalité précédente, la première somme se réécrit

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n |P^{(k)}(x+h)| \frac{m(x+h)^k - m(x)^k}{h k!} = \\ & \frac{m(x+h) - m(x)}{h} \times \left(\sum_{k=1}^n \frac{|P^{(k)}(x+h)|}{k!} \sum_{p=0}^{k-1} m(x+h)^{k-1-p} m(x)^p \right) \end{aligned}$$

Notons $G(x, x+h)$ la quantité entre parenthèses dans l'expression ci-dessus. Toutes les fonctions intervenant dans ce terme, que ce soit la fonction m , les applications polynomiales ou la valeur absolue, sont des fonctions continues. $G(x, x+h)$ admet donc une limite lorsque h tend vers 0, plus précisément

$$\begin{aligned}
G(x, x+h) &= \sum_{k=1}^n \frac{|P^{(k)}(x+h)|}{k!} \sum_{p=0}^{k-1} m(x+h)^{k-1-p} m(x)^p \\
&\xrightarrow{h \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \frac{|P^{(k)}(x)|}{k!} \sum_{p=0}^{k-1} m(x)^{k-1-p} m(x)^p \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{|P^{(k)}(x)|}{k!} (km(x)^{k-1}) \\
G(x, x+h) &\xrightarrow{h \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \frac{|P^{(k)}(x)|}{(k-1)!} m(x)^{k-1} \quad (\mathbf{a})
\end{aligned}$$

Remarquons enfin que pour tout réel x satisfaisant les conditions de l'énoncé, cette limite est strictement positive. En particulier, l'inverse de $G(x, x+h)$ est bien définie pour h suffisamment petit.

Pour simplifier l'écriture des égalités, on note dans la suite $\Delta_f(a, b)$ le taux d'accroissement d'une fonction f entre a et b :

$$\Delta_f(a, b) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$$

Le taux d'accroissement de la fonction m entre les points x et $x+h$ peut s'écrire d'après ce qui précède pour h proche de 0

$$\Delta_m(x, x+h) = \frac{1}{G(x, x+h)} \left(\Delta_{|P|}(x, x+h) - \sum_{k=1}^n \frac{m(x)^k}{k!} \Delta_{|P^{(k)}|}(x, x+h) \right) \quad (\mathbf{b})$$

La fonction valeur absolue est dérivable en tout point de $\mathbb{R}^*$ et la dérivée en un point t de $\mathbb{R}^*$ de cette fonction est égale au signe de t . L'hypothèse faite dans cette question assure donc par composition la dérivabilité en x de toutes les fonctions $|P|, \dots, |P^{(n)}|$. En d'autre termes, quel que soit $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, la quantité $\Delta_{|P^{(k)}|}(x, x+h)$ a une limite lorsque h tend vers 0, et par dérivation des fonctions composées

$$\lim_{h \rightarrow 0} \Delta_{|P^{(k)}|}(x, x+h) = P^{(k+1)}(x) \operatorname{signe}(P^{(k)}(x))$$

Le taux d'accroissement de m entre x et $x+h$ a donc bien une limite lorsque h tend vers 0, et un passage à la limite dans (b) donne l'égalité

$$m'(x) = \frac{P'(x) \operatorname{signe}(P(x)) - \sum_{k=1}^n P^{(k+1)}(x) \operatorname{signe}(P^{(k)}(x)) m(x)^k / k!}{\sum_{k=1}^n |P^{(k)}(x)| m(x)^{k-1} / (k-1)!}$$

Il ne reste plus qu'à remarquer que le terme d'indice n est nul (puisque $P^{(n+1)} = 0$) et à effectuer un changement d'indice pour obtenir la formule de l'énoncé.

Si x est un réel tel que $P^{(k)}(x)$ est non nul pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, alors m est dérivable en x et

$$m'(x) = \frac{P'(x) \operatorname{signe}(P(x)) - \sum_{k=2}^n P^{(k)}(x) \operatorname{signe}(P^{(k-1)}(x)) m(x)^{k-1} / (k-1)!}{\sum_{k=1}^n |P^{(k)}(x)| m(x)^{k-1} / (k-1)!}$$

A.7.3 S'il existe un entier k tel que $P(x)$ est non nul et $P^{(k)}(x)$ est nul, la raisonnement précédent ne fonctionne plus car la valeur absolue n'est pas une fonction

dérivable en 0. En revanche, puisque qu'elle est dérivable à gauche et à droite en ce point, on peut reprendre le raisonnement précédent en faisant tendre h vers 0 par valeurs supérieure (resp. inférieure).

