

## I. PRÉLIMINAIRES

**I.A** Soient  $(I, f)$  et  $(I, g)$  deux éléments conjugués de  $\mathcal{E}$  : il existe alors deux réels strictement positifs  $r$  et  $r'$  tels que  $[0; r] \subset I$  et  $[0; r'] \subset I$ , et un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme croissant  $h$  de  $[0; r]$  sur  $[0; r']$  tel que

$$\forall y \in [0; r'] \quad g(y) = h \circ f \circ h^{-1}(y) \quad (1)$$

Comme  $h$  est un difféomorphisme croissant de  $[0; r]$  sur  $[0; r']$ , il envoie le minimum de  $[0; r]$  sur le minimum de  $[0; r']$ , soit  $h(0) = 0$ . En outre,  $h'(0) \neq 0$ . La dérivée en 0 de sa réciproque  $h^{-1}$  est alors

$$(h^{-1})'(0) = \frac{1}{h'[h^{-1}(0)]} = \frac{1}{h'(0)}$$

Notons que  $f \in \mathcal{E}$  donc  $f(0) = 0$ . Il vient alors par dérivation de (1)

$$g'(0) = (h^{-1})'(0) \times (h \circ f)'(0)$$

soit

$$g'(0) = \underbrace{(h^{-1})'(0) \times h'(0)}_{=1} \times f'(0)$$

Ainsi,

$$\boxed{f'(0) = g'(0)}$$

Pour retrouver la formule de la dérivée de la réciproque, il suffit de partir de la relation  $h \circ h^{-1}(y) = y$  : on obtient

$$\forall y \in [0; r'] \quad (h^{-1})'(y) \times h'[h^{-1}(y)] = 1$$

On retrouve au passage la condition  $h' \neq 0$  pour un difféomorphisme. Il est d'ailleurs beaucoup plus sûr de procéder comme cela plutôt que d'apprendre « bêtement » une formule... avec tous les risques de confusion et d'oubli que cela peut comporter.

**I.B.1** Soit un couple  $([0; 1], f) \in \mathcal{E}$  ; alors la fonction  $f$  laisse stable  $[0; 1]$ . Par définition de l'ensemble  $\mathcal{E}$ , on a  $f'(0) > 0$  et

$$\forall x \in ]0; 1] \quad 0 \leq f(x) \leq x \leq 1 \quad (2)$$

donc

$$\forall x \in ]0; 1] \quad 0 \leq \frac{f(x)}{x} \leq 1$$

Comme  $f$  est dérivable en 0, il vient  $0 \leq f'(0) \leq 1$  par passage à la limite quand  $x$  tend vers 0. De ce fait,

$$\boxed{f'(0) \in ]0; 1]}$$

**I.B.2** Soit  $x \in [0; 1]$  fixé. On tire de la relation (2)

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq f^{n+1}(x) \leq f^n(x) \leq 1$$

et la suite  $(f^n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et minorée : elle converge par conséquent vers un réel  $\ell_x$ . Comme  $f^n(x) \in [0; 1]$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a par passage à la limite  $\ell_x \in [0; 1]$ . Enfin, par continuité de  $f$  sur  $[0; 1]$ ,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f^{n+1}(x) = f[f^n(x)] \implies \ell_x = f(\ell_x)$$

en passant à la limite quand  $n$  tend vers l'infini. Comme  $f(x) < x$  pour tout  $x \in ]0; 1]$ , on en déduit que  $\ell_x$  est nécessairement nulle. Ainsi,

$$\forall x \in [0; 1] \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = 0$$

et

$$(f^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge simplement vers 0 sur } [0; 1].$$

**I.B.3** Le couple  $([0; 1], f)$  appartient à  $\mathcal{E}$  donc  $f'(x) > 0$  pour tout  $x \in [0; 1]$  : la fonction  $f$  est croissante et atteint de ce fait sa borne supérieure en 1. En conséquence, par composition,  $f^n$  est croissante pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et

$$\forall x \in [0; 1] \quad 0 \leq f^n(x) \leq f^n(1) = \|f^n\|_\infty$$

D'après la question I.B.2,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(1) = 0$

d'où  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f^n\|_\infty = 0$

Par conséquent,  $(f^n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers 0 sur  $[0; 1]$ .

**I.C** Comme les réels  $u_n$  sont strictement positifs, on peut prendre le logarithme du réel  $P_n$ . On obtient alors

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \ln P_n = \sum_{k=0}^n \ln u_k = \sum_{k=0}^n \ln(1 + a_k)$$

Or, la série de terme général  $a_n$  converge absolument par hypothèse : on a donc

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{d'où} \quad |\ln(1 + a_n)| \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} |a_n|$$

On déduit alors des théorèmes de comparaison des séries à termes positifs que la série de terme général  $\ln(1 + a_n)$  converge absolument : la suite  $(\ln P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un réel  $\ell$ , si bien que

$$\text{La suite } (P_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers un réel } e^\ell > 0.$$

En fait, il est plus simple – surtout au niveau de la rédaction – de raisonner directement sur la quantité  $\ln P_n$  comme ici, plutôt que de suivre l'indication de l'énoncé.

**I.D** Dans cette question, la notation « norme infinie » désignera la borne supérieure sur  $I$  de la fonction en question : en effet, comme on considère des fonctions continues sur des intervalles compacts, elles sont toutes bornées. On va procéder comme précédemment et montrer que la série de terme général  $(\ln Q_{n+1} - \ln Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge normalement sur  $I$ . Les fonctions  $\phi_n$  ne prenant que des valeurs strictement positives, on peut alors prendre le logarithme de  $Q_n$ . Il vient

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in I \quad \ln Q_n(x) = \sum_{k=0}^n \ln \phi_k(x) = \sum_{k=0}^n \ln [1 + \psi_k(x)] \quad (3)$$

Comme la série de terme général  $\psi_n$  converge normalement sur  $I$ , la suite de fonctions  $(\|\psi_n\|_\infty)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0 *ie* la suite  $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers 0. En utilisant un encadrement adéquat de la fonction  $x \mapsto \ln(1+x)$  au voisinage de 0, on va pouvoir montrer la convergence normale sur  $I$  des séries présentes dans la relation (3). Plus précisément :

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \quad \left| \frac{1}{1+x} \right| \leq 2$$

ce qui donne, après intégration entre 0 et  $x$ ,

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right] \quad |\ln(1+x)| \leq 2|x|$$

La convergence uniforme de  $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vers 0 implique alors

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N \quad \|\psi_n\|_\infty \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{d'où} \quad \forall n \geq N \quad \forall x \in I \quad |\ln[1 + \psi_n(x)]| \leq 2\|\psi_n(x)\|$$

$$\text{et} \quad \forall n \geq N \quad \|\ln \phi_n\|_\infty = \|\ln(1 + \psi_n)\|_\infty \leq 2\|\psi_n\|_\infty$$

Ainsi, la série de terme général  $\ln \phi_n$  converge elle aussi normalement sur  $I$  d'après les théorèmes de comparaison des séries à termes positifs, si bien que la suite de fonctions  $(\ln Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur  $I$  vers une fonction continue  $L$  à valeurs réelles. Notons  $Q = \exp L$ ; la fonction continue  $Q$  ne prend alors que des valeurs strictement positives sur  $I$ . En outre,

$$\forall x \in I \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \ln Q_n(x) - L(x) = \ln \left( \frac{Q_n(x)}{Q(x)} \right)$$

$$\text{donc} \quad \forall x \in I \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad Q_n(x) = Q(x) \times \exp [\ln Q_n(x) - L(x)]$$

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $x \in I$ ,

$$\begin{aligned} |Q_n(x) - Q(x)| &= |Q(x)| \times |\exp [\ln Q_n(x) - L(x)] - 1| \\ &\leq |Q(x)| \times |\exp |\ln Q_n(x) - L(x)|| - 1| \\ |Q_n(x) - Q(x)| &\leq \|Q\|_\infty \times |\exp \|\ln Q_n - L\|_\infty - 1| \end{aligned}$$

$$\text{d'où} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \|Q_n - Q\|_\infty \leq \|Q\|_\infty \times |\exp \|\ln Q_n - L\|_\infty - 1|$$

Comme  $(\ln Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur  $I$  vers  $L$  et que  $\lim_{x \rightarrow 0} \exp x - 1 = 0$ ,

La suite de fonctions  $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur  $I$  vers une fonction à valeurs strictement positives.

## II. CONJUGAISON D'ÉLÉMENTS DE $\mathcal{E}$ LOCALEMENT CONTRACTANTS

**II.A** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Par définition des fonctions  $u_n$  et  $h_\lambda$ , on a pour tout  $x \in [0; 1]$

$$u_n \circ f(x) = \frac{f^n[f(x)]}{\lambda^n} = \frac{f^{n+1}(x)}{\lambda^n} = \lambda \times \frac{f^{n+1}(x)}{\lambda^{n+1}} = h_\lambda \circ u_{n+1}(x)$$

d'où

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \circ f - h_\lambda \circ u_{n+1} = 0$$

### II.B.1

Il y a une erreur dans l'énoncé : il faut prendre  $\lambda \in ]0; 1[$  dans la suite. Sinon, pour  $\lambda = 1$ , il s'avèrera difficile de trouver  $\varepsilon > 0$  tel que  $\lambda + \varepsilon < 1$ ...

