PARTIE III

III.1 Ici, nous allons en profiter pour faire un peu mieux que ce que suggère l'énoncé et montrer au passage – et par récurrence – que les suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont bien définies. Considérons la propriété $\mathscr{P}$ définie pour $k \in \mathbb{N}$ par $\mathscr{P}(k)$: « a_k et b_k sont bien définis et tous deux strictement positifs ».

- $\underline{\mathscr{P}(0)}$ est vraie puisque $a_0 = a > 0$ et $b_0 = 1 > 0$.
- $\underline{\mathscr{P}(k) \Longrightarrow \mathscr{P}(k+1)}$: supposons la propriété $\mathscr{P}$ vraie au rang $k \in \mathbb{N}$. Alors a_k et b_k sont strictement positifs donc
$$a_{k+1} = \frac{1}{2}\left(a_k + \frac{1}{b_k}\right) > 0 \quad \text{et} \quad b_{k+1} = \frac{1}{2}\left(b_k + \frac{1}{a_k}\right) > 0$$
sont bien définis, ce qui signifie que $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.
- Conclusion : d'après le principe de récurrence, la proposition $\mathscr{P}(k)$ est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$, ce qui prouve que

> Les suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont bien définies et ne comportent que des termes strictement positifs.

III.2.a On a d'après l'énoncé
$$\forall\, k \in \mathbb{N} \qquad \left\{\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{1}{2}\left(a_k + \frac{1}{b_k}\right) = \frac{1 + a_k\, b_k}{2\, b_k} \\ b_{k+1} &= \frac{1}{2}\left(b_k + \frac{1}{a_k}\right) = \frac{1 + a_k\, b_k}{2\, a_k} \end{aligned}\right.$$

donc
$$\forall\, k \in \mathbb{N} \qquad v_{k+1} = \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} = \frac{a_k}{b_k} = v_k$$

si bien que $\boxed{\text{La suite } (v_k)_{k\in\mathbb{N}} \text{ est constante et égale à } v_0 = a.}$

III.2.b On a, grâce aux relations précédentes
$$\forall\, k \in \mathbb{N} \qquad u_{k+1} = a_{k+1}\, b_{k+1} = \frac{(1 + a_k b_k)^2}{4\, a_k b_k}$$

soit
$$\boxed{\forall\, k \in \mathbb{N} \qquad u_{k+1} = \frac{(1 + u_k)^2}{4 u_k} = \frac{1 + 2u_k + {u_k}^2}{4 u_k}}$$

III.2.c On déduit du résultat ci-dessus que
$$\forall\, k \in \mathbb{N} \qquad u_{k+1} - 1 = \frac{1 + 2u_k + {u_k}^2 - 4u_k}{4u_k} = \frac{(1 - u_k)^2}{4u_k}$$

Comme $u_k = a_k b_k > 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ d'après la question III.1, on déduit de la relation ci-dessus que
$$\boxed{\forall\, k \geqslant 1 \qquad u_k \geqslant 1}$$

> Bien que la forme du résultat puisse nous inciter à effectuer une récurrence, il faut résister à cette tentation ici car la démonstration directe est infiniment plus simple.

III.2.d Étudions maintenant la monotonie de la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Nous avons

$$\forall\, k \in \mathbb{N} \qquad u_{k+1} - u_k = \frac{1 + 2u_k - 3{u_k}^2}{4u_k} = \frac{(1-u_k)(1+3u_k)}{4u_k}$$

Or, $u_k \geqslant 1$ donc $u_{k+1} \leqslant u_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est ainsi décroissante et minorée par 1, si bien qu'elle converge vers une limite $\ell \geqslant 1$. En passant à la limite dans la relation établie ci-dessus, on obtient

$$\frac{(1-\ell)(1+3\ell)}{4\ell} = 0 \iff (1-\ell)(1+3\ell) = 0 \iff \ell \in \{-3, 1\}$$

Comme $\ell \geqslant 1$, on a nécessairement $\ell = 1$. Nous avons ainsi démontré que

$$\boxed{\text{La suite } (u_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \text{ est décroissante et converge vers } \ell = 1.}$$

III.3 D'après la question III.2.a, la suite $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est constante et égale à a si bien que $a_k = a\, b_k$ pour tout k. De ce fait $u_k = a_k b_k = a{b_k}^2 = {a_k}^2/a$ d'où

$$\forall\, k \in \mathbb{N} \qquad a_k = \sqrt{a\, u_k} \quad \text{et} \quad b_k = \sqrt{\frac{u_k}{a}}$$

par positivité de a_k et b_k. La convergence de $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vers $\ell = 1$ établie ci-dessus implique alors que

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} a_k = \sqrt{a} \quad \text{et} \quad \lim_{k\to+\infty} b_k = \sqrt{a^{-1}}}$$

C. Théorème taubérien

> Il y a une coquille dans l'énoncé : il faut bien sûr lire $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ au lieu de $\sum\limits_{k=0}^{n} a_n$.

