

I Les polynômes P_n

I.1 Si $j \geq k$, alors

$$\phi_k(j) = \frac{j(j-1)\dots(j-(k-1))}{k!} = \frac{j!}{k!(j-k)!} = \binom{j}{k}$$

et si $0 \leq j < k$, alors $\phi_k(j) = 0$. On a donc dans tous les cas la relation

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \phi_k(j) = \binom{j}{k}$$

I.2.a On a $\phi_0(X) = 1$, $\phi_1(X) = X$ et $\phi_2(X) = \frac{X(X-1)}{2}$ d'où l'on tire

$$P_0(X) = \phi_0(X)\phi_0(N-X) = 1$$

$$P_1(X) = \phi_0(X)\phi_1(N-X) - \phi_1(X)\phi_0(N-X) = N - 2X$$

ce qui donne

$$P_0(X) = 1 \quad \text{et} \quad P_1(X) = N - 2X$$

$$\begin{aligned} P_2(X) &= \phi_0(X)\phi_2(N-X) - \phi_1(X)\phi_1(N-X) + \phi_2(X)\phi_0(N-X) \\ &= \frac{(N-X)(N-X-1)}{2} - X(N-X) + \frac{X(X-1)}{2} \\ &= \frac{X^2 - X(2N-1) + N(N-1) - 2XN + 2X^2 + X^2 - X}{2} \end{aligned}$$

$$P_2(X) = \frac{4X^2 - X(4N) + N(N-1)}{2}$$

I.2.b Le degré de ϕ_k est k , le degré de ϕ_{n-k} est $n-k$, donc le degré de $\phi_k(X)\phi_{n-k}(N-X)$ est n . Le degré d'une somme étant inférieur au maximum des degrés, $\deg P_n \leq n$.

Calculons le coefficient du terme de degré n . S'il n'est pas nul, alors le degré est égal à n . Le coefficient de X^k dans ϕ_k est $\frac{1}{k!}$; le coefficient de X^{n-k} dans

$\phi_{n-k}(N-X)$ est $\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}$; par suite, le coefficient de X^n dans P_n est :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n=N} (-1)^k \frac{1}{k!} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} &= (-1)^n \sum_{k=0}^{n=N} \frac{1}{k!} \frac{1}{(n-k)!} \\ &= \frac{(-1)^n}{n!} \sum_{k=0}^{n=N} \binom{n}{k} \\ \sum_{k=0}^{n=N} (-1)^k \frac{1}{k!} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} &= \frac{(-1)^n}{n!} 2^n \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$\frac{(-1)^n 2^n}{n!}$$

I.2.c On utilise la question I.1 et on obtient

$$P_n(j) = \sum_{k=0}^{k=N} (-1)^k \phi_k(j) \phi_{n-k}(N-j) = \sum_{k=0}^{k=N} (-1)^k \binom{j}{k} \binom{N-j}{n-k}$$

I.3 On utilise la formule du binôme de Newton sur la fonction

$$f_j: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ u \longmapsto (1-u)^j(1+u)^{N-j} \end{cases}$$

Le coefficient de u^k dans $(1-u)^j$ est $(-1)^k \binom{j}{k}$. Le coefficient de u^{n-k} dans $(1+u)^{N-j}$ est $\binom{N-j}{n-k}$, donc le coefficient de u^n dans $(1-u)^j(1+u)^{N-j}$ est la somme sur tous les k possibles.

Ainsi,

$$\sum_{k=0}^{k=N} (-1)^k \binom{j}{k} \binom{N-j}{n-k} = P_n(j)$$

Pour l'origine des polynômes de Krawtchouk et des analogues, on peut se référer à l'ouvrage *Sphere Packings, lattices and Groups* de J.H. CONWAY et N.J.A. SLOANE, Édition Springer (p. 255), qui aborde également les questions de codes.