Soit  $\varepsilon > 0$  : on a alors, comme  $\lambda > 0$ ,

$$\begin{aligned} (\lambda + \varepsilon)^2 < \lambda &\iff 0 < \lambda + \varepsilon < \sqrt{\lambda} \\ &\iff 0 < \varepsilon < \sqrt{\lambda} - \lambda \end{aligned}$$

Enfin  $\lambda < \sqrt{\lambda}$  puisque  $0 < \lambda < 1$ , d'où  $\sqrt{\lambda} - \lambda > 0$  : la condition ci-dessus est donc satisfaisable. Pour un tel  $\varepsilon$ , on a  $(\lambda + \varepsilon)^2 < \lambda < 1$  donc  $\lambda + \varepsilon < 1$ . Par exemple,

$$\text{Le réel } \varepsilon = \frac{\sqrt{\lambda} - \lambda}{2} \text{ vérifie les conditions } \varepsilon > 0, \lambda + \varepsilon < 1 \text{ et } (\lambda + \varepsilon)^2 < \lambda.$$

À partir de maintenant, le réel  $\varepsilon > 0$  est considéré fixé et vérifiant les conditions  $\lambda + \varepsilon < 1$  et  $(\lambda + \varepsilon)^2 < \lambda$ . De plus, la notation « norme infinie » désignera la borne supérieure prise sur  $[0; 1]$ .

Remarquons que le sujet omet de préciser que l'on considère un tel  $\varepsilon$  par la suite.

**II.B.2** Comme  $([0; 1], f) \in \mathcal{E}_\lambda$  alors  $f'(0) = \lambda$ , soit  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lambda$ . De ce fait,

$$\exists a \in ]0; 1[ \quad \forall x \in [0; a] \quad \left| \frac{f(x)}{x} - \lambda \right| \leq \varepsilon$$

d'où

$$\exists a \in ]0; 1[ \quad \forall x \in [0; a] \quad f(x) \leq (\lambda + \varepsilon)x$$

**II.C.1** Puisque  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $[0; 1]$ , la formule de Taylor en 0 assure que

$$\forall x \in [0; 1] \quad \exists \xi_x \in [0; x] \quad f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2 f''(\xi_x)}{2}$$

$$\text{soit} \quad \forall x \in [0; 1] \quad \exists \xi_x \in [0; x] \quad f(x) - \lambda x = \frac{x^2 f''(\xi_x)}{2}$$

Par ailleurs,  $f''$  est continue donc bornée sur l'intervalle compact  $[0; 1]$  : ainsi,

$$\exists C \geq 0 \quad \forall \xi \in [0; 1] \quad |f''(\xi)| \leq 2C$$

si bien que

$$\boxed{\exists C \geq 0 \quad \forall x \in [0; 1] \quad |f(x) - \lambda x| \leq C x^2}$$

**II.C.2** Le couple  $([0; 1], f)$  appartient à  $\mathcal{E}_\lambda \subset \mathcal{E}$  donc la suite  $(f^n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers 0 sur  $[0; 1]$  (cf. question I.B.3). Par conséquent,

$$\|f^n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{et comme } a > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \|f^n\|_\infty \leq a$$

$$\text{Conclusion :} \quad \boxed{\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in [0; 1] \quad f^n(x) \in [0, a]}$$

**II.C.3** Fixons  $n \geq n_0$  et  $x \in [0; 1]$ . On a

$$u_{n+1}(x) - u_n(x) = \frac{f^{n+1}(x)}{\lambda^{n+1}} - \frac{f^n(x)}{\lambda^n} = \frac{f^{n+1}(x) - \lambda f^n(x)}{\lambda^{n+1}}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où} \quad |u_{n+1}(x) - u_n(x)| &= \frac{|f[f^n(x)] - \lambda f^n(x)|}{\lambda^{n+1}} \\ &\leq \frac{C |f^n(x)|^2}{\lambda^{n+1}} \end{aligned}$$

d'après la question II.C.1. Or, pour tout entier  $m \geq n_0$ , on a  $f^m(x) \in [0; a]$  grâce à la question II.C.2. En appliquant le résultat de la question II.B.2, on obtient

$$\forall m \geq n_0 \quad 0 \leq f^{m+1}(x) = f[f^m(x)] \leq (\lambda + \varepsilon) f^m(x)$$

Par une itération immédiate, il vient alors

$$\forall m \geq n_0 \quad 0 \leq f^m(x) \leq (\lambda + \varepsilon)^{m-n_0} f^{n_0}(x)$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi,} \quad |u_{n+1}(x) - u_n(x)| &\leq \frac{C (\lambda + \varepsilon)^{2n-2n_0}}{\lambda^{n+1}} \times |f^{n_0}(x)|^2 \\ &\leq \left[ \frac{(\lambda + \varepsilon)^2}{\lambda} \right]^n \times \frac{C |f^{n_0}(x)|^2}{\lambda (\lambda + \varepsilon)^{2n_0}} \end{aligned}$$

et comme  $f^{n_0}(x) \in [0; a]$ , on a

$$\boxed{|u_{n+1}(x) - u_n(x)| \leq \left[ \frac{(\lambda + \varepsilon)^2}{\lambda} \right]^n \times \frac{C a^2}{\lambda (\lambda + \varepsilon)^{2n_0}}}$$

Par conséquent,

$$\exists D \geq 0 \quad \forall n \geq n_0 \quad \|u_{n+1} - u_n\|_\infty \leq D [\lambda^{-1} (\lambda + \varepsilon)^2]^n$$

En vertu du choix de  $\varepsilon$  (cf. question II.B.1) on a  $0 \leq \lambda^{-1} (\lambda + \varepsilon)^2 < 1$ , ce qui montre – grâce aux théorèmes de comparaison des séries à termes positifs – que la série de terme général  $u_{n+1} - u_n$  converge normalement sur l'intervalle  $[0; 1]$ . La suite de ses sommes partielles

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_{k+1} - u_k = u_{n+1} - u_0$$

converge alors uniformément sur  $[0; 1]$ . Il en découle que

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur  $[0; 1]$ .

Soit  $u$  sa limite uniforme : par continuité de  $f$ , toutes les fonctions  $u_n$  (pour  $n \in \mathbb{N}$ ) sont continues sur  $[0; 1]$  donc  $u$  est une fonction continue sur  $[0; 1]$ .

**II.D.1** On s'intéresse maintenant à la dérivabilité de  $u$ . Cherchons d'abord à estimer la norme infinie du terme général de la série mentionnée. Sur l'intervalle  $[0; 1]$ ,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{f^{n+1}}{\lambda^{n+1}} = \frac{f \circ f^n}{\lambda^{n+1}}$$

Dérivons cette relation :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0; 1] \quad u_{n+1}'(x) = \frac{(f^n)'(x) \times f'[f^n(x)]}{\lambda^n \times \lambda} = u_n'(x) \times \frac{f'[f^n(x)]}{\lambda}$$

$$\text{soit} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0; 1] \quad \frac{u_{n+1}'(x)}{u_n'(x)} - 1 = \frac{f'[f^n(x)] - \lambda}{\lambda}$$

Enfin,  $f'(0) = \lambda$  et  $f'$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $[0; 1]$  : l'application de la formule de Taylor à  $f'$  conduit donc à

$$f'(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \lambda + O(x)$$

$$\text{soit} \quad \exists C > 0 \quad \forall x \in [0; 1] \quad |f'(x) - \lambda| \leq C|x|$$

Comme  $(f^n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers la fonction nulle sur  $[0; 1]$ , on a

$$\forall x \in [0; 1] \quad |f_n(x)| \leq \|f^n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{donc} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0; 1] \quad |f' \circ f^n(x) - \lambda| \leq C|f^n(x)| \leq C\|f^n\|_\infty$$

$$\text{Ainsi,} \quad \|f' \circ f^n - \lambda\|_\infty \underset{n \rightarrow \infty}{=} O(\|f^n\|_\infty)$$

$$\text{d'où} \quad \left\| \frac{u_{n+1}'}{u_n'} - 1 \right\|_\infty \underset{n \rightarrow \infty}{=} O(\|f^n\|_\infty)$$

Il reste maintenant à vérifier que la série de fonctions de terme général  $f_n$  converge normalement sur  $[0; 1]$ .

On a montré dans la question II.C.3 que la suite de fonctions continues  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergeait uniformément vers la fonction continue  $u$  sur  $[0; 1]$ . Dès lors

$$\|u - u_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{et} \quad M = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|u - u_n\|_\infty < \infty$$

si bien que  $\forall n \in \mathbb{N} \quad \|u_n\|_\infty \leq \|u\|_\infty + M$

Les fonctions  $u_n$  sont donc uniformément bornées sur  $[0; 1]$ . Il vient alors

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|f^n\|_\infty \leq \lambda^n N \quad \text{où} \quad N = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|u_n\|_\infty$$

Comme  $\lambda < 1$ , ceci montre que la série de fonctions de terme général  $f_n$  converge normalement sur  $[0; 1]$ . Aussi, par comparaison des séries positives,

La série de fonctions  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \left( \frac{u_{n+1}'}{u_n'} - 1 \right)$  converge normalement sur  $[0; 1]$ .

**II.D.2** Le couple  $([0; 1], f)$  appartient à  $\mathcal{E}$  donc  $f'$  est strictement positive sur l'intervalle  $[0; 1]$  par définition de l'ensemble  $\mathcal{E}$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$(f^{n+1})' = (f^n)' \times f' \circ f^n$$

donc par itération

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (f^n)' = f \times f' \circ f \times \cdots \times f' \circ f^{n-1}$$

d'où  $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [0; 1] \quad (f^n)'(x) > 0$

si bien que les fonctions  $u_n'$  ne prennent que des valeurs strictement positives  $[0; 1]$ . On déduit alors de la question I.D et du résultat précédent que la suite de fonctions continues de terme général

$$Q_n = \prod_{k=0}^n \frac{u_{k+1}'}{u_k'} = \frac{u_{n+1}'}{u_0'} = u_{n+1}'$$

(car  $u_0 = \text{Id}$ ) converge uniformément sur  $[0; 1]$  vers une fonction  $v$  à valeurs strictement positives. Par conséquent,  $v$  est continue et

- la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur  $[0; 1]$  vers  $u$ ;
- la suite  $(u_n')_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur  $[0; 1]$  vers  $v$ .