8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition

$$\mathrm{S}_{\lfloor \beta n \rfloor} - \mathrm{S}_n = \sum_{k=n+1}^{\lfloor \beta n \rfloor} a_k \leqslant (\lfloor \beta n \rfloor - n)\, a_n$$

car $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Comme $\beta > 1$, on a $\beta n > n$ donc $\lfloor \beta n \rfloor \geqslant n$, par définition de la partie entière. Si $\lfloor \beta n \rfloor - n \neq 0$, on a donc $\lfloor \beta n \rfloor - n > 0$, d'où

$$\frac{\mathrm{S}_{\lfloor \beta n \rfloor} - \mathrm{S}_n}{\lfloor \beta n \rfloor - n} \leqslant a_n$$

De la même façon, il vient

$$\mathrm{S}_n - \mathrm{S}_{\lfloor \alpha n \rfloor} = \sum_{\lfloor \alpha n \rfloor + 1}^{n} a_k \geqslant (n - \lfloor \alpha n \rfloor) a_n$$

toujours par décroissance de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Comme $\alpha < 1$, on a $\alpha n < n$ d'où $\lfloor \alpha n \rfloor \leqslant \alpha n < n$. Ainsi $n - \lfloor \alpha n \rfloor > 0$, donc

$$a_n \leqslant \frac{\mathrm{S}_n - \mathrm{S}_{\lfloor \alpha n \rfloor}}{n - \lfloor \alpha n \rfloor}$$

Par suite $$\boxed{\frac{\mathrm{S}_{\lfloor \beta n \rfloor} - \mathrm{S}_n}{\lfloor \beta n \rfloor - n} \leqslant a_n \leqslant \frac{\mathrm{S}_n - \mathrm{S}_{\lfloor \alpha n \rfloor}}{n - \lfloor \alpha n \rfloor}}$$

> Nous avons justifié que l'inégalité de droite est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Celle de gauche est vraie lorsque $\lfloor \beta n \rfloor - n \neq 0$. Nous étudierons ce cas lorsque nous en aurons besoin (c'est-à-dire à la question 10).

9 Soient $\gamma > 0$ et n un entier naturel non nul. Par définition de la partie entière

$$\gamma n - 1 \leqslant \lfloor \gamma n \rfloor \leqslant \gamma n \qquad \text{d'où} \qquad \gamma - \frac{1}{n} \leqslant \frac{\lfloor \gamma n \rfloor}{n} \leqslant \gamma$$

ce qui prouve que $\lfloor \gamma n \rfloor / n$ converge vers $\gamma > 0$, donc, en passant à l'inverse,

$$\boxed{\left(\frac{n}{\lfloor \gamma n \rfloor}\right)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } \frac{1}{\gamma}.}$$

Par hypothèse, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n/\sqrt{n} = 2$. Or, en vertu de la minoration $\gamma n - 1 \leqslant \lfloor \gamma n \rfloor$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \lfloor \gamma n \rfloor = +\infty$, donc par composition

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{S}_{\lfloor \gamma n \rfloor}}{\sqrt{\lfloor \gamma n \rfloor}} = 2$$

En écrivant $$\frac{\mathrm{S}_{\lfloor \gamma n \rfloor}}{\sqrt{n}} = \frac{\mathrm{S}_{\lfloor \gamma n \rfloor}}{\sqrt{\lfloor \gamma n \rfloor}} \times \sqrt{\frac{\lfloor \gamma n \rfloor}{n}}$$

on en déduit, par produit, que

$$\boxed{\left(\frac{\mathrm{S}_{\lfloor \gamma n \rfloor}}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 2\sqrt{\gamma}.}$$