La quantité $G(x, x+h)$ a à nouveau une limite non nulle quand h tend vers 0 ; l'hypothèse $P(x) \neq 0$ assure $m(x) > 0$ et le dernier terme de la somme de l'égalité (a) est alors strictement positif. L'égalité (b) est à nouveau valide pour h au voisinage de 0 et le terme de droite a d'après ce qui précède une limite finie lorsque $h \rightarrow 0^+$ ou $h \rightarrow 0^-$. Finalement, m est dérivable à gauche et à droite en x .

Pour justifier que m n'est pas nécessairement dérivable en x , il suffit de considérer l'exemple de la question A.2. Le réel 0 satisfait les conditions $P(0) \neq 0$ et $P'(0) = 0$. La fonction m est dérivable à gauche et à droite en 0, mais elle n'est pas dérivable en 0 (elle coïncide avec $x \mapsto 1 - |x|$ au voisinage de ce point).

Si x est tel que $P(x)$ est non nul, mais qu'il existe un entier $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$ tel que $P^{(k)}(x) = 0$, alors m est dérivable à gauche et à droite en x , mais pas nécessairement dérivable en x .

A.7.4 Si x est une racine de P , elle est nécessairement simple. Par suite, $P(x) = 0$ et $P'(x) \neq 0$. La question A.3 permet d'affirmer que $m(x) = 0$. La relation (a) reste valide et cette fois, la limite lorsque h tend vers 0 de $G(x, x+h)$ est égale au premier terme de la somme, soit $|P'(x)|$. Cette limite étant non nulle, l'égalité (b) est à nouveau valide pour h suffisamment proche de 0 et, s'écrit cette fois

$$\frac{m(x+h) - m(x)}{h} = \frac{1}{G(x, x+h)} \frac{|P(x+h)|}{h}$$

Un développement limité au premier ordre de $P(x+h)$ assure que $P(x+h) \sim P'(x)h$ et donc

$$\frac{m(x+h) - m(x)}{h} \underset{h \rightarrow 0}{\sim} \frac{|h|}{h}$$

ce qui prouve que la fonction taux d'accroissement a des limites à gauche et à droite en 0, égales respectivement à -1 et 1 . On peut donc conclure :

La fonction est dérivable à gauche et à droite en toute racine de P .

A.8 Soit $x < y$ deux réels. Supposons dans un premier temps que m est dérivable sur l'intervalle $]x; y[$. Puisque m est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur $[x; y]$, le théorème des accroissements finis s'applique et donne l'existence d'un réel $\alpha \in]x; y[$ tel que

$$m(y) - m(x) = m'(\alpha)(y - x)$$

Il nous suffit maintenant de montrer que $|m'(\alpha)|$ est inférieure à 1 pour conclure. D'après la formule obtenue à la question A.7.2, en utilisant l'inégalité triangulaire et en remarquant que *signe* est à valeur dans $\{-1, 1\}$, il vient

$$\begin{aligned} |m'(\alpha)| &= \left| \frac{P'(x) \text{signe}(P(x) - \sum_{k=2}^n P^{(k)}(x) \text{signe}(P^{(k-1)}(x)) m(x)^{k-1}/(k-1)!) }{\sum_{k=1}^n |P^{(k)}(x)| m(x)^{k-1}/(k-1)!} \right| \\ &\leq \frac{|P'(x)| + \sum_{k=2}^n |P^{(k)}(x)| m(x)^{k-1}/(k-1)!}{\sum_{k=1}^n |P^{(k)}(x)| m(x)^{k-1}/(k-1)!} = 1 \end{aligned}$$

Cette majoration assure finalement que

$$|m(y) - m(x)| = |m'(\alpha)| |y - x| \leq |y - x|$$

Passons maintenant au cas général. Notons Z^∞ la réunion des racines des polynômes $P, P', \dots, P^{(n)}$. Puisqu'un polynôme n'a qu'un nombre fini de racines, l'ensemble Z^∞ est un ensemble fini. Soit maintenant $x < y$ deux réels quelconques. On note $z_1 < z_2 < \dots < z_p$ les éléments de $[x; y] \cap Z^\infty$ et on pose par convention $z_0 = x$ et $z_{p+1} = y$. Le résultat de la question A.7.2 prouve que m est dérivable en tout point de $\mathbb{R} \setminus Z^\infty$, donc en particulier sur chacun des intervalles $]z_0; z_1[, \dots,]z_p; z_{p+1}[$. On peut donc appliquer le résultat obtenu dans la première partie de cette question, ce qui prouve que

$$\forall i \in \llbracket 0; p \rrbracket \quad |m(z_{i+1}) - m(z_i)| \leq |z_{i+1} - z_i| = z_{i+1} - z_i$$