Ceci montre que  $u$  est dérivable sur  $[0; 1]$  et que sa dérivée  $u' = v$  est continue. Comme  $u'$  prend des valeurs strictement positives, on peut en conclure que

$u$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme croissant de  $[0; 1]$  sur son image.

De plus  $f(0) = 0$ , soit  $u_n(0) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Par suite,  $u(0) = 0$ : l'image de  $[0; 1]$  par le difféomorphisme  $u$  est donc un intervalle  $[0; q]$  avec  $q > 0$ .

**II.E** On a montré en II.A que

$$\forall x \in [0; 1] \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \circ f(x) = h_\lambda \circ u_{n+1}(x)$$

d'où  $u \circ f(x) = h_\lambda \circ u(x)$  en passant à la limite quand  $n$  tend vers l'infini. Ainsi,

$$\forall x \in [0; 1] \quad f(x) = u^{-1} \circ h_\lambda \circ u(x) \quad (4)$$

On a vu plus haut que la fonction  $u$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme croissant de  $[0; 1]$  sur  $[0; q]$ : en se restreignant au domaine  $[0; u^{-1}(1)]$  si  $q > 1$ , on a alors deux intervalles  $[0; r] \subset [0; 1]$  et  $[0; r'] \subset [0; 1]$  (avec  $r, r' > 0$ ) tels que  $u$  réalise un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme croissant de  $[0; r]$  sur  $[0; r']$ . Ceci prouve, en tenant compte de la relation (4), que

$$([0; 1], f) \text{ et } ([0; 1], h_\lambda) \text{ sont conjugués.}$$

### III. CONJUGAISON DES ÉLÉMENTS DE $\mathcal{E}$ TANGENTS À L'IDENTITÉ

**III.A.1** Vérifions d'abord que  $([0; 1], \theta_q) \in \mathcal{E}$ . Comme la quantité  $1+x^q$  ne s'annule pas sur  $[0; 1]$ , la fonction  $\theta_q$  est – par composition – de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $[0; 1]$  et

$$(0) \quad \forall x \in [0; 1] \quad 0 \leq (1+x^q)^{-1/q} \leq 1 \quad \text{donc} \quad \theta_q(x) \in [0; 1]$$

$$(i) \quad \theta_q(0) = 0$$

$$(ii) \quad \forall x \in ]0; 1] \quad (1+x^q)^{1/q} > 1 \quad \text{donc} \quad \theta_q(x) < x$$

$$(iii) \quad \forall x \in ]0; 1] \quad \theta_q'(x) = \frac{1}{(1+x^q)^{1/q}} - \frac{x^q}{(1+x^q)^{1+1/q}} = \frac{1}{(1+x^q)^{1+1/q}} > 0$$

On en déduit que  $([0; 1], \theta_q) \in \mathcal{E}$ . De plus,  $\theta_q'(0) = 1$  d'après la relation (iii), donc  $([0; 1], \theta_q) \in \mathcal{E}_1$ . Enfin, un développement limité au voisinage de 0 fournit

$$(1+x^q)^{-1/q} = 1 - \frac{x^q}{q} + o(x^q)$$

soit

$$\theta_q(x) = x - \frac{x^{q+1}}{q} + o(x^{q+1})$$

La fonction  $\theta_q$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $[0; 1]$  et admet donc comme développement limité à l'ordre  $q+1$  en 0

$$\theta_q(x) = \sum_{k=0}^{q+1} \theta_q^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} + o(x^{q+1})$$

On déduit de l'unicité d'un tel développement limité que

$$\theta_q^{(2)}(0) = \theta_q^{(3)}(0) = \dots = \theta_q^{(q)}(0) = 0$$

et 
$$\theta_q^{(q+1)}(0) = \frac{-(q+1)!}{q} \neq 0$$

Par conséquent,  $\boxed{\forall q \in \mathbb{N}^* \quad ([0; 1], \theta_q) \in \mathcal{E}_1^* \quad \text{et} \quad \nu(\theta_q) = q}$

**III.A.2.a** Dans la suite,  $([0; 1], f) \in \mathcal{E}_1^*$ ,  $q = \nu(f)$  et  $a = -\frac{f^{(q+1)}(0)}{(q+1)!} \neq 0$ .

La formule de Taylor appliquée à  $f$  donne, avec les notations ci-dessus,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - ax^{q+1} + o(x^{q+1})$$

d'où 
$$a = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - f(x)}{x^{q+1}}$$

Or,  $([0; 1], f) \in \mathcal{E}$  donc  $f(x) < x$  pour tout  $x \in ]0; 1]$  ; par suite,

$$\forall x \in ]0; 1] \quad \frac{x - f(x)}{x^{q+1}} > 0$$

et  $a \geq 0$  par passage à la limite. Comme  $a \neq 0$ , on a

$$\boxed{a > 0}$$

**III.A.2.b** Soit  $(I, g) \in \mathcal{E}$  un élément conjugué à  $([0; 1], f)$  : on a  $g'(0) = f'(0) = 1$ , d'après la question I.A, donc

$$(I, g) \in \mathcal{E}_1$$

À présent, comme  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $I$ , on va pouvoir retrouver ses dérivées successives en 0 grâce à son développement limité. Traduisons d'abord la relation de conjugaison :

$$\exists r, r' > 0 \quad [0; r] \subset [0; 1] \quad \text{et} \quad [0; r'] \subset I$$

et l'on a un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme croissant  $h$  de  $[0; 1]$  dans  $[0; r']$  tel que

$$\forall x \in [0; r'] \quad g(x) = h \circ f \circ h^{-1}(x)$$

Comme  $h^{-1}(0) = 0$ ,

$$h^{-1}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x \times (h^{-1})'(0) + o(x) = \frac{x}{h'(0)} + o(x) = O(x)$$

donc 
$$\begin{aligned} f \circ h^{-1}(x) &= h^{-1}(x) - a [h^{-1}(x)]^{q+1} + o([h^{-1}(x)]^{q+1}) \\ &= h^{-1}(x) - \frac{a x^{q+1}}{[h'(0)]^{q+1}} + o(x^{q+1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{et} \quad h \circ f \circ h^{-1}(x) &= h \left[ h^{-1}(x) - \frac{a x^{q+1}}{[h'(0)]^{q+1}} + o(x^{q+1}) \right] \\
 &= h[h^{-1}(x)] - \frac{a x^{q+1}}{[h'(0)]^{q+1}} \times h'[h^{-1}(x)] + o(x^{q+1}) \\
 h \circ f \circ h^{-1}(x) &= x - \frac{a h'[h^{-1}(x)]}{[h'(0)]^{q+1}} x^{q+1} + o(x^{q+1}) = g(x)
 \end{aligned}$$

$$\text{Enfin} \quad h'[h^{-1}(x)] = h'(0) + O(h^{-1}(x)) = h'(0) + O(x)$$

$$\text{si bien que} \quad g(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{a}{[h'(0)]^q} x^{q+1} + o(x^{q+1})$$

On déduit alors du développement limité de  $g$  en 0 que

$$g^{(2)}(0) = g^{(3)}(0) = \dots = g^{(q)}(0) = 0$$

$$\text{et} \quad g^{(q+1)}(0) = \frac{-a(q+1)!}{[h'(0)]^q} \neq 0$$

Par conséquent,

$$(I, g) \in \mathcal{E}_1^* \quad \text{et} \quad \nu(g) = q$$

**III.A.3.a** Dans cette question, la fonction  $h$  est définie sur  $\mathbb{R}^+$  par  $h(x) = x + \beta x^k$  et l'on a

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - a x^{q+1} + b x^{q+k} + o(x^{q+k}) \quad (5)$$

avec  $k \in \{2, 3, \dots, q\}$  et  $b \in \mathbb{R}^*$ . Par dérivation de la relation de définition de  $h$ , il vient

$$\forall x \geq 0 \quad h'(x) = 1 + k\beta x^{k-1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

Ainsi,  $h'$  est strictement positive au voisinage de 0 :

$$\exists r > 0 \quad \forall x \in [0; r] \quad h'(x) > 0$$

Comme  $h(0) = 0$ , l'image de  $[0; r]$  par  $h$  est un intervalle  $[0; r']$  avec  $r' > 0$ . Alors

$$\boxed{\exists r, r' > 0 \text{ tq } h \text{ induise un } \mathcal{C}^1\text{-difféomorphisme croissant de } [0; r] \text{ sur } [0; r'] .}$$

Par ailleurs,  $h$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et  $h'$  ne s'annule jamais sur  $[0; r]$  : on déduit de la relation

$$\forall y \in [0; r'] \quad (h^{-1})'(x) = \frac{1}{h' \circ h^{-1}(x)}$$

que la fonction réciproque  $h^{-1}$  est infiniment dérivable sur  $[0; r']$ . Ainsi,  $h$  décrit en fait un  $\mathcal{C}^\infty$ -difféomorphisme de  $[0; r]$  sur  $[0; r']$  ; c'est ce qui nous sera utile par la suite.

