Étude de marche aléatoire

Notations

On rappelle l'expression des coefficients binomiaux. Lorsque k et n sont deux entiers, on pose :

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} \text{ , si } 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0 \text{ , sinon} \end{cases} .$$

On pourra utiliser sans démonstration l'équivalent de Stirling, valable lorsque l'entier naturel n tend vers $+\infty$:

$$n! \underset{n \longrightarrow +\infty}{\simeq} \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}.$$

1 Une propriété sur les sommes de Riemann

Dans toute la suite, pour tous réels $a < b$, on note $\mathscr{D}_{a,b}$ l'ensemble des fonctions $f :]a,b[\longrightarrow \mathbf{R}$ continues sur l'intervalle $]a,b[$, intégrables sur $]a,b[$ et vérifiant de plus :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\,dt.$$

1 ▷ Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction continue. Démontrer que la restriction g de la fonction f à l'intervalle $]a,b[$ appartient à l'ensemble $\mathscr{D}_{a,b}$.

2 ▷ En posant pour tout entier $k \geqslant 1$, $a_k = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{2^{k+1}}$ et $b_k = \dfrac{1}{k} + \dfrac{1}{2^{k+1}}$, montrer que l'on peut choisir un entier $k_0 \geqslant 1$ tel que :

$$\forall k \geqslant k_0,\ b_{k+1} < a_k.$$

En déduire que la fonction $f :]0,1[\longrightarrow \mathbf{R}$ définie par :

$$f : t \longmapsto \begin{cases} k^2 \cdot 2^{k+1} \cdot (t - a_k), \text{ si il existe un entier } k \geqslant k_0 \text{ tel que } t \in \left[a_k, a_k + \dfrac{1}{2^{k+1}}\right] \\ k^2 \cdot 2^{k+1} \cdot (b_k - t), \text{ si il existe un entier } k \geqslant k_0 \text{ tel que } t \in \left[a_k + \dfrac{1}{2^{k+1}}, b_k\right] \\ 0, \text{ sinon} \end{cases}$$

est une fonction bien définie et continue sur $]0,1[$, intégrable sur $]0,1[$ et que cette fonction f n'appartient pas à l'ensemble $\mathscr{D}_{0,1}$.

Dans la suite, on définit la fonction :

$$h : \left| \begin{array}{ccc}]0,1[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{\sqrt{t(1-t)}} \end{array} \right. .$$

3 ▷ Montrer que la fonction $\varphi : t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0,1[$, puis montrer que la fonction φ appartient à $\mathscr{D}_{0,1}$.

4 ▷ On note $\tilde{h}$ la restriction de la fonction h à l'intervalle $\left]0, \dfrac{1}{2}\right]$. Vérifier que la fonction $\tilde{h}$ est décroissante sur $\left]0, \dfrac{1}{2}\right[$, puis montrer que la fonction $\tilde{h}$ appartient à $\mathscr{D}_{0,\frac{1}{2}}$.

5 ▷ Montrer que la fonction h est intégrable sur $]0,1[$ et que :

$$\int_0^1 h(t)\ dt = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \tilde{h}(t)\ dt.$$

6 ▷ Prouver alors que :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{1}{2n} h\left(\frac{k}{2n}\right) = \int_0^1 h(t)\ dt.$$

7 ▷ Montrer que :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n+1} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} h(t)\ dt.$$

En déduire que :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2n+1} h\left(\frac{k}{2n+1}\right) = \int_0^1 h(t)\ dt.$$

8 ▷ Déduire des questions précédentes que la fonction h appartient à $\mathscr{D}_{0,1}$.

9 ▷ Montrer que :

$$\int_0^1 h(t)\ dt = \pi.$$

10 ▷ Montrer que lorsque n tend vers $+\infty$, on a un équivalent de la forme :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n \longrightarrow +\infty}{\sim} \lambda\sqrt{n},$$

où la constante λ est à préciser.

11 ▷ En déduire la limite :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}}.$$

On considère une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ de nombres réels strictement supérieurs à -1, convergente de limite nulle.

12 ▷ Montrer que :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{|\varepsilon_i|}{\sqrt{i(n-i)}} = 0.$$

13 ▷ En déduire que :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{i(n-i)}} \cdot \left(\frac{(1+\varepsilon_i)(1+\varepsilon_{n-i})}{1+\varepsilon_n} - 1 \right) = 0.$$