Il ne reste plus alors qu'à écrire $m(x) - m(y)$ sous forme d'une somme télescopique et utiliser l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} |m(x) - m(y)| &= \left| \sum_{i=0}^p m(z_{i+1}) - m(z_i) \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^p |m(z_{i+1}) - m(z_i)| \\ &\leq \sum_{i=0}^p (z_{i+1} - z_i) \\ &= z_{p+1} - z_0 \\ |m(x) - m(y)| &\leq y - x \end{aligned}$$

Finalement, on a démontré que

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad |m(x) - m(y)| \leq |y - x|$$

A.9.1 Le polynôme P est de degré n et de coefficient dominant a_n . Il s'ensuit que pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $P^{(k)}$ est de degré $n - k$ et de coefficient dominant $n(n-1) \cdots (n-k+1)a_n$. Par suite,

$$\frac{|P^{(k)}(x)|}{|x|^{n-k}} \xrightarrow{x \rightarrow \pm \infty} n(n-1)(n-k+1)|a_n| = \frac{n!}{(n-k)!} |a_n|$$

En divisant l'égalité (1) par $|x|^n$, on obtient

$$\frac{|P(x)|}{|x|^n} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \frac{|P^{(k)}(x)|}{|x|^{n-k}} \frac{m(x)^k}{|x|^k} = 0$$

En faisant tendre x vers $+\infty$ et $-\infty$ et en divisant par $|a_n|$ qui est non nul, on obtient aussitôt les formules souhaitées.

$$1 - \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} (m_-)^k = 1 - \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} (m_+)^k = 0$$

A.9.2 Les deux égalités précédentes peuvent se mettre sous la forme

$$2 - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (m_-)^k = 2 - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (m_+)^k = 0$$

soit à l'aide de la formule du binôme,

$$(1 + m_-)^n = (1 + m_+)^n = 2$$

Puisque m_+ et m_- sont deux réels positifs, il s'en déduit que

$$m_+ = m_- = 2^{1/n} - 1$$

A.10 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{matrix} m(x)/d(x, Z) & \text{si } x \notin Z \\ 1 & \text{sinon} \end{matrix} \end{cases}$$

Justifions que cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$.

On sait que m est une application continue. Si l'on note $x_1 < \dots < x_p$ les éléments de Z , alors pour tout réel x ,

$$d(x, Z) = \min \{|x - x_1|, \dots, |x - x_p|\}$$

Pour justifier la continuité de l'application d , il suffit alors de remarquer que

- si g et h sont deux fonctions continues, $\min(g, h)$ est également continue car

$$\min(g, h) = \frac{1}{2}(g + h - |g - h|)$$

- si $f_1, \dots, f_n$ sont des fonctions quelconques, alors

$$\min(f_1, \dots, f_n) = \min(\min(f_1, \dots, f_{n-1}), f_n)$$

Une récurrence immédiate assure dès lors la continuité de $x \mapsto d(x, Z)$. Ceci assure que f est continue sur $\mathbb{R} \setminus Z$ en tant que quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

Soit maintenant $k \in \llbracket 1; p \rrbracket$. Étudions la continuité au point x_k . Pour x au voisinage de x_k , on a l'égalité $d(x, Z) = |x - x_k|$ (car x_k est l'élément de Z le plus proche de x). De plus, $m(x_k)$ est nul car $P(x_k) = 0$. Par conséquent, au voisinage de x_k ,

$$f(x) = \frac{m(x)}{d(x, Z)} = \frac{m(x) - m(x_k)}{|x - x_k|}$$

L'équivalent de la question A.7.4 assure alors que cette quantité a une limite à gauche et à droite égale à 1, ce qui correspond bien à $f(x_k)$. Ainsi, cette fonction est continue en x_k . Ceci étant vrai quel que soit l'élément x_k de Z ,

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est continue sur } \mathbb{R}.}$$