**III.A.3.b** La réciproque de  $h$  vérifie l'équation

$$\forall y \in [0; r'] \quad h \circ h^{-1}(y) = h^{-1}(y) + \beta [h^{-1}(y)]^k = y$$

Comme  $h^{-1}(0) = 0$  et que  $h^{-1}$  est dérivable en 0, alors  $h^{-1}(y) \underset{y \rightarrow 0}{=} O(y)$  et

$$h^{-1}(y) = y - \beta [h^{-1}(y)]^k = y + o(y)$$

d'où, en réinjectant le membre de droite dans celui du milieu,

$$\boxed{h^{-1}(y) \underset{y \rightarrow 0}{=} y - \beta y^k + o(y^k)}$$

**III.A.3.c** Appliquons  $h$  au développement limité (5) de  $f$  : quand  $x$  tend vers 0,

$$\begin{aligned} h \circ f(x) &= f(x) + \beta [f(x)]^k \\ &= x - ax^{q+1} + bx^{q+k} + o(x^{q+k}) + \beta [x - ax^{q+1} + bx^{q+k} + o(x^{q+k})]^k \\ h \circ f(x) &= x - ax^{q+1} + bx^{q+k} + \beta (x^k - akx^{q+k}) + o(x^{q+k}) \end{aligned}$$

puisque  $(1+u)^k = 1 + ku + o(u^2)$  et que  $2 \leq k \leq q$ . En d'autres termes,

$$\boxed{h \circ f(x) = x + \beta x^k - ax^{q+1} + (b - ak\beta)x^{q+k} + o(x^{q+k})}$$

Comme  $h^{-1}(y) = O(y)$  quand  $y$  tend vers 0, on peut alors écrire

$$\begin{aligned} h \circ f \circ h^{-1}(y) &= h^{-1}(y) + \beta [h^{-1}(y)]^k \\ &\quad - a [h^{-1}(y)]^{q+1} + (b - ak\beta) [h^{-1}(y)]^{q+k} + o(y^{q+k}) \end{aligned}$$

Une première simplification s'impose :

$$\forall y \in [0; r'] \quad h^{-1}(y) + \beta [h^{-1}(y)]^k = h \circ h^{-1}(y) = y$$

Par ailleurs, 
$$h^{-1}(y) \underset{y \rightarrow 0}{=} y - \beta y^k + o(y^k)$$

donc 
$$[h^{-1}(y)]^{q+1} = y^{q+1} - (q+1)\beta y^{q+k} + o(y^{q+k})$$

et 
$$[h^{-1}(y)]^{q+k} = y^{q+k} + o(y^{q+k})$$

Ceci conduit finalement à

$$\boxed{h \circ f \circ h^{-1}(y) \underset{y \rightarrow 0}{=} y - ay^{q+1} + [b + a(q+1-k)\beta] y^{q+k} + o(y^{q+k})}$$

**III.A.4** On a  $([0; 1], f) \in \mathcal{E}_1^*$  et  $q = \nu(f)$ .

**Un lemme utile :** soient  $I, I' \subset [0; 1]$  et  $h$  un  $\mathcal{C}^\infty$ -difféomorphisme croissant de  $I'$  sur  $I$  : nécessairement  $h(0) = 0$ . Définissons la fonction  $g = h \circ f \circ h^{-1}$  sur  $I$ . Alors, comme  $0 \leq f(x) \leq x$  pour tout  $x \in [0; 1]$  et que  $h$  est croissant,

$$\forall y \in I \quad h \circ f \circ h^{-1}(y) \leq h [h^{-1}(y)] = y \quad \text{soit} \quad 0 \leq g(y) \leq y$$

Ainsi,  $g$  est une application de classe  $\mathcal{C}^\infty$  de  $I$  dans lui-même. De plus,

- (i)  $g(0) = h \circ f(0) = h(0) = 0$
- (ii)  $\forall y \in I' \setminus \{0\} \quad h \circ f \circ h^{-1}(y) < h \circ h^{-1}(y) = y$
- (iii)  $\forall y \in I' \quad g'(y) = (h^{-1})'(y) \times f'(h^{-1}(y)) \times h'(f \circ h^{-1}(y)) > 0$

si bien que  $(I, g) \in \mathcal{E}$ . Par construction même de la fonction  $g$ , les couples  $([0; 1], f)$  et  $(I, g)$  sont conjugués : on déduit de la question III.A.2.b que  $(I, g) \in \mathcal{E}_1^*$  et que  $\nu(g) = \nu(f) = q$ . Pour résumer,

Soient  $I, I' \subset [0; 1]$ ,  $h$  un  $\mathcal{C}^\infty$ -difféomorphisme croissant de  $I'$  sur  $I$  et soit  $g$  la fonction définie sur  $I$  par  $g = h \circ f \circ h^{-1}$ . Alors le couple  $(I, g)$  appartient à  $\mathcal{E}_1^*$  et il est conjugué à  $([0; 1], f) : \nu(g) = \nu(f) = q$ .

Ainsi, l'ensemble  $\mathcal{E}_1^*$  est stable par la conjugaison, qui définit une relation d'équivalence. Le but de cette partie est justement de déterminer l'ensemble des classes de conjugaison. Notons, étant donnés  $(I, f)$  dans  $\mathcal{E}_1^*$  et  $h$  un  $\mathcal{C}^\infty$ -difféomorphisme croissant sur  $I$

$$h * f = h \circ f \circ h^{-1}$$

On a alors  $h_1 * (h_2 * f) = (h_1 \circ h_2) * f$  pour deux tels difféomorphismes  $h_1$  et  $h_2$ , quand les compositions sont bien définies : ceci fournit une pseudo-associativité de la conjugaison sur  $\mathcal{E}_1^*$ .

**Application de la question III.A.3 :** pour  $(I, f) \in \mathcal{E}_1^*$ , définissons

$$\mu(f) = \min \{n > 1, f^{(\nu(f)+n)}(0) \neq 0\}$$

On suivra la convention classique  $\min \emptyset = +\infty$ . Posons  $q = \nu(f)$  et  $k = \mu(f)$ . Si  $2 \leq k \leq q$ , on a  $f^{(q+2)}(0) = \dots = f^{(q+k-1)}(0) = 0$  et il existe  $b \in \mathbb{R}^*$  tel que

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - a x^{q+1} + b x^{q+k} + o(x^{q+k})$$

On retrouve ainsi la relation (5) et les hypothèses de la question III.A.3. Effectuons d'abord une conjugaison par un élément  $h$  pour augmenter l'entier  $\nu(f)$ , avant de conjuguer par un  $h_\lambda$  pour normaliser les coefficients. On pose

$$h : x \mapsto x + \beta x^k \quad \text{où} \quad \beta = \frac{b}{a(k-1-q)}$$

D'après la question III.A.3.a, il existe deux réels  $r$  et  $r'$  strictement positifs tels que  $h$  induise un  $\mathcal{C}^\infty$ -difféomorphisme croissant de  $I' = [0; r]$  sur  $I = [0; r']$ . En posant  $\tilde{f} = h \circ f \circ h^{-1}$  sur  $I$ , on obtient un couple  $(I, \tilde{f}) \in \mathcal{E}_1^*$  conjugué à  $([0; 1], f)$  d'après le lemme. De plus,  $\tilde{f}$  a pour développement limité en 0 (cf. question III.A.3.c)

$$\tilde{f}(z) \underset{z \rightarrow 0}{=} z - a z^{q+1} + o(z^{q+k})$$

d'où  $\mu(\tilde{f}) > k = \mu(f)$ . En réitérant ce procédé, on montre ainsi qu'il existe un couple  $(\tilde{I}, \tilde{f}) \in \mathcal{E}_1^*$  conjugué à  $([0; 1], f)$  et tel que  $\mu(\tilde{f}) \geq q + 1$ . Soit  $(\tilde{I}, \tilde{f})$  un tel couple : alors  $\tilde{f}^{(q+2)}(0) = \dots = \tilde{f}^{(2q)}(0) = 0$  et il existe un réel  $\tilde{E}$  tel que

$$\tilde{f}(z) \underset{z \rightarrow 0}{=} z - a z^{q+1} + \tilde{E} z^{2q+1} + o(z^{2q+1})$$

Soient  $\lambda > 0$  et  $h_\lambda$  le  $\mathcal{C}^\infty$ -difféomorphisme croissant défini par  $h_\lambda : x \mapsto \lambda x$  sur  $\tilde{I}$ . On notera  $I$  l'image de  $\tilde{I}$  par  $h_\lambda$ . Définissons la fonction  $g = h_\lambda \circ \tilde{f} \circ (h_\lambda)^{-1}$  sur  $I$  : d'après le lemme, le couple  $(I, g) \in \mathcal{E}_1^*$  est conjugué à  $(\tilde{I}, \tilde{f})$  donc à  $([0; r], f)$ . Enfin le développement limité de  $g$  en 0 s'écrit

$$g(y) = \lambda \tilde{f}\left(\frac{y}{\lambda}\right) = y - \frac{a}{\lambda^q} y^{q+1} + \frac{\tilde{E}}{\lambda^{2q}} y^{2q+1} + o(y^{2q+1})$$

Il suffit alors de prendre  $\lambda = \sqrt[q]{aq}$  ( $a > 0$ ) et de poser  $E = \tilde{E} a^{-2} q^{-2}$  pour pouvoir conclure :

Il existe un réel  $E$  et un couple  $(I, g) \in \mathcal{E}_1^*$  conjugué à  $([0; 1], f)$   
tels que  $g(y) \underset{y \rightarrow 0}{=} y - \frac{y^{q+1}}{q} + E y^{2q+1} + o(y^{2q+1})$ .

**III.B** On considère dans cette section une application  $g$  de  $[0; 1]$  dans lui-même telle que  $[0; 1], g$  appartienne à  $\mathcal{E}_1^*$  et

$$g(y) \underset{y \rightarrow 0}{=} y - \frac{y^{q+1}}{q} + E y^{2q+1} + o(y^{2q+1}) \quad (6)$$

avec  $q = \nu(g)$  et  $E \in \mathbb{R}$ . On définit en outre une application  $\tau_q : y \mapsto y^{-q}$ , décroissante sur  $]0; 1]$ , et on pose  $G = \tau_q \circ g \circ \tau_q^{-1}$ .

On peut vérifier que  $\tau_q$  est un difféomorphisme, bien que l'énoncé ne le demande pas :  $\tau_q$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et

$$\forall y \in ]0; 1] \quad \tau_q'(y) = \frac{-q}{y^{q+1}} < 0$$

donc (le raisonnement est identique à celui de la question III.A.3.a) la fonction  $\tau_q$  décrit un  $\mathcal{C}^\infty$ -difféomorphisme **décroissant** de  $]0; 1]$  sur son image  $[1; +\infty[$ . Sa réciproque est définie par

$$\forall x \in [1; +\infty[ \quad \tau_q^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt[q]{x}}$$

Remarquons également que  $g$  est une application de  $]0; 1]$  dans lui-même via la propriété i) de  $\mathcal{E}$  ; de ce fait,  $G$  est bien définie sur  $[1; +\infty[$ .