I.4.a On utilise le résultat précédent :

$$\begin{aligned} F(u, v) &= \sum_{j=0}^N \binom{N}{j} f_j(u) f_j(v) \\ &= \sum_{j=0}^N \binom{N}{j} (1-u)^j (1+u)^{N-j} (1-v)^j (1+v)^{N-j} \\ &= \sum_{j=0}^N \binom{N}{j} [(1-u)(1-v)]^j [(1+u)(1+v)]^{N-j} \\ &= [(1-u)(1-v) + (1+u)(1+v)]^N \\ &= (2 + 2uv)^N \end{aligned}$$

$$F(u, v) = 2^N (1 + uv)^N$$

ce qui donne la formule attendue, avec

$$\alpha = 2^N \quad \text{et} \quad \beta = N$$

I.4.b Si on prend un terme $Q_j = (uv)^j$ alors, en différentiant :

$$\frac{\partial^{a+b} Q_j}{\partial u^a \partial v^b} = \frac{\partial^a u^j}{\partial u^a} \frac{\partial^b v^j}{\partial v^b} = \frac{j!}{(j-a)!} u^{j-a} \frac{j!}{(j-b)!} v^{j-b}$$

Cette quantité ne peut être non nulle en 0 que si $j - a = 0$ et $j - b = 0$, auquel cas elle vaut $(a!)^2$. La fonction F s'exprime comme un polynôme en uv :

$$F(u, v) = 2^N \sum_{j=0}^{j=N} \binom{N}{j} (uv)^j$$

Si $a \neq b$, les dérivées $\frac{\partial^{a+b}(uv)^j}{\partial u^a \partial v^b}(0, 0)$ s'annulent, donc la dérivée $\frac{\partial^{a+b}F}{\partial u^a \partial v^b}(0, 0)$ s'annule également.

On recherche maintenant la dérivée $\frac{\partial^{2a}F}{\partial u^a \partial v^a}(0, 0)$. Pour cela on utilise le calcul déjà fait sur les dérivées de $(uv)^j$, et on obtient :

$$\boxed{\frac{\partial^{2a}F}{\partial u^a \partial v^a}(0, 0) = 2^N \binom{N}{a} (a!)^2}$$

car on suppose $a \leq N$ et $b \leq N$, tous les autres termes étant nuls.

I.5.a Il faut montrer la linéarité à droite et à gauche, la symétrie, la positivité et la positive définition.

Soient P, Q et R trois polynômes de $\mathbb{R}_N[X]$. On a

$$\begin{aligned} \langle \lambda P + \mu Q | R \rangle &= \sum_{j=0}^N \binom{N}{j} (\lambda P(j) + \mu Q(j)) R(j) \\ &= \sum_{j=0}^N \binom{N}{j} \lambda P(j) R(j) + \mu Q(j) R(j) \\ \langle \lambda P + \mu Q | R \rangle &= \lambda \langle P | R \rangle + \mu \langle Q | R \rangle \end{aligned}$$

La symétrie est évidente car $P(j)Q(j) = Q(j)P(j)$.

Si $P \in \mathbb{R}_N[X]$, alors on a

$$\langle P | P \rangle = \sum_{j=0}^N \binom{N}{j} [P(j)]^2 \geq 0$$

Enfin, si $P \in \mathbb{R}_N[X]$ vérifie $\langle P | P \rangle = 0$, alors d'après la formule ci-dessus, la relation $P(j) = 0$ est vraie pour tout j vérifiant $0 \leq j \leq N$. Le polynôme P a donc $N + 1$ racines ; comme il est de degré N , cela n'est possible que si $P = 0$.

Pour montrer que $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire il faut passer par les quatre points : linéarité, symétrie, positivité, positive définition. Cette méthode est préférable à toute autre.