Il faut maintenant justifier que f est minorée par une constante strictement positive. Dans un premier temps, posons $\beta_n = (2^{1/n} - 1)/2$. Pour $x > x_p$, on a $d(x, Z) = |x - x_p|$ d'où

$$f(x) = \frac{m(x)}{|x - x_p|} = \frac{m(x)}{|x|} \frac{1}{|1 - (x_p/x)|} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 2^{1/n} - 1$$

Ceci assure l'existence de $A_+ \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x \geq A_+ \implies f(x) \geq \beta_n$$

De la même manière, on justifie l'existence d'un réel $A_- \in \mathbb{R}_-$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x \leq A_- \implies f(x) \geq \beta_n$$

La fonction f est continue sur $[A_-, A_+]$; elle est donc bornée et atteint ses bornes sur cet intervalle. Notons γ_n son minimum et α le point en lequel cette valeur est

atteinte. Si $\alpha \in \mathbb{Z}$, alors $f(\alpha) = \gamma_n = 1$. Sinon, $f(\alpha) = m(\alpha)/d(\alpha, \mathbb{Z}) > 0$. Dans tous les cas, γ_n est un réel strictement positif et par définition,

$$\forall x \in [A_-, A_+] \quad f(x) \geq \gamma_n$$

Finalement, en posant $\alpha_n = \min \{\beta_n, \gamma_n\}$, on a le résultat attendu :

$$\boxed{\exists \alpha_n > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \alpha_n d(x, \mathbb{Z}) \leq m(x)}$$

Attention ! Contrairement à ce que la notation laisse supposer, le réel α_n ci-dessus ne dépend pas que de n : il dépend (tout comme la fonction m) également du polynôme P .

On pourrait se demander s'il existe une constante ne dépendant que de n et vérifiant cette inégalité quel que soit le polynôme P . Mais ce ne semble pas être ce qui est demandé par l'énoncé et la réponse paraît bien plus délicate à trouver (personnellement, je n'en ai aucune idée).

B. DÉTERMINATION D'UN INTERVALLE DE $\mathbb{R}$ CONTENANT TOUTES LES RACINES DE P .

B.1 Montrons par récurrence que le prédicat suivant est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$\mathcal{P}(n)$: Tout polynôme de la forme $a_n X^n - a_{n-1} X^{n-1} - \dots - a_0$ avec $a_n > 0$ et $a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{R}_+$ et non tous nuls s'annule exactement une fois sur $\mathbb{R}_+^*$.

- $\mathcal{P}(1)$ est vrai car tout polynôme de la forme $aX - b$ avec $a, b > 0$ s'annule en b/a et seulement en ce point sur $\mathbb{R}$ (donc sur $\mathbb{R}_+^*$).
- $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$: Soit $n \geq 1$, $a_{n+1} > 0$ et $a_n, \dots, a_0$ des réels positifs et non tous nuls. On note

$$P(x) = a_{n+1}x^{n+1} - a_n x^n - \dots - a_0$$

Lorsque a_0 est le seul coefficient non nul parmi $a_0, \dots, a_n$, le résultat est évident car le polynôme $a_{n+1}X^{n+1} - a_0$ ne s'annule qu'en $(a_0/a_{n+1})^{1/(n+1)}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Sinon, le polynôme P' s'écrit

$$P'(x) = (n+1)a_{n+1}x^n - na_n x^{n-1} - \dots - a_1$$

avec $(n+1)a_{n+1} > 0$ et $a_1, 2a_2, \dots, na_n$ non tous nuls. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(n)$, ce qui assure que ce dernier s'annule exactement une fois sur $\mathbb{R}_+^*$, en un point noté $\delta > 0$.

Il est clair que $P'(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. En particulier, P' est positif au voisinage de $+\infty$. Au voisinage de 0, l'hypothèse $a_1, 2a_2, \dots, na_n$ non tous nuls assure l'existence d'un entier $p \geq 1$ tel que $p a_p \neq 0$, et on a alors l'équivalent

$$P'(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -p_0 a_{p_0} x^{p_0}$$

où p_0 est le plus petit entier p tel que $a_p \neq 0$. Cet équivalent prouve que $P'(x)$ est strictement négatif pour x suffisamment proche de 0^+ . Le polynôme P a donc un tableau de variation de la forme

x	0	δ	$+\infty$	
$P'(x)$	—	0	+	
$P(x)$	$- a_0 $	$\nearrow$ $P(\delta)$ $\searrow$		$+\infty$

Puisque $-|a_0| \leq 0$, ce tableau de variation ainsi que le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence et l'unicité d'un point de $\mathbb{R}_+^*$ en lequel P s'annule. Finalement, $\mathcal{P}(n+1)$ est vrai.

