Mines Maths 2 PC 2018 — Corrigé

I. Noyau de Dirichlet

1 Pour $k \in \mathbb{Z}^*$, puisque $t \longmapsto \mathrm{e}^{\,ikt}$ est 2π-périodique, remarquons que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\,ikt}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{\,ikt}}{ik}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Pour $k = 0$, cette intégrale vaut $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} 1\,\mathrm{d}t = 2\pi$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par linéarité de l'intégrale,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{D}_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{\,ikt}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=-n}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{\,ikt}\,\mathrm{d}t = 2\pi$$

donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{D}_n(t)\,\mathrm{d}t = 2\pi}$$

2 Considérons $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$ tel que $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Comme $\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}t} \neq 1$, l'expression de la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique donne

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_n(t) &= \sum_{k=-n}^{n} (\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}t})^k \\
&= \mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}nt} \sum_{j=0}^{2n} (\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}t})^j && \text{(car } j = k+n\text{)} \\
\mathrm{D}_n(t) &= \mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}nt}\, \frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}t(2n+1)} - 1}{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}t} - 1}
\end{aligned}$$

En mettant en facteur la demi-somme des arguments, il vient

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}_n(t) &= \mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}nt}\, \frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}(n+1/2)t}}{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}t/2}}\, \frac{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}(n+1/2)t} - \mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}(n+1/2)t}}{\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}t/2} - \mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}t/2}} \\
&= 1\, \frac{2\mathrm{i}\sin((n+1/2)t)}{2\mathrm{i}\sin(t/2)} \\
\mathrm{D}_n(t) &= \frac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)}
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall t \in \mathbb{R} \smallsetminus 2\pi\mathbb{Z} \qquad \mathrm{D}_n(t) = \frac{\sin((n+1/2)t)}{\sin(t/2)}}$$

3 Soit $\alpha > 0$. Les fonctions h et $x \longmapsto \cos(\alpha x)$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,-\pi\,;\pi\,]$, on réalise l'intégration par parties suivante :

$$\mathrm{I}_\alpha = \int_{-\pi}^{\pi} h(u)\sin(\alpha u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\alpha}\left[-h(u)\cos(\alpha u)\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{\alpha}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\alpha u) h'(u)\,\mathrm{d}u$$

Comme h et h' sont continues sur le segment $[\,-\pi\,;\pi\,]$ donc bornées, il vient :

$$\begin{aligned}
|\mathrm{I}_\alpha| &\leqslant \frac{1}{\alpha}\left|[-h(u)\cos(\alpha u)]_{-\pi}^{\pi}\right| + \frac{1}{\alpha}\left|\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\alpha u)h'(u)\,\mathrm{d}u\right| \\
&\leqslant \frac{1}{\alpha}\,2\max_{[\,-\pi\,;\,\pi\,]}|h| + \frac{1}{\alpha}\int_{-\pi}^{\pi}|\cos(\alpha u)h'(u)|\,\mathrm{d}u \\
&\leqslant \frac{1}{\alpha}\,2\max_{[\,-\pi\,;\,\pi\,]}|h| + \frac{1}{\alpha}\,2\pi\max_{[\,-\pi\,;\,\pi\,]}|h'| \\
|\mathrm{I}_\alpha| &\leqslant \frac{1}{\alpha}\left(2\max_{[\,-\pi\,;\,\pi\,]}|h| + 2\pi\max_{[\,-\pi\,;\,\pi\,]}|h'|\right)
\end{aligned}$$

La quantité $|\mathrm{I}_\alpha|$ est donc majorée par le produit de $1/\alpha$ (tendant vers 0 lorsque α tend vers $+\infty$) et d'une quantité bornée. Ainsi, par théorème d'encadrement :

$$\boxed{\lim_{\alpha\to+\infty}\mathrm{I}_\alpha = 0}$$

> Cette question démontre le lemme de Riemann-Lebesgue
>
> $$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\pi}^{\pi}h(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = 0$$
>
> pour des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Ce résultat est néanmoins valable pour toute fonction h intégrable sur $]\,-\pi\,;\pi\,[$.

4 Soient $n\in\mathbb{N}$ et $t\in\mathbb{R}$. Alors

$$\sum_{k=-n}^{n}c_k(g)\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}kt} = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n}\left(\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}kt}$$

Pour tout $k\in[\![\,-n\,;n\,]\!]$, l'application $x\longmapsto g(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}kt}$ est continue sur $[\,-\pi\,;\pi\,]$. De plus, la somme est finie. En échangeant somme et intégrale, on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-n}^{n}c_k(g)\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}kt} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=-n}^{n}g(x)\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}k(t-x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(x)\,\mathrm{D}_n(t-x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Par le changement de variable affine non constant donc licite $u=t-x$, il vient :

$$\sum_{k=-n}^{n}c_k(g)\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}kt} = \frac{1}{2\pi}\int_{t+\pi}^{t-\pi}g(t-u)\,\mathrm{D}_n(u)(-\,\mathrm{d}u) = \frac{1}{2\pi}\int_{t-\pi}^{t+\pi}g(t-u)\,\mathrm{D}_n(u)\,\mathrm{d}u$$

Puisque les fonctions g et D_n sont 2π-périodiques, cette dernière intégrale vaut aussi

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t-u)\,\mathrm{D}_n(u)\,\mathrm{d}u$$

d'où $$\boxed{\forall (n,t)\in\mathbb{N}\times\mathbb{R}\qquad \sum_{k=-n}^{n}c_k(g)\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}kt} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t-u)\,\mathrm{D}_n(u)\,\mathrm{d}u}$$

5 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$. Utilisons les égalités des questions 1 et 4 :

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k(g)\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}kt} - g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [g(t-u) - g(t)]\,\mathrm{D}_n(u)\,\mathrm{d}u$$