**III.B.1.a** D'après l'expression de  $\theta_q$ , on a

$$\forall y \in ]0; 1[ \quad \tau_q \circ \theta_q(y) = \frac{1 + y^q}{y^q} = 1 + \frac{1}{y^q} = 1 + \tau_q(y)$$

si bien que

$$\boxed{T_q = \tau_q \circ \theta_q \circ \tau_q^{-1} = 1 + \text{Id}_{[1; +\infty[}}$$

**III.B.1.b** Comme  $([0; 1], g) \in \mathcal{E}_1^*$ , on déduit de la propriété ii) que

$$\forall y \in ]0; 1[ \quad g(y) < y$$

soit

$$\forall x \in [1; +\infty[ \quad g \circ \tau_q^{-1}(x) < \tau_q^{-1}(x)$$

d'où

$$\boxed{\forall x \in [1; +\infty[ \quad G(x) > x}$$

grâce à la stricte décroissance de  $\tau_q$ . Enfin, d'après la propriété iii),  $g'$  est strictement positive sur  $[0; 1]$ , donc la fonction  $g$  est strictement croissante sur  $[0; 1]$  : comme  $\tau_q$  et sa réciproque sont toutes deux strictement décroissantes, il vient par composition

$$\boxed{G \text{ est strictement croissante sur } [1; +\infty[.}$$

**III.B.1.c** La fonction  $g$  étant de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $[0; 1]$ , elle admet des dérivées et des développements limités de tout ordre en 0. On a alors, d'après le développement limité de  $g$  en 0 à l'ordre  $2q + 1$ ,

$$g(y) \underset{y \rightarrow 0}{=} y - \frac{y^{q+1}}{q} + E y^{2q+1} + O(y^{2q+2})$$

De plus,

$$\forall x \in [1; +\infty[ \quad \tau_q^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt[q]{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

d'où

$$\begin{aligned} g \circ \tau_q^{-1}(x) &= \frac{1}{\sqrt[q]{x}} - \frac{1}{q} \frac{1}{x^{1+1/q}} + E \frac{1}{x^{2+1/q}} + O\left(\frac{1}{x^{2+2/q}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt[q]{x}} \left[ 1 - \frac{1}{q} \frac{1}{x} + \frac{E}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^{2+1/q}}\right) \right] \end{aligned}$$

quand  $x$  tend vers l'infini. En appliquant  $\tau_q$ , il vient

$$\begin{aligned} G(x) &= x \left[ 1 - \frac{1}{q} \frac{1}{x} + \frac{E}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^{2+1/q}}\right) \right]^{-q} \\ &= x \left[ 1 + \frac{1}{x} - \frac{qE}{x^2} + \frac{q(q+1)}{2q^2 x^2} + O\left(\frac{1}{x^{2+1/q}}\right) \right] \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{G(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} x + 1 + \frac{R}{x} + O\left(\frac{1}{x^{1+1/q}}\right)}$$

**III.B.2.a** Commençons par minorer le terme général de la série associée à la suite  $(G^n)_{n \in \mathbb{N}}$  pour montrer la relation désirée. D'après la question III.B.1.b,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in [1; +\infty[ \quad G^{n+1}(x) - G^n(x) = G[G^n(x)] - G^n(x) > 0$$

De plus, le développement limité de  $G$  montre que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) - x = 1$ , d'où

$$\exists A \in [1; +\infty[ \quad \forall x > A \quad G(x) - x > \frac{2}{3}$$

Par définition de la fonction  $G$ ,  $G^n = \tau_q \circ g^n \circ \tau_q^{-1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . En outre, le couple  $([0; 1], g)$  appartient à  $\mathcal{E}$  donc la suite de fonctions  $(g^n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur  $[0; 1]$  vers 0, d'après la question I.B.3. Enfin, la fonction  $G$  est croissante sur  $[1; +\infty[$  soit

$$\forall x \in [1; +\infty[ \quad G^n(x) \geq G^n(1) = \frac{1}{[g^n(1)]^q} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

car 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} g^n(1) = 0^+ \quad \text{et} \quad q > 0$$

d'où 
$$\exists n_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_1 \quad \forall x \in [1; +\infty[ \quad G^n(x) > A$$

si bien que 
$$\boxed{\forall n \geq n_1 \quad \forall x \in [1; +\infty[ \quad G^{n+1}(x) - G^n(x) > \frac{2}{3}}$$

Par suite, on obtient pour  $n \geq n_1$  et  $x \in [1; +\infty[$

$$\begin{aligned} G^n(x) &= G^0(x) + \sum_{k=1}^n [G^k(x) - G^{k-1}(x)] \\ &= x + \sum_{k=1}^{n_1} \underbrace{G^k(x) - G^{k-1}(x)}_{>0} + \sum_{k=n_1+1}^n \underbrace{G^k(x) - G^{k-1}(x)}_{>2/3} \end{aligned}$$

donc 
$$\forall n \geq n_1 \quad \forall x \in [1; +\infty[ \quad G^n(x) > x + \frac{2(n - n_1)}{3}$$

Enfin, 
$$\frac{2(n - n_1)}{3} \geq \frac{n}{2} \iff 4(n - n_1) \geq 3n \iff n \geq 4n_1$$

Par conséquent, il vient en posant  $n_0 = 4n_1$ ,

$$\boxed{\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in [1; +\infty[ \quad G^n(x) \geq x + \frac{n}{2}}$$

Pour plus de sûreté par la suite, on supposera que  $n_0$  est choisi de façon que  $n_0 \geq 2$ . Cela sera utile en particulier dans la question suivante.

**III.B.2.b** Pour  $n \geq n_0$  et  $x \in [1; +\infty[$ ,

$$|u_{n+1}(x) - u_n(x)| = G^{n+1}(x) - G^n(x) - 1 = G[G^n(x)] - G^n(x) - 1$$

Le développement asymptotique de  $G$  conduit à

$$G(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} x + 1 + \frac{R}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

et la fonction continue  $H : x \mapsto x[G(x) - x - 1]$  admet une limite finie  $R$  en  $+\infty$  : elle est de ce fait bornée sur  $[1; +\infty[$ , c'est-à-dire

$$\exists D > 0 \quad \forall x \in [1; +\infty[ \quad |G(x) - x - 1| \leq \frac{D}{x}$$

Ainsi, pour  $n \geq n_0$  et  $x \in [1; +\infty[$ , on a d'après la question précédente :

$$|u_{n+1}(x) - u_n(x)| \leq \frac{D}{G^n(x)} \leq \frac{D}{x + n/2} \leq \frac{2D}{n}$$

Posons  $C = 2D$  :

$$\boxed{\exists C > 0 \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in [1; +\infty[ \quad |u_{n+1}(x) - u_n(x)| \leq \frac{C}{n}}$$

En sommant cette relation entre les indices  $n_0$  et  $n - 1$ , il vient pour  $n \geq n_0$  et  $x \geq 1$

$$|u_n(x)| \leq |u_{n_0}(x)| + \sum_{k=n_0}^{n-1} |u_{k+1}(x) - u_k(x)| \leq |u_{n_0}(x)| + C \sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{k} \quad (7)$$

Or,  $\forall k \geq 2 \quad \forall x \in [k-1; k] \quad \frac{1}{k} \leq \frac{1}{x}$

donc  $\forall k \geq 2 \quad \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^k \frac{dx}{x} = \ln k - \ln(k-1)$

et  $\sum_{k=n_0}^{n-1} \frac{1}{k} \leq \ln(n-1) - \ln(n_0-1) \leq \ln n$

Soit  $X \geq 1$  : la fonction  $u_{n_0}$  est continue donc bornée sur  $[1; X]$ . Notons  $F \geq 0$  sa borne supérieure. On a alors, en réinjectant ces majorations dans (7),

$$\forall n \geq n_0 \quad \forall x \in [1; X] \quad \frac{|u_n(x)|}{\ln n} \leq \frac{F}{\ln n} + C \leq \frac{F}{\ln n_0} + C$$

d'où, en posant  $K = \frac{F}{\ln n_0} + C$ ,

$$\boxed{\forall X \geq 1 \quad \exists K > 0 \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in [1; X] \quad |u_n(x)| \leq K \ln n}$$

**III.B.2.c** La suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est définie par  $v_n = u_n - R \ln n = G^n - n - R \ln n$  pour tout entier  $n \geq 1$ . Pour étudier sa convergence, on va se servir de la série de terme général  $v_{n+1} - v_n = G^{n+1} - G^n - 1 - R \ln(1 + 1/n)$ . On a

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Soit  $x \in [1; +\infty[$  : on a  $G^n(x) \geq n/2$  pour tout  $n \geq n_0$  (cf. III.B.2.a) donc

$$\forall n \geq n_0 \quad \frac{1}{[G^n(x)]^{1+1/q}} \leq \frac{2^{1+1/q}}{n^{1+1/q}}$$

si bien que

$$\begin{aligned} G^{n+1}(x) - G^n(x) - 1 &= G[G^n(x)] - G^n(x) - 1 \\ &\stackrel{n \rightarrow \infty}{=} \frac{R}{G^n(x)} + O\left(\frac{1}{[G^n(x)]^{1+1/q}}\right) \quad (\text{d'après III.B.1.c}) \\ &\stackrel{n \rightarrow \infty}{=} \frac{R}{G^n(x)} + O\left(\frac{1}{n^{1+1/q}}\right) \end{aligned}$$

grâce à la majoration précédente. On déduit alors de ces deux développements asymptotiques :

$$\begin{aligned} \forall x \geq 1 \quad v_{n+1}(x) - v_n(x) &\stackrel{n \rightarrow \infty}{=} R \left( \frac{1}{G^n(x)} - \frac{1}{n} \right) + O\left(\frac{1}{n^{1+1/q}}\right) \\ &\stackrel{n \rightarrow \infty}{=} -\frac{R u_n(x)}{n G^n(x)} + O\left(\frac{1}{n^{1+1/q}}\right) \end{aligned}$$