Conclusion : $\forall n \geq 1 \quad \mathcal{P}(n)$ est vrai.

Le résultat à prouver n'est qu'un cas particulier de ce qui vient d'être justifié. Ainsi,

Il existe un unique réel strictement positif pour lequel Q s'annule.

S'il n'y avait que l'existence d'une racine strictement positive à démontrer, on aurait pu se passer d'une démonstration par récurrence et se contenter d'une application du théorème des valeurs intermédiaires.

B.2 Notons δ l'unique racine de Q strictement positive. Soit x une racine de P telle que $x_0 = |x|$. Alors

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$$

soit

$$x^n = -a_{n-1}x^{n-1} - \dots - a_1x - a_0$$

puis en utilisant l'inégalité triangulaire

$$x_0^n \leq |a_{n-1}|x_0^{n-1} + \dots + |a_1|x_0 + |a_0| \quad (\text{c})$$

Finalement, il vient

$$Q(x_0) \leq 0$$

Or, d'après l'étude faite à la question précédente, Q est strictement négative sur $]0; \delta[$ et strictement positive sur $] \delta; +\infty[$. On en déduit que x_0 est inférieur à δ . Si en revanche r est un réel strictement positif tel que $Q(r) > 0$, alors r est supérieur à δ , de sorte que

Si $r \in \mathbb{R}_+^*$ satisfait $Q(r) > 0$, alors $x_0 \leq r$.

B.3 Si x_0 est inférieur ou égal à 1, le résultat est évident. Dans le cas contraire, en divisant l'égalité (c) par x_0^{n-1} , il vient

$$\begin{aligned} x_0 &\leq |a_{n-1}| + \dots + \frac{|a_1|}{x_0^{n-2}} + \frac{|a_0|}{x_0^{n-1}} \\ &\leq |a_{n-1}| + \dots + |a_1| + |a_0| \end{aligned}$$

puisque $x_0 > 1$. Finalement, dans les deux cas de figures,

$$x_0 \leq \max \left(1, \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| \right)$$

B.4 Notons R le polynôme défini par

$$R(x) = (x-1)P(x) = (x-1)(x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0)$$

En développant le produit, $R(x)$ s'écrit également

$$R(x) = x^{n+1} + (a_{n-1} - 1)x^n + \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k-1} - a_k)x^k - a_0$$

Ce polynôme est unitaire et de degré $n+1$. Si tous ses coefficients d'indices inférieurs ou égaux à n étaient nuls, on aurait $a_0 = 0$, $a_{n-1} = 1$ et

$$\forall k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket \quad a_k = a_{k-1}$$

C'est absurde au final car cela implique $a_0 = a_{n-1}$, ce qui n'est pas le cas. Par conséquent, les hypothèses de début de partie sont satisfaites, ce qui permet d'appliquer le résultat de la question B.3 à R . En notant Z_1 l'ensemble des racines de ce polynôme, soit $Z_1 = Z \cup \{1\}$,

$$x_1 = \max_{x \in Z_1} |x| \leq \max \left(1, |a_{n-1} - 1| + \sum_{k=1}^n |a_k - a_{k-1}| + |a_0| \right)$$

Remarquons pour finir que d'après l'inégalité triangulaire

$$|a_{n-1} - 1| + \sum_{k=1}^n |a_k - a_{k-1}| + |a_0| \geq \left| 1 - a_{n-1} + \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) + a_0 \right| = 1$$

car le terme de droite est une somme télescopique dont la somme vaut 1. De plus,

$$x_1 = \max_{x \in Z \cup \{1\}} |x| \geq \max_{x \in Z} |x| = x_0$$

Finalement, on en déduit que

$$x_0 \leq |a_{n-1} - 1| + \sum_{k=1}^n |a_k - a_{k-1}| + |a_0|$$

B.5 Notons R le majorant de l'énoncé

$$R = \max \left\{ 2|a_{n-1}|, 2 \left| \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} \right|, \dots, 2 \left| \frac{a_1}{a_2} \right|, \left| \frac{a_0}{a_1} \right| \right\}$$

Par définition, il vient

$$|a_{n-1}| \leq \frac{R}{2}; \quad |a_{n-2}| \leq \frac{R}{2} |a_{n-1}|; \quad \dots \quad |a_1| \leq \frac{R}{2} |a_2|; \quad |a_0| \leq R |a_1|$$

puis par récurrence immédiate

$$\forall k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket \quad |a_{n-1-k}| \leq \left(\frac{R}{2} \right)^{k+1}; \quad |a_0| \leq R \left(\frac{R}{2} \right)^{n-1}$$