10 Puisque $\beta - 1 > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0(\beta - 1) \geqslant 1$. Soit $n \geqslant n_0$ un entier naturel. Il vient donc $n < n + 1 \leqslant \beta n$. L'entier $(n+1)$ est inférieur ou égal à βn donc, par définition de la partie entière, $n < n + 1 \leqslant \lfloor \beta n \rfloor \leqslant \beta n$. En particulier, $\lfloor \beta n \rfloor - n$ n'est pas nul. On peut donc utiliser le résultat de la question 8 : pour tout entier $n \geqslant n_0$ on a

$$\frac{\mathrm{S}_{\lfloor \beta n \rfloor} - \mathrm{S}_n}{\lfloor \beta n \rfloor - n} \leqslant a_n \leqslant \frac{\mathrm{S}_n - \mathrm{S}_{\lfloor \alpha n \rfloor}}{n - \lfloor \alpha n \rfloor}$$

d'où
$$\frac{\sqrt{n}\,\mathrm{S}_{\lfloor \beta n \rfloor} - \sqrt{n}\,\mathrm{S}_n}{\lfloor \beta n \rfloor - n} \leqslant \sqrt{n}\,a_n \leqslant \frac{\sqrt{n}\,\mathrm{S}_n - \sqrt{n}\,\mathrm{S}_{\lfloor \alpha n \rfloor}}{n - \lfloor \alpha n \rfloor}$$

soit encore
$$\frac{\dfrac{\mathrm{S}_{\lfloor \beta n \rfloor}}{\sqrt{n}} - \dfrac{\mathrm{S}_n}{\sqrt{n}}}{\dfrac{\lfloor \beta n \rfloor}{n} - 1} \leqslant \sqrt{n}\,a_n \leqslant \frac{\dfrac{\mathrm{S}_n}{\sqrt{n}} - \dfrac{\mathrm{S}_{\lfloor \alpha n \rfloor}}{\sqrt{n}}}{1 - \dfrac{\lfloor \alpha n \rfloor}{n}} \tag{$\star$}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{S}_n/\sqrt{n} = 2$ et, d'après la question 9, pour tout réel $\gamma > 0$,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\mathrm{S}_{\lfloor \gamma n \rfloor}}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{\gamma} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{\lfloor \gamma n \rfloor}{n} = \gamma$$

donc
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\dfrac{\mathrm{S}_{\lfloor \gamma n \rfloor}}{\sqrt{n}} - \dfrac{\mathrm{S}_n}{\sqrt{n}}}{\dfrac{\lfloor \gamma n \rfloor}{n} - 1} = \frac{2(\sqrt{\gamma} - 1)}{\gamma - 1}$$

Ce résultat, utilisé avec β et α, montre que, pour n assez grand, on a

$$\frac{2(\sqrt{\beta} - 1)}{\beta - 1} - \varepsilon \leqslant \frac{\dfrac{\mathrm{S}_{\lfloor \beta n \rfloor}}{\sqrt{n}} - \dfrac{\mathrm{S}_n}{\sqrt{n}}}{\dfrac{\lfloor \beta n \rfloor}{n} - 1} \qquad \text{et} \qquad \frac{\dfrac{\mathrm{S}_n}{\sqrt{n}} - \dfrac{\mathrm{S}_{\lfloor \alpha n \rfloor}}{\sqrt{n}}}{1 - \dfrac{\lfloor \alpha n \rfloor}{n}} \leqslant \frac{2(1 - \sqrt{\alpha})}{1 - \alpha} + \varepsilon$$

Avec $(\star)$, on obtient ainsi que, pour n assez grand,

$$\boxed{\frac{2(\sqrt{\beta} - 1)}{\beta - 1} - \varepsilon \leqslant \sqrt{n}\,a_n \leqslant \frac{2(1 - \sqrt{\alpha})}{1 - \alpha} + \varepsilon}$$

11 Soit $\varepsilon > 0$. Pour $x > 0$ et $x \neq 1$, on a

$$\frac{2(\sqrt{x} - 1)}{x - 1} = \frac{2(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \frac{2}{\sqrt{x} + 1}$$

qui tend vers 1 lorsque x tend vers 1. Il existe alors $\alpha < 1$ et $\beta > 1$ tels que

$$1 - \varepsilon < \frac{2(\sqrt{\beta} - 1)}{\beta - 1} \qquad \text{et} \qquad \frac{2(\sqrt{\alpha} - 1)}{\alpha - 1} < 1 + \varepsilon$$

Ces deux inégalités, combinées avec le résultat de la question 10, montrent que, pour tout entier naturel n assez grand, on a

$$1 - 2\varepsilon < \sqrt{n}\,a_n < 1 + 2\varepsilon$$

ce qui prouve que
$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n}\,a_n = 1}$$