Fixons un réel  $X \geq 1$ . D'après la question précédente, il existe  $K > 0$  tel que, pour tous  $x \in [1; X]$  et  $n \geq n_0$ , on ait  $|u_n(x)| \leq K \ln n$  et  $G^n(x) \geq n/2$ . En conséquence,

$$\forall x \in [1; X] \quad \forall n \geq n_0 \quad \left| \frac{R u_n(x)}{n G^n(x)} \right| \leq \frac{2KR \ln n}{n^2} = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

car, d'après les croissances comparées du logarithme et des fonctions polynomiales,  $\ln n = O(\sqrt{n})$  quand  $n$  tend vers l'infini. En passant à la borne supérieure sur  $[1; X]$ , on en déduit que

$$\|v_{n+1} - v_n\|_\infty \stackrel{n \rightarrow \infty}{=} O\left(\frac{1}{n^{1+1/q}}\right) + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

Grâce aux théorèmes de comparaison des séries à termes positifs, on conclut que la série de terme général  $v_{n+1} - v_n$  converge normalement sur  $[1; X]$  puisque  $1 + 1/q > 1$  et  $3/2 > 1$ . Ainsi, pour tout  $X \geq 1$ , la suite de fonctions  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur le segment  $[1; X]$ . On notera  $v$  sa limite, qui est alors continue. Pour résumer :

La suite de fonctions  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers une fonction  $v$  sur  $[1; +\infty[$ , et cette convergence est uniforme sur tout compact.

**III.B.2.d** Pour tout entier  $n$  strictement positif

$$v_n \circ G = G^{n+1} - n - \ln n = v_{n+1} + 1 + R \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

d'où, en passant à la limite quand  $n$  tend vers l'infini,

$$\boxed{\forall x \in [1; +\infty[ \quad v \circ G(x) = v(x) + 1} \quad (8)$$

**III.B.3.a** Intéressons-nous maintenant à la dérivabilité de  $G$  et de  $v$ . La quantité  $\tau_q(y) = y^{-q}$  tend vers l'infini quand  $y$  tend vers 0, donc le développement asymptotique calculé en III.B.1.c mène à

$$G\left(\frac{1}{y^q}\right) \underset{y \rightarrow 0}{=} \frac{1}{y^q} + \underbrace{1 + R y^q + o(y^q)}_{=H(y)}$$

Pour obtenir le développement désiré de  $G'$ , dérivons la relation ci-dessus ; pour cela, il faut d'abord s'assurer que cette opération est licite. Tout d'abord, la fonction  $H = G \circ \tau_q - \tau_q = \tau_q \circ g - \tau_q$  est, par composition, de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur l'intervalle  $]0; 1]$ . Examinons son comportement en 0. Pour  $y > 0$ ,

$$H(y) = \frac{1}{g^q(y)} - \frac{1}{y^q} = \frac{y^q - [g(y)]^q}{y^q [g(y)]^q} = \frac{y^q - [g(y)]^q}{y^{2q}} \times \left[ \frac{g(y)}{y} \right]^{-q}$$

Comme  $g(0) = 0$  et que  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , alors

$$\forall y \in ]0; 1] \quad g(y) = \int_0^y g'(t) dt = y \int_0^1 g'(uy) du \text{ en posant } t = uy.$$

Notons que  $(u, y) \mapsto g'(uy)$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur le compact  $[0; 1]^2$  : de ce fait, la fonction

$$\tilde{g} : y \mapsto \int_0^1 g'(uy) du$$

est aussi de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $[0; 1]$ , et elle prolonge la fonction  $y \mapsto g(y)/y$  en 0 par la valeur  $\tilde{g}(0) = g'(0)$ . De plus,  $g(y) > y$  pour tout  $y > 0$  et  $g'(0) \neq 0$ , si bien que  $\tilde{g}$  ne s'annule jamais du sur  $[0; 1]$ . De la même manière, on déduit du développement limité de  $g$  en 0 que

$$h(y) = y^q - [g(y)]^q = y^q [1 - (1 + O(y^q))^q] = O(y^{2q})$$

Par conséquent, les  $2q$  premières dérivées de  $h$  en 0 sont nulles : en itérant  $2q$  fois le procédé précédent, on en déduit que la fonction  $y \mapsto h(y)/y^{2q} = y^{-2q} [y^q - (g(y))^q]$  se prolonge également en une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $[0; 1]$ . Ainsi,  $H$  admet un prolongement de classe  $\mathcal{C}^\infty$  à  $[0; 1]$ , ce qui permet de dériver le développement limité (9) sur  $]0; 1]$  :

$$\frac{-q}{y^{q+1}} G' \left( \frac{1}{y^q} \right) \underset{y \rightarrow 0}{=} \frac{-q}{y^{q+1}} + q R y^{q-1} + o(y^{q-1})$$

soit 
$$G' \left( \frac{1}{y^q} \right) \underset{y \rightarrow 0}{=} 1 - R y^{2q} + o(y^{2q}) = 1 + O(y^{2q})$$

d'où

$$\boxed{G'(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 1 + O\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

**III.B.3.b** Puisque la fonction  $G$  est croissante sur  $[1; +\infty[$  (cf. III.B.1.b), il en va de même pour  $v_n = G^n - n - R \ln n$  (si  $n \geq 1$ ) et, par passage à la limite, pour la fonction  $v$ . Par suite, elle admet une limite  $\ell \in \mathbb{R}$  en  $+\infty$ . On déduit de la relation (8) et de  $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = +\infty$  que  $\ell = \ell + 1$ , soit  $\ell = +\infty$ . Ainsi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = +\infty$$

Reproduisons le raisonnement de la question II.D.1 : pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in [1; +\infty[$

$$\begin{aligned} v_{n+1}(x) &= G^{n+1}(x) - (n+1) - R \ln(n+1) \\ &= G[G^n(x)] - (n+1) - R \ln(n+1) \end{aligned}$$

d'où 
$$v_{n+1}'(x) = G^{n'}(x) \times G'[G^n(x)] = v_n'(x) \times G'[G^n(x)]$$

et 
$$\frac{v_{n+1}'(x)}{v_n'(x)} - 1 = G'[G^n(x)] - 1$$

Le résultat de la question précédente peut s'exprimer sous la forme

$$\exists U > 0 \quad \forall x \geq 1 \quad |G'(x) - 1| \leq \frac{U}{x^2}$$

Comme  $G^n(x) \geq n/2$  pour tout  $n \geq n_0$ , il vient alors

$$\forall n \geq n_0 \quad \forall x \in [1; +\infty[ \quad \left| \frac{v_{n+1}'(x)}{v_n'(x)} - 1 \right| \leq \frac{4U}{n^2}$$

si bien que 
$$\left\| \frac{v_{n+1}'}{v_n'} - 1 \right\|_{\infty} \underset{n \rightarrow \infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ceci montre que la série de terme général  $v_{n+1}'/v_n' - 1$  converge normalement sur  $[1; +\infty[$  : on conclut comme aux questions II.D.2 et I.D que la suite  $(v_n')_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément sur  $[1; +\infty[$  vers une fonction continue  $w$  à valeurs strictement positives. Alors la fonction  $v$  est dérivable sur  $[1; +\infty[$ , sa dérivée vaut  $v' = w$  et

$$v \text{ réalise un } \mathcal{C}^1\text{-difféomorphisme croissant de } [1; +\infty[ \text{ sur son image.}$$

Vue la limite en l'infini, l'image en question est  $v([1; +\infty[) = [v(1); +\infty[$ .

**III.B.4.a** Par définition,  $v_1 = G - 1$  donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n' = G' \times \prod_{k=1}^{n-1} \frac{v_{k+1}'}{v_k'}$$

Fixons  $n \in \mathbb{N}^*$ . On a vu en III.B.3 que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} G'(x) = 1$  et

$$\forall k \in (1, \dots, n) \quad \forall x \in [1; +\infty[ \quad \frac{v_{k+1}'(x)}{v_k'(x)} = G'[G^k(x)]$$

De plus, on a montré en III.B.1.b que  $G(x) > x$  pour tout  $x \geq 1$ , de sorte que  $G^k(x) > x$  pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  : alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} G^k(x) = +\infty$  et

$$\forall k \in (1, \dots, n) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{v_{k+1}'(x)}{v_k'(x)} = 1$$

donc 
$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} v_n'(x) = 1$$

Comme la suite  $(v_n')_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge uniformément vers  $v'$  sur  $[1; +\infty[$ , le théorème d'interversion des limites s'applique :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \lim_{n \rightarrow \infty} v_n'(x) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \lim_{x \rightarrow +\infty} v_n'(x) \right]$$

soit

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} v'(x) = 1}$$

**III.B.4.b** Soit  $f$  une fonction de  $[0; 1]$  dans lui-même telle que  $([0; 1], f)$  soit dans  $\mathcal{E}_1^*$  et  $\nu(f) = q$ . Les résultats de la section III.A.4 montrent qu'il existe un couple  $(I, g) \in \mathcal{E}_1^*$  conjugué à  $([0; 1], f)$  et vérifiant la relation (6).