En injectant ces inégalités dans la majoration (c) de la question B.2 et en divisant à nouveau par x_0^{n-1} , il vient

$$\begin{aligned} x_0 &\leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_{n-1-k}| x_0^{-k} \\ &\leq x_0 \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{R}{2x_0} \right)^{k+1} + R \left(\frac{R}{2x_0} \right)^{n-1} \end{aligned}$$

Raisonnons maintenant par l'absurde en supposant $x_0 > R$. La formule donnant la somme des termes d'une suite géométrique assure alors que

$$\begin{aligned}
x_0 &< x_0 \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{R}{2^{n-1}} \\
&= x_0 \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right) + \frac{R}{2^{n-1}} \\
x_0 &< x_0
\end{aligned}$$

ce qui est absurde. Par conséquent,

Si les coefficients $a_0, \dots, a_{n-1}$ sont tous non nuls, alors $x_0 \leq \max \left\{ 2 a_{n-1} , 2 \left \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} \right , \dots, 2 \left \frac{a_1}{a_2} \right , \left \frac{a_0}{a_1} \right \right\}$
--

L'hypothèse de positivité de $a_0, \dots, a_{n-1}$ est finalement superflue. Il s'agit de toute évidence d'une erreur d'énoncé puisque le résultat donné par le sujet faisait apparaître des valeurs absolues sur ces réels.

B.6 Notons P_1 et P_2 les polynômes définis par

$$P_1 = X^3 + X^2 + X + 1 \quad \text{et} \quad P_2 = X^3 - X^2 + X - 1$$

Il s'agit bien de polynômes unitaires à coefficients non nuls et ils ont chacun au moins une racine réelle (-1 pour P_1 et 1 pour P_2). Pour P_1 , les majorations des questions B.4 et B.5 donnent respectivement

$$x_0 \leq 1 \quad \text{et} \quad x_0 \leq 2$$

Pour P_2 , on obtient cette fois respectivement

$$x_0 \leq 7 \quad \text{et} \quad x_0 \leq 2$$

La majoration de la question B.4 est plus efficace (resp. moins efficace) que celle de la question B.5 pour le polynôme $X^3 + X^2 + X + 1$ (resp. $X^3 - X^2 + X - 1$).

C. ALGORITHME D'EXCLUSION.

L'énoncé ne prend pas la peine de préciser l'idée générale de l'algorithme (et c'est bien normal). En gros, le fonctionnement est le suivant. On part d'une valeur y_0 inférieure à toutes les racines réelles ($-\mathbf{R}$, déterminé à l'aide des résultats de la deuxième partie), et on parcourt la droite réelle en faisant des pas adaptés suivant que l'on reste loin ou que l'on s'approche de la prochaine racine. On utilise pour cela l'application $x \mapsto m(x)$ qui est, en vertu des résultats de la première partie, un encadrement de $x \mapsto d(x, \mathbf{Z})$.

- Tant que $m(y_n) \geq \varepsilon/2$, la prochaine racine est à distance au moins $\varepsilon/2$ car $d(y_n, \mathbf{Z}) \geq m(y_n)$. On peut donc faire un pas de valeur $m(y_n)$ sans la dépasser.
- Si $m(y_n) < \varepsilon/2$, on est au voisinage d'une racine. On va faire cette fois des petits pas de valeur ε , jusqu'à se retrouver dans le premier cas. Le nombre de pas de longueur ε nécessaires est la valeur de l'entier k . On récupère au passage un intervalle contenant toutes les racines à proximité desquelles on vient de passer.

C.1 Par construction de la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a pour tout entier $n \geq 1$

$$y_{n+1} - y_n = \begin{cases} m(y_n) & \text{si } m(y_n) \geq \varepsilon/2 \\ k\varepsilon & \text{avec } k \in \mathbb{N}^* \text{ sinon} \end{cases}$$

Dans tous les cas

$$y_{n+1} - y_n \geq \varepsilon/2$$

d'où

$$\forall n \geq 1 \quad y_n \geq y_1 + (n-1)\varepsilon/2$$

Cette minoration prouve que la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. Par conséquent,

Il existe un entier n_0 tel que $y_{n_0} > \mathbf{R}$.