I.5.b Puisque l'on semble nous y inviter, utilisons la formule donnant l'expression de $F(u, v)$:

$$\begin{aligned}
F(u, v) &= \sum_{j=0}^N \binom{N}{j} f_j(u) f_j(v) \\
&= \sum_{j=0}^N \binom{N}{j} \left[\sum_{n=0}^N P_n(j) u^n \right] \left[\sum_{p=0}^N P_p(j) v^p \right] \\
&= \sum_{j=0}^N \binom{N}{j} \left[\sum_{n=0, p=0}^N P_n(j) P_p(j) u^n v^p \right] \\
F(u, v) &= \sum_{n=0, p=0}^N u^n v^p \left[\sum_{j=0}^N \binom{N}{j} P_n(j) P_p(j) \right]
\end{aligned}$$

On obtient donc, d'après cette formule, la relation évidente

$$\frac{\partial^{a+b} F(u, v)}{\partial u^a \partial v^b} (0, 0) = a! b! \left[\sum_{j=0}^N \binom{N}{j} P_a(j) P_b(j) \right]$$

D'après le résultat précédent d'annulation, on a montré que

La famille $(P_n)_{0 \leq n \leq N}$ est orthogonale pour ce produit scalaire.

C'est une question assez « standard » de montrer qu'une famille de polynômes (P_n) est orthonormée pour un produit scalaire donné. Elle rarement facile à résoudre. En général la méthode est suggérée dans l'énoncé et permet de montrer que les polynômes sont orthogonaux ($\langle P_n | P_l \rangle = 0$). Pour déterminer les normes $\langle P_n | P_n \rangle$, il faut reprendre le calcul de $\langle P_n | P_l \rangle$ et en général la démonstration qui permettrait de montrer l'orthogonalité permet de calculer la norme.

I.6 L'expression de $f_j(u)$ est

$$f_j(u) = \sum_{n=0}^N P_n(j) u^n$$

En différentiant, on obtient

$$\frac{df_j}{du}(u) = \sum_{n=1}^N P_n(j) n u^{n-1}$$

En multipliant par $(1 - u^2)$, on trouve

$$(1 - u^2) \frac{df_j}{du}(u) = \sum_{n=1}^N P_n(j) n u^{n-1} - \sum_{n=1}^N P_n(j) n u^{n+1}$$

Le coefficient de u^m dans cette somme est :

$$P_{m+1}(j)(m+1) - P_{m-1}(j)(m-1)$$

Maintenant on a l'expression sans somme de $f_j(u)$, que l'on peut différentier par rapport à u :

$$\begin{aligned}
(1-u^2)\frac{df_j(u)}{du} &= (1-u^2)(-j(1-u)^{j-1}(1+u)^{N-j} \\
&\quad + (N-j)(1-u)^j(1+u)^{N-j-1}) \\
&= (-j(1-u)^j(1+u)^{N+1-j} \\
&\quad + (N-j)(1-u)^{j+1}(1+u)^{N-j}) \\
&= -j(1+u)f_j(u) + (N-j)(1-u)f_j(u) \\
(1-u^2)\frac{df_j(u)}{du} &= (N-2j)f_j(u) + u(-N)f_j(u)
\end{aligned}$$

Le coefficient de u^m dans $(1-u^2)\frac{df_j(u)}{du}$ est donc

$$(N-2j)P_m(j) + (-N)P_{m-1}(j)$$

On a ainsi l'égalité

$$P_{m+1}(j)(m+1) - P_{m-1}(j)(m-1) = (N-2j)P_m(j) + (-N)P_{m-1}(j)$$

qui nous donne

$$(m+1)P_{m+1}(j) - (N-2j)P_m(j) + (N-m+1)P_{m-1}(j)(m-1) = 0$$

Cette égalité est valable pour $0 \leq j \leq N+1$. Les polynômes en j de l'égalité précédente sont de degré inférieur ou égal à N . Le polynôme

$$(m+1)P_{m+1}(X) - (N-2X)P_m(X) + (N-m+1)P_{m-1}(X)(m-1)$$

possède $N+1$ racines, donc il est identiquement nul. On a donc

$$(m+1)P_{m+1}(X) - (N-2X)P_m(X) + (N-m+1)P_{m-1}(X)(m-1) = 0$$

II Distance de Hamming

II.7.a Si $d(I, J) = 0$, cela signifie que $I \Delta J = \emptyset$ et donc que $I \cap J = I \cup J$. Les deux inclusions $I \cap J \subset I$ et $I \subset I \cap J$ donnent $I = I \cap J$, et par conséquent $I = J$.