Notons  $I \cap [0; 1] = [0; r]$ . On peut transposer les résultats de la section III.B pour le couple  $([0; r], g)$  : on définit de même le  $\mathcal{C}^\infty$ -difféomorphisme  $\tau_q$  sur  $]0; r]$  et  $G = \tau_q \circ g \circ \tau_q^{-1}$  sur  $[r'; +\infty[ = \tau_q([0; r])$ . Il existe alors, d'après la question III.B.3.b et la relation (8), un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme  $v$  défini sur  $[r', +\infty[$  et tel que  $v \circ G \circ v^{-1} = 1 + \text{Id}$ . Comme  $1 + \text{Id} = T_q$ ,

$$v \circ \tau_q \circ g \circ \tau_q^{-1} \circ v^{-1} = T_q = \tau_q \circ \theta_q \circ \tau_q^{-1}$$

soit

$$\boxed{(\tau_q^{-1} \circ v \circ \tau_q) \circ g \circ (\tau_q^{-1} \circ v \circ \tau_q)^{-1} = \theta_q}$$

La fonction  $h = \tau_q^{-1} \circ v \circ \tau_q$  définit alors un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $]0; r]$  sur son image. Nous allons même montrer que c'est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme sur  $[0; r]$  : pour cela, examinons le problème en 0. Puisque  $\lim_{y \rightarrow 0} \tau_q(y) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = +\infty$ ,

$$\lim_{y \rightarrow 0} h(y) = 0$$

On peut ainsi prolonger  $h$  par continuité en 0, en posant  $h(0) = 0$ . De plus,

$$\begin{aligned} \forall y \in ]0; r] \quad h'(y) &= (\tau_q)'(y) \times v'[\tau_q(y)] \times (\tau_q^{-1})'[v \circ \tau_q(y)] \\ &= \frac{-q}{y^{1+q}} \times v'\left(\frac{1}{y^q}\right) \times \left(\frac{-1}{q}\right) \times \left[v\left(\frac{1}{y^q}\right)\right]^{-1/q-1} \\ \forall y \in ]0; r] \quad h'(y) &= v'\left(\frac{1}{y^q}\right) \times \left[y^q v\left(\frac{1}{y^q}\right)\right]^{-1/q-1} \end{aligned}$$

On sait déjà que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} v'(x) = 1$ . Fixons  $\varepsilon > 0$  :

$$\exists A > 0 \quad \forall x \geq A \quad 1 - \frac{\varepsilon}{2} \leq v'(x) \leq 1 + \frac{\varepsilon}{2}$$

d'où, après intégration sur  $[A; x]$ ,

$$\forall x \geq A \quad \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)(x - A) \leq v(x) - v(A) \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)(x - A)$$

et

$$\forall x \geq A \quad 1 - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{v(A) - A}{x} \leq \frac{v(x)}{x} \leq 1 + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{v(A)}{x}$$

Comme  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1/x = 0$ , alors

$$\exists B > A \quad \forall x \geq B \quad \frac{|v(A)| + A}{x} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

si bien que 
$$\exists B > 0 \quad \forall x \geq B \quad \left| \frac{v(x)}{x} - 1 \right| \leq \varepsilon$$

Ceci étant vrai pour tout  $\varepsilon > 0$ , on en déduit que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x)/x = 1$ , d'où

$$\lim_{y \rightarrow 0} v' \left( \frac{1}{y^q} \right) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{y \rightarrow 0} y^q v \left( \frac{1}{y^q} \right) = 1 \quad \text{soit} \quad \lim_{y \rightarrow 0} h'(y) = 1.$$

On peut donc également prolonger  $h'$  par continuité à  $[0; r]$  en posant  $h'(0) = 1$ . Ainsi, la fonction  $h = \tau_q^{-1} \circ v \circ \tau_q$  s'étend en un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de  $[0; r]$  sur son image. Comme  $h \circ g \circ h^{-1} = \theta_q$  sur  $[0; r]$ , on en déduit que le couple  $(I, g)$  est conjugué à  $([0; 1], \theta_q)$ . Par conséquent,

$$([0; 1], f) \text{ est conjugué à } ([0; 1], \theta_q).$$

En d'autres termes, deux couples  $(I, f)$  et  $(J, g)$  de  $\mathcal{E}_1^*$  sont conjugués si et seulement si  $\nu(f) = \nu(g) \in \mathbb{N}^*$  : l'ensemble des classes de conjugaison de  $\mathcal{E}_1^*$  est donc en bijection avec  $\mathbb{N}^*$ .

**III.C** On définit la suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par la donnée initiale  $w_0 = \pi/8$  et la relation de récurrence  $w_{n+1} = \text{sh}(\sin w_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**III.C.1.a** Soit la fonction  $f : x \mapsto \text{sh}(\sin x)$  définie de  $I = [0; \text{sh}(1)]$  dans lui-même. Elle est continue et indéfiniment dérivable sur  $I$ . Remarquons que  $\text{sh}(1) < \pi/2$ . Par définition de la suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = f^n(w_0)$$

On vérifie alors par une récurrence immédiate que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n \in I$$

La fonction  $f$  est strictement croissante (comme composée de fonctions strictement croissantes) sur  $I \subset [0; \pi/2[$ . On vérifie aisément à la calculatrice que  $w_1 < w_0$ , d'où

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad f^n(w_1) < f^n(w_0) \quad \text{soit} \quad w_{n+1} < w_n$$

La suite récurrente  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est alors strictement décroissante, minorée et à valeurs dans  $I$  fermé : elle converge vers  $w \in I$ , qui est par continuité de  $f$  un point fixe de  $f$  sur  $I$ . Vérifions que 0 est l'unique point fixe de  $f$  sur cet intervalle.

$$\begin{aligned} \forall x \in I \quad f(x) &= \text{sh}(\sin x) \\ f'(x) &= \cos x \, \text{ch}(\sin x) \\ f^{(2)}(x) &= \cos^2 x \, \text{sh}(\sin x) - \sin x \, \text{ch}(\sin x) \\ f^{(3)}(x) &= \cos^3 x \, \text{ch}(\sin x) - 2 \cos x \, \sin x \, \text{sh}(\sin x) \\ &\quad - \cos x \, \sin x \, \text{sh}(\sin x) - \cos x \, \text{ch}(\sin x) \\ &= -\cos x \, \sin^2 x \, \text{ch}(\sin x) - 3 \cos x \, \sin x \, \text{sh}(\sin x) \end{aligned}$$

Ainsi,  $f^{(3)}(x) < 0$  pour tout  $x \in \mathbb{I} \setminus \{0\}$  : la fonction  $f^{(2)}$  est donc strictement décroissante sur  $\mathbb{I}$ . Comme  $f^{(2)}(0) = 0$ ,  $f^{(2)}(x) < 0$  pour tout  $x \in \mathbb{I} \setminus \{0\}$  et  $f'$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{I}$ . Enfin,  $f'(0) = 1$  et  $f'[\text{sh}(1)] > 0$ , de sorte que

$$\forall x \in \mathbb{I} \setminus \{0\} \quad 0 < f'(x) < 1$$

et par intégration  $\forall x \in \mathbb{I} \setminus \{0\} \quad f(x) < x$

car  $f(0) = 0$ . Ainsi, 0 est l'unique point fixe de  $f$  sur l'intervalle  $\mathbb{I}$ . Ceci montre que  $w = 0$  et que

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0}$$

La fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{I}$ . On a  $f(0) = 0$ ,  $f'(x) > 0$  pour tout  $x \in \mathbb{I}$ ,  $f'(0) = 1$  et  $f(x) < x$  pour tout  $x \in \mathbb{I} \setminus \{0\}$ . En conséquence, le couple  $(\mathbb{I}, f)$  appartient à  $\mathcal{E}_1$ . De plus, les développements limités en 0 du sinus et du sinus hyperbolique s'écrivent

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6) \quad \text{et} \quad \text{sh}(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)$$

On en déduit alors

$$\begin{aligned} f(x) &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^3}{6} \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)^3 + \frac{x^5}{120} + o(x^6) \\ &= x - \frac{x^5}{15} + o(x^6) \quad \text{quand } x \text{ tend vers } 0 \end{aligned}$$

Ainsi,  $f^{(2)}(0) = f^{(3)}(0) = f^{(4)}(0) = 0$  et  $f'(5) \neq 0$  donc

$$\boxed{(\mathbb{I}, f) \in \mathcal{E}_1^* \quad \text{et} \quad \nu(f) = 4}$$

Par conséquent, le couple  $(\mathbb{I}, f)$  est conjugué à  $([0; 1], \theta_4)$  : il existe alors deux réels  $r, r' > 0$  et un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme croissant  $h$  de  $[0; r']$  dans  $[0; r]$  tel que  $f = h \circ \theta_4 \circ h^{-1}$  sur  $[0; r]$ . D'après la convergence de  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad w_n \in [0; r]$$

d'où  $\forall n \geq n_0 \quad w_n = f^{n-n_0}(w_{n_0}) = h \circ \theta_4^{n-n_0} [h^{-1}(w_{n_0})]$

Soit  $x \in [0; 1]$  fixé. Notons  $\mathcal{P}(n) : \theta_4^n(x) = x (1 + nx^4)^{-1/4}$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

- $\mathcal{P}(0)$  est vraie car  $\theta_4^0 = \text{Id}$  donc  $\theta_4^0(x) = x$ .
- $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$  : supposons la propriété vraie au rang  $n \in \mathbb{N}$ . Alors

$$\begin{aligned} \theta_4^{n+1}(x) &= \theta_4[\theta_4^n(x)] = \frac{x (1 + nx^5)^{-1/4}}{\left(1 + x^4 (1 + nx^4)^{-1}\right)^{1/4}} \\ &= \frac{x}{(1 + (n+1)x^4)^{1/4}} \end{aligned}$$

donc  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.