C.2 Soit $k \in \llbracket 1; p \rrbracket$. Montrons que x_k est un élément de $F_{n_0, \varepsilon}$. La suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante. Puisque $y_0 = -\mathbf{R}$, $y_{n_0} > \mathbf{R}$ et que x_k est un élément de $[-\mathbf{R}; \mathbf{R}]$, on peut trouver un entier $\ell \leq n_0$ tel que $y_\ell \leq x_k < y_{\ell+1}$. Distinguons deux cas suivant la valeur de $y_{\ell+1}$:

- **1er cas :** Si $m(y_\ell) \geq \varepsilon/2$, alors $y_{\ell+1} = y_\ell + m(y_\ell)$. Par suite, x_k appartient à l'intervalle $[y_\ell; y_\ell + m(y_\ell)]$ [et en particulier, $|x_k - y_\ell| < m(y_\ell)$].

Remarquons que $m(y_\ell)$ n'est pas nul, car supérieur à $\varepsilon/2$. Il s'ensuit grâce à la question A.3 que $P(y_\ell) \neq 0$ et donc, d'après le résultat de la question A.4, que $P(x_k) \neq 0$. C'est absurde car x_k est une racine de P . Ce premier cas ne peut donc pas avoir lieu.

- **2ème cas :** Il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $y_{\ell+1} = y_\ell + k\varepsilon$ et $m(y_{\ell+1}) \geq \varepsilon/2$. En particulier, $m(y_{\ell+1})$ est non nul, ce qui prouve que $P(y_{\ell+1}) \neq 0$.

Si $x_k > y_{\ell+1} - m(y_{\ell+1})$, le résultat de la question A.4 amène comme précédemment à l'absurdité $P(x_k) \neq 0$. Il vient par conséquent $y_\ell \leq x_k \leq y_{\ell+1} - m(y_{\ell+1})$ puis par définition

$$F_{\ell+1, \varepsilon} = F_{\ell, \varepsilon} \cup [y_\ell; y_{\ell+1} - m(y_{\ell+1})]$$

L'encadrement de x_k ci-dessus assure qu'il s'agit d'un élément de $F_{\ell+1, \varepsilon}$. La suite $(F_{n, \varepsilon})_{n \in \mathbb{N}}$ étant croissante pour l'inclusion (on ne fait que rajouter des intervalles), x_k est bien un élément de $F_{n_0, \varepsilon}$.

Ceci étant vrai pour tout $k \in \llbracket 1; p \rrbracket$,

$$\boxed{Z \subset F_{n_0, \varepsilon}}$$

C.3 Soit x un élément de $F_{n_0, \varepsilon}$. Par construction de cet ensemble, il existe un entier n tel que x appartient à $[y_n; y_{n+1} - m(y_{n+1})]$, avec

- $m(y_n) < \varepsilon/2$
- $y_{n+1} = y_n + k\varepsilon$ où k est le plus petit entier tel que $m(y_n + k\varepsilon) \geq \varepsilon/2$.

En particulier, le choix de k impose les inégalités

$$\forall r \in \llbracket 0; k-1 \rrbracket \quad m(y_n + r\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$$

et d'autre part $m(y_{n+1}) \geq \varepsilon/2$ d'où

$$y_{n+1} - m(y_{n+1}) \leq y_n + k\varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = y_n + (k-1)\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}$$

Notons par conséquent p le plus petit entier compris entre 0 et $k-1$ et tel que

$$y_{n+1} - m(y_{n+1}) \leq y_n + p\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2}$$

Écrivons que

$$\begin{aligned} [y_n; y_{n+1} - m(y_{n+1})] &= \left[y_n; y_n + \frac{\varepsilon}{2} \right] \bigcup_{1 \leq r \leq p-1} \left[y_n + r\varepsilon - \frac{\varepsilon}{2}; y_n + r\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} \right] \\ &\quad \bigcup \left[y_n + p\varepsilon - \frac{\varepsilon}{2}; y_{n+1} - m(y_{n+1}) \right] \end{aligned}$$

Le réel x appartient à l'intervalle de gauche donc à l'un des intervalles de droite. Distinguons donc trois cas :

- si $x \in \left[y_n; y_n + \frac{\varepsilon}{2} \right]$, alors $|x - y_n| < \varepsilon/2$.
- si $x \in \left[y_n + r\varepsilon - \frac{\varepsilon}{2}; y_n + r\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} \right]$, alors $|x - (y_n + r\varepsilon)| < \varepsilon/2$.
- enfin si $x \in \left[y_n + p\varepsilon - \frac{\varepsilon}{2}; y_{n+1} - m(y_{n+1}) \right]$, puisque $y_n + p\varepsilon + \frac{\varepsilon}{2} > y_{n+1} - m(y_{n+1})$, il vient cette fois $|x - (y_n + p\varepsilon)| < \varepsilon/2$.