Réciproquement, si $I = J$, alors

$$d(I, J) = 0$$

Si $d(I, J) = 1$, alors $I \cup J$ et $I \cap J$ diffèrent d'un élément x_0 . Vu les inclusions

$$I \cap J \subset I \subset I \cup J \quad \text{et} \quad I \cap J \subset J \subset I \cup J$$

on a obligatoirement $I = I \cap J$ ou $I = I \cup J$. On a de même $J = I \cap J$ ou $J = I \cup J$. On a forcément $I \neq J$, sinon on aurait $d(I, J) = 0$. Il ne reste que les deux cas suivants :

$$\{I \cap J = I \quad \text{et} \quad I \cup J = J\} \quad \text{ou} \quad \{I \cap J = J \quad \text{et} \quad I \cup J = I\}$$

On obtient par conséquent :

$$\boxed{J = I \cup \{x_0\} \quad \text{ou} \quad I = J \cup \{x_0\} \quad \text{avec} \quad x_0 \notin I \cap J}$$

L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ est muni d'une structure d'anneau commutatif où l'addition est Δ et le produit est $\cap$. On a également les relations $I\Delta J = {}^cI\Delta {}^cJ$. La règle d'associativité $(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C)$ permet par exemple de traiter rapidement la question suivante.

II.7.b L'ensemble $I\Delta J$ est l'ensemble des points de $I \cup J$ qui n'appartiennent pas à $I \cap J$.

Par conséquent $(I\Delta J)\Delta I$ est l'ensemble des points de $(I\Delta J) \cup I$ qui n'appartiennent pas à $(I\Delta J) \cap I$.

Mais on a de façon évidente $(I\Delta J) \cup I = I \cup J$ et $(I\Delta J) \cap I = I - J$. Par conséquent, $(I\Delta J)\Delta I$ est l'ensemble des points de $I \cup J$ qui n'appartiennent pas à $I - J$, et c'est donc J . On a ainsi $d(I\Delta J, I) = \text{Card } J$.

Les démonstrations précédentes sont un peu longues et n'apportent pas grand-chose : on peut aller nettement plus vite si l'on est sûr de soi. La question suivante doit, par contre, être très soigneusement rédigée.

II.8 Soit A une partie vérifiant $d(I, A) = 1$. Cela veut dire que A diffère de I par l'ajout ou le retrait d'un élément.

Supposons que $A = I \cup \{x_0\}$ avec $x_0 \in {}^cI$. On a $N - \text{Card } I$ choix possibles pour x_0 . Deux cas sont alors possibles : soit $x_0 \in J$, soit $x_0 \in {}^cJ$.

1. Si $x_0 \in J$, alors $d(J, A) = k - 1$ car on a enlevé l'un des éléments de la différence. Il y a $\text{Card } (J \cap {}^cI)$ cas de ce genre.
2. Si $x_0 \in {}^cJ$, alors $d(J, A) = k + 1$ car on a ajouté un élément à la différence. Il y a $\text{Card } ({}^cJ \cap {}^cI)$ cas de ce genre.

Supposons maintenant que $A = I - \{x_0\}$ avec $x_0 \in I$; il y a $\text{Card } I$ choix possibles pour x_0 . Deux cas sont alors possibles : soit $x_0 \in J$, soit $x_0 \in {}^cJ$.

1. Si $x_0 \in J$, alors $d(J, A) = k + 1$ car on a retiré un élément de $I \cap J$. La différence vient donc d'augmenter d'un élément. Il y a $\text{Card } (J \cap I)$ cas de ce genre.
2. Si $x_0 \in {}^cJ$, alors $d(J, A) = k - 1$ car on a retiré un élément de la différence. Il y a $\text{Card } ({}^cJ \cap I)$ cas de ce genre.