- Conclusion :  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Ainsi on a, pour  $x \in [0; 1]$  fixé,

$$\theta_4^n(x) = (n + x^{-4})^{-1/4} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^{-1/4}$$

Enfin  $w_{n+n_0} = h \circ \theta_4^n [h^{-1}(w_{n_0})]$  pour  $n \in \mathbb{N}$ ; comme  $h(0) = 0$  et que  $h$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme au voisinage de 0, alors  $h(y) \underset{y \rightarrow 0}{\sim} y h'(0) \neq 0$ , d'où

$$w_{n+n_0} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{h'(0)}{n^{1/4}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{h'(0)}{(n + n_0)^{1/4}}$$

et

|                                                                                                                                       |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\exists a \in \mathbb{R}^* \quad w_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{a}{n^{1/4}} \quad \text{soit} \quad \alpha = 1/4.$ |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

**III.C.1.b** Pour obtenir le développement désiré, on va déterminer successivement des développements de plus en plus poussés de  $w_{n+1}^{-4} - w_n^{-4}$  et les sommer. C'est d'ailleurs comme cela que l'on aurait pu procéder pour répondre à la question précédente, en utilisant simplement le fait que  $w_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ .

De manière générale, soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite récurrente définie par

$$\begin{cases} u_0 \in I \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

où  $f$  est une fonction laissant stable un intervalle  $I$  contenant 0. On suppose que  $(u_n)$  tend vers 0 et que  $f$  admet un développement limité de la forme

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - Ax^a + o(x^a)$$

(avec  $A > 0$  et  $a > 1$ ). On peut déterminer un équivalent de  $u_n$  en calculant un développement de la quantité

$$v_n = u_{n+1}^{1-a} - u_n^{1-a}$$

En poussant le développement de  $f$  et en y réinjectant l'équivalent trouvé dans le développement de  $v_n$ , on obtient alors un développement asymptotique de  $u_n$ , que l'on peut affiner en itérant la méthode.

Comme la fonction  $f$  est impaire, de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , dans  $\mathcal{E}_1^*$  et que  $\nu(f) = 4$ , elle admet en 0 un développement limité de la forme

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + p x^5 + q x^7 + r x^9 + O(x^{10})$$

La suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0 donc lorsque  $n$  tend vers l'infini,

$$w_{n+1} = f(w_n) = w_n [1 + p w_n^4 + q w_n^6 + r w_n^8 + O(w_n^9)]$$

De plus,  $(1+x)^{-4} = 1 - 4x + 10x^2 + o(x^2)$  au voisinage de 0, donc

$$\begin{aligned} w_{n+1}^{-4} &= w_n^{-4} [1 + p w_n^4 + q w_n^6 + r w_n^8 + O(w_n^9)]^{-4} \\ &= w_n^{-4} [1 - 4p w_n^4 - 4q w_n^6 + (10p^2 - 4r) w_n^8 + O(w_n^9)] \end{aligned}$$

$$\text{et} \quad w_{n+1}^{-4} - w_n^{-4} = -4p - 4q w_n^2 + (10p^2 - 4r) w_n^4 + O(w_n^5) \quad (10)$$

quand  $n$  tend vers l'infini. C'est cette relation que l'on va sommer pour obtenir un développement asymptotique de  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Grâce à l'équivalent  $w_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} a n^{-1/4}$ , on a au second ordre en  $w_n$

$$w_{n+1}^{-4} - w_n^{-4} = -4p - 4q w_n^2 + O(w_n^3)$$

$$\text{d'où} \quad w_{n+1}^{-4} - w_n^{-4} = -4p - \frac{4a^2 q}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^{3/4}}\right) \quad (11)$$

quand  $n$  tend vers l'infini. Soit maintenant  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $\alpha \in ]0; 1[$ .

$$\forall t \in [k, k+1], \quad \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \frac{1}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$$

et après sommation, comme la série et l'intégrale présentes divergent,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \int_1^n \frac{dt}{t^\alpha} = \left[ \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_1^n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

Ainsi, la sommation de la relation (11) mène à

$$w_n^{-4} = -4pn - 8a^2 q \sqrt{n} + O(n^{1/4}) = n \left[ P + \frac{Q}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^{3/4}}\right) \right]$$

$$\text{donc} \quad w_n = n^{-1/4} \left[ P + \frac{Q}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n^{3/4}}\right) \right]^{-1/4} = \frac{a}{n^{1/4}} + \frac{b}{n^{3/4}} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

quand  $n$  tend vers l'infini.

Réinjectons ceci dans la relation (10) : il vient

$$\begin{aligned} w_{n+1}^{-4} - w_n^{-4} &= -4p - 4q \left( \frac{a^2}{\sqrt{n}} + \frac{2ab}{n} \right) + \frac{a^4(10p^2 - 4r)}{n} + O\left(\frac{1}{n^{5/4}}\right) \\ &= -4p - \frac{4qa^2}{\sqrt{n}} + \frac{(10p^2 - 4r) - 8abq}{n} + O\left(\frac{1}{n^{5/4}}\right) \end{aligned} \quad (12)$$

En procédant comme précédemment, on montre que

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \frac{1}{k} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k+1} \quad \text{d'où} \quad \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \int_1^n \frac{dt}{t} = \ln n$$

Il faut maintenant déterminer un développement plus précis de la série de terme général  $1/\sqrt{n}$ , et non plus un simple équivalent. Pour cela, posons

$$\forall \in \mathbb{N}^* \quad D_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$$

On a

$$\begin{aligned}
 D_{n+1} - D_n &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1/2} - 2\sqrt{n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1\right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{n}} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right) - 2\sqrt{n} \left[\frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] \\
 D_{n+1} - D_n &= O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)
 \end{aligned}$$

quand  $n$  tend vers l'infini, ce qui prouve que la série de terme général  $D_{n+1} - D_n$  et donc la suite  $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent. Ainsi,  $D_n = O(1)$  soit

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n \rightarrow \infty}{=} 2\sqrt{n} + O(1)$$

De la même manière, on retrouve aisément le résultat bien connu

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow \infty}{=} \ln n + O(1)$$

La sommation de la relation (12) entre les indices 0 et  $n-1$  conduit alors à

$$\begin{aligned}
 w_n^{-4} &\underset{n \rightarrow \infty}{=} Pn + Q\sqrt{n} + R \ln n + O(1) \\
 &\underset{n \rightarrow \infty}{=} n \left[ P + \frac{Q}{\sqrt{n}} + \frac{R \ln n}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right]
 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
 w_n &\underset{n \rightarrow \infty}{=} n^{-1/4} \left[ P + \frac{Q}{\sqrt{n}} + \frac{R \ln n}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right]^{-1/4} \\
 &\underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{a}{n^{1/4}} + \frac{b}{n^{3/4}} + \frac{c \ln n}{n^{5/4}} + O\left(\frac{1}{n^{5/4}}\right)
 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\exists a, b, c \in \mathbb{R} \quad w_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{a}{n^{1/4}} + \frac{b}{n^{3/4}} + \frac{c \ln n}{n^{5/4}} + O\left(\frac{1}{n^{5/4}}\right)$$

**III.C.2** Voici les résultats en Maple. D'abord, créons la procédure permettant de calculer la fonction  $f$  :

```
f := proc(x)
    evalf(sinh(sin(x)))
end proc
```

On peut en profiter pour calculer que  $w_1 - w_0 = f(\pi/8) - \pi/8 \simeq -0,00060568 < 0$ , ce que l'on avait utilisé pour montrer la décroissance de la suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

Passons maintenant au calcul des coefficients du développement asymptotique. On commence par faire une boucle et calculer successivement les termes  $w_n$ , ainsi que les quantités  $a_n = n^{1/4}w_n$ , en partant de  $n = 1$ . La boucle prend en entrée un paramètre réel  $M$  et s'arrête dès que la condition

$$\underbrace{\left| \frac{a_n - a_{n-1}}{a_n} \right|}_{=x} + \underbrace{\left| \frac{a_{n-1} - a_{n-2}}{a_{n-2}} \right|}_{=y} < 1/M$$

est satisfaite pour  $n \geq 50$ . Plus prosaïquement, cela signifie que l'on s'estime proche de la limite effective dès que les variations relatives restent en dessous d'un certain

seuil deux fois de suite. Ensuite, on prend la valeur ainsi trouvée pour  $a$  et on réitère le procédé pour le calcul de  $b$  et de  $c$ . Pour  $M = 1\,000\,000$ , on trouve alors

$$a = 1,387018188 \quad b = 4,297750503 \quad c = 253,2019201$$

les trois boucles successives s'arrêtant pour les valeurs  $n = 8\,235,823\,386$  et  $2\,123\,171$  respectivement.

Voici le programme utilisé pour parvenir à ces résultats :

```
boucle := proc(M)

local a, aa, b, bb, c, cc, n, x, y, w ;
aa := 0 ; bb := 0 ; cc := 0 ;
x := 1 ; y := 1 ; n := 1 ;
w := f(1/8 * pi) ; a := w ;

while n < 50 or 1/M < x+y do
    aa := a ; n := n + 1 ; w := f(w) ;
    a := evalf( n ^ .25 * w) ; x := y ;
    y := abs((a - aa) / a)
end do ;

printf('a = %a', a) ; print() ;
printf('n = %a', n) ; print() ;
b := evalf((w - aa / n ^ .25) * n ^ .25) ;
x := 1 ; y := 1 ;

while 1/M < x + y do
    bb := b ; n := n + 1 ; w := f(w) ;
    b := evalf((w - a / n ^ {.25}) * n ^ {.75}) ;
    x := y ; y := abs((b - bb) / b)
end do ;

printf('b = %a', b) ; print() ;
printf('n = %n', n) ; print() ;
c := evalf((w - a / n ^ .25 - bb / n ^ .75) * n ^ 1.25 / ln(n)) ;
x := 1 ; y := 1 ;

while 1/M < x + y do
    cc := c ; n := n + 1 ; w := f(w) ;
    c := evalf((w - a / n ^ .25 - b / n ^ .75) * n ^ 1.25 / ln(n)) ;
    x := y ; y := abs((c - cc) / c)
end do

printf('c = %a', c) ; print() ;
printf('n = %a', n) ; print() ;
end proc
```