Dans tous les cas, on a justifié l'existence d'un entier r compris entre 0 et p , donc entre 0 et $k-1$ tel que $|x - (y_n + r\varepsilon)| \leq \varepsilon/2$. Il vient ainsi successivement grâce à l'inégalité triangulaire, puis la question A.8,

$$\begin{aligned} |m(x)| &\leq |m(x) - m(y_n + r\varepsilon)| + |m(y_n + r\varepsilon)| \\ &\leq \underbrace{|x - (y_n + r\varepsilon)|}_{\leq \varepsilon/2} + \underbrace{|m(y_n + r\varepsilon)|}_{< \varepsilon/2} \\ |m(x)| &< \varepsilon \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à utiliser le résultat de la question A.10 qui assure que

$$d(x, Z) \leq \frac{1}{\alpha_n} m(x) < \frac{\varepsilon}{\alpha_n}$$

En d'autre termes, x est à distance au plus ε/α_n de Z , ce qui signifie qu'il existe un entier i tel que $|x - x_i| < \varepsilon/\alpha_n$. Ceci prouve que x est un élément de $B_{i, \varepsilon}$. Par conséquent, x appartient à Z_ε . Ceci étant vrai pour tout élément de $F_{n_0, \varepsilon}$, on a

$$\boxed{F_{n_0, \varepsilon} \subset Z_\varepsilon}$$

QC.4) Supposons que les valeurs de $m(x)$ soient toutes connues à η près avec $\eta > 0$ quelconque.. Notons pour x donné, $\tilde{m}(x)$ la valeur obtenue ;

$$m(x) \in]\tilde{m}(x) - \eta, \tilde{m}(x) + \eta[$$

On prend $\varepsilon = 4\eta$. On modifie la construction de la suite et des ensembles de la manière suivante.

Supposons y_n connu.

1. Si $\tilde{m}(y_n) \geq \varepsilon/2$, on a $m(y_n) \geq \tilde{m}(y_n) - \eta \geq \varepsilon/2 - \eta = \varepsilon/4$.
On prend $y_{n+1} = y_n + \tilde{m}(y_n) - \eta$.
 $y_{n+1} - y_n \geq \varepsilon/4$ et $d(y_n, Z) \geq m(y_n) \geq \tilde{m}(y_n) - \eta$.
Il n'y a donc pas d'éléments de Z dans $[y_n, y_{n+1}[$.
2. Si $\tilde{m}(y_n) < \varepsilon/2$, alors $m(y_n) \leq \tilde{m}(y_n) + \eta < \varepsilon/2 + \eta = 3\varepsilon/4$.
On considère k , le plus petit entier strictement positif tel que $\tilde{m}(y_n + 3k\varepsilon/2) \geq \varepsilon/2$.
On prend : $y_{n+1} = y_n + 3k\varepsilon/2$ et $y_{n+1} - y_n \geq 3\varepsilon/2 \geq \varepsilon/4$.
On a alors $m(y_{n+1}) \geq \tilde{m}(y_{n+1}) - \eta \geq \varepsilon/4$
Si $y_{n+1} - \tilde{m}(y_{n+1}) + \eta < y_n$ alors $y_{n+1} - m(y_{n+1}) < y_n$ et il n'y a pas d'éléments de Z dans $[y_n, y_{n+1}[$
Sinon on étudie les éléments de l'ensemble $G'_n = [y_n, y_{n+1} - \tilde{m}(y_{n+1}) + \eta]$ et $H'_n = [y_{n+1} - \tilde{m}(y_{n+1}) + \eta, y_{n+1}]$.
Dans H'_n il n'y a pas d'éléments de Z et dans G'_n tout élément t est situé à une distance inférieure à $3\varepsilon/4$ d'un point x tel que $m(x) < 3\varepsilon/4$.
La distance de x à Z est majorée par $3\varepsilon/4\alpha_n$.
La distance de t à Z est majorée par $3\varepsilon/2\alpha_n$.

Fin de l'épreuve

Dernière question rédigé par Hugues Demongeot- PC* Dijon ; merci de transmettre toute remarque, erreur ou omission décelée.