L'intégrande $u \longmapsto [g(t-u) - g(t)]\,\mathrm{D}_n(u)$ étant continu sur $[\,-\pi\,;\pi\,]$, on peut découper l'intégrale grâce à la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}\sum_{k=-n}^{n} c_k(g)\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}kt} - g(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} [g(t-u) - g(t)]\,\mathrm{D}_n(u)\,\mathrm{d}u \\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} [g(t-u) - g(t)]\,\mathrm{D}_n(u)\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

La fonction définie par $\qquad h_t : u \longmapsto \dfrac{g(t-u) - g(t)}{\sin(u/2)}$

est prolongeable par continuité en 0 (par $-2g'(t)$). En effet, comme g est de classe $\mathscr{C}^1$,

$$\frac{g(t-u) - g(t)}{\sin(u/2)} = 2\,\underbrace{\frac{u/2}{\sin(u/2)}}_{\underset{u\to 0}{\longrightarrow} 1}\,\underbrace{\frac{g(t-u) - g(t)}{u}}_{\underset{u\to 0}{\longrightarrow} -g'(t)}$$

Par continuité, et comme $u \notin 2\pi\mathbb{Z}$ sur les deux intervalles de définition des intégrales, on peut remplacer l'expression de $\mathrm{D}_n(u)$ par celle obtenue à la question 2 :

$$\begin{aligned}\sum_{k=-n}^{n} c_k(g)\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}kt} - g(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} \frac{g(t-u) - g(t)}{\sin(u/2)}\sin((n+1/2)u)\,\mathrm{d}u \\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{g(t-u) - g(t)}{\sin(u/2)}\sin((n+1/2)u)\,\mathrm{d}u\end{aligned}$$

La fonction h_t prolongée par continuité ainsi que $u \longmapsto \sin((n+1/2)u)$ étant continues sur $[\,0\,;2\pi\,]$, on peut écrire l'intégrale finale :

$$\boxed{\begin{array}{l}\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} c_k(g)\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}kt} - g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h_t(u)\sin((n+1/2)\,u)\,\mathrm{d}u \\ \text{avec} \quad h_t : u \longmapsto \begin{cases} \dfrac{g(t-u) - g(t)}{\sin(u/2)} & \text{si } u \in [\,-\pi\,;\pi\,] \smallsetminus \{0\} \\ -2g'(t) & \text{si } u = 0 \end{cases}\end{array}}$$

6 Soit $n \in \mathbb{Z}^*$. Par définition

$$c_n(g) = \int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,\mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x$$

et les fonctions g et $x \longmapsto \mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}nx}$ étant de classe $\mathscr{C}^1$ et 2π-périodiques, une première intégration par parties avec

$$u(x) = g(x), \quad v'(x) = \mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}nx}, \quad u'(x) = g'(x) \qquad \text{et} \qquad v(x) = -\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}nx}/n$$

donne

$$\begin{aligned}2\pi\,c_n(g) &= \left[-g(x)\,\frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}nx}}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}nx}}{n}\,g'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= 0 + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\,-\mathrm{i}nx}}{n}\,g'(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Les fonctions g et v étant de classe $\mathscr{C}^2$, une seconde intégration par parties avec

$$u(x) = g'(x), \quad v'(x) = \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}/n, \quad u'(x) = g''(x) \qquad \text{et} \qquad v(x) = -\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}/n^2$$

permet d'obtenir

$$2\pi\, c_n(g) = \frac{1}{n^2}\left[-g'(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n^2}\int_{-\pi}^{\pi} g''(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\,\mathrm{d}x$$

Les fonctions g' et g'' étant continues sur le segment $[\,-\pi\,;\pi\,]$ donc bornées, et en appliquant l'inégalité triangulaire pour l'intégrale :

$$\begin{aligned} 2\pi\,|c_n(g)| &\leqslant \frac{1}{n^2}\,2\max_{[\,-\pi\,;\,\pi\,]}|g'| + \frac{1}{n^2}\int_{-\pi}^{\pi}|g''(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}|\,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \frac{1}{n^2}\,2\max_{[\,-\pi\,;\,\pi\,]}|g'| + \frac{1}{n^2}\,2\pi\max_{[\,-\pi\,;\,\pi\,]}|g''| \\ 2\pi\,|c_n(g)| &\leqslant \frac{1}{n^2}\Big(2\max_{[\,-\pi\,;\,\pi\,]}|g'| + 2\pi\max_{[\,-\pi\,;\,\pi\,]}|g''|\Big) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{c_n(g) = \mathrm{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big) \qquad \text{et} \qquad c_{-n}(g) = \mathrm{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)}$$

$\boxed{\mathbf{7}}$ D'après le résultat de la question 5, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k(g)\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}kt} - g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h_t(u)\sin((n+1/2)u)\,\mathrm{d}u$$

On reconnaît, pour $\alpha = n + 1/2$ qui tend vers $+\infty$ lorsque n tend $+\infty$, l'intégrale I_α de la question 3. En posant $h = h_t$ (qui est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[\,-\pi\,;\pi\,]$), il vient

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=-n}^{n} c_k(g)\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}kt} = g(t)$$

Déterminons la limite dans le membre de gauche de cette égalité. On a

$$\sum_{k-=n}^{n} c_k(g)\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}kt} = \sum_{k=0}^{n} c_k(g)\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}kt} + \sum_{k=1}^{n} c_{-k}(g)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}$$

et les séries de droites convergent car, d'après la question précédente, leurs termes généraux sont des $\mathrm{O}\left(1/n^2\right)$. Ainsi,

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R} \qquad g(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(g)\,\mathrm{e}^{\,\mathrm{i}kt} + \sum_{k=1}^{+\infty} c_{-k}(g)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}}$$