En résumé,

$$\gamma_j^k = \begin{cases} \text{Card } (J \cap I) + \text{Card } ({}^cJ \cap {}^cI) & \text{si } j = k + 1 \\ \text{Card } ({}^cJ \cap I) + \text{Card } (J \cap {}^cI) & \text{si } j = k - 1 \\ 0 & \text{si } j \neq k + 1 \text{ et } j \neq k - 1 \end{cases}$$

Il faut maintenant calculer chacun des termes des sommes, si cela est possible, naturellement. On sait que $({}^cJ) \cap ({}^cI) = {}^c(I \cup J)$, donc

$$\begin{aligned}
\gamma_{k+1}^k &= \text{Card } J \cap I + \text{Card } ({}^c J \cap {}^c I) \\
&= \text{Card } J \cap I + N - \text{Card } (J \cup I) \\
&= N - [\text{Card } J \cup I - \text{Card } (I \cap J)] \\
&= N - \text{Card } J \Delta I \\
\gamma_{k+1}^k &= N - k
\end{aligned}$$

Les quatre ensembles $J \cap I$, $({}^c J) \cap I$, $J \cap ({}^c I)$ et $({}^c J) \cap ({}^c I)$ forment une partition de E . Par conséquent,

$$\text{Card } (J \cap I) + \text{Card } ({}^c J \cap I) + \text{Card } (J \cap {}^c I) + \text{Card } ({}^c J \cap {}^c I) = N$$

d'où l'on tire $\gamma_{k+1}^k + \gamma_{k-1}^k = N$ et $\gamma_{k-1}^k = k$

On a donc :

$$\gamma_j^k = \begin{cases} N - k & \text{si } j = k + 1 \\ k & \text{si } j = k - 1 \\ 0 & \text{si } j \neq k + 1 \text{ et } j \neq k - 1 \end{cases}$$

On utilise ici, comme dans d'autres questions, l'égalité

$$\text{Card } I \cup J = \text{Card } I + \text{Card } J - \text{Card } I \cap J$$

III Matrice d'adjacence

III.9.a La distance de Hamming vaut $d(I, J) = \text{Card } I \Delta J \leq N$. Par conséquent, si $n > N$, alors

$$A_n = 0$$

Par contre, on ne peut avoir $d(I, J) = 0$ que si $I = J$. Par conséquent

$$A_0 = \mathcal{I}$$

III.9.b Si $A_1 A_m = (b_{pq})_{1 \leq p, q \leq 2^N}$ alors, par définition du produit matriciel,

$$b_{pq} = \sum_{i=1}^{2^N} (A_1)_{pi} (A_m)_{iq}$$

Les termes $(A_1)_{pi} (A_m)_{iq}$ sont nuls sauf si $(A_1)_{pi} = 1$ et $(A_m)_{iq} = 1$, c'est-à-dire $d(I_p, I_i) = 1$ et $d(I_i, I_q) = m$. Par conséquent, b_{pq} est le nombre d'ensembles I_j qui vérifient $d(I_p, I_j) = 1$ et $d(I_q, I_j) = m$. D'après la question II.8, si $d(I_p, I_q) = m + 1$ alors ce nombre est $m + 1$. Si on a $d(I_p, I_q) = m - 1$ alors ce nombre est $N - (m - 1)$. Pour les autres valeurs de $d(I_p, I_q)$ cela fait 0. On obtient donc finalement

$$b_{pq} = (m + 1)(A_{m+1})_{pq} + (N - (m - 1))(A_{m-1})_{pq}$$

d'où

$$A_1 A_m = (N - m + 1) A_{m-1} + (m + 1) A_{m+1}$$

III.10 On utilise la formule de récurrence sur les polynômes P_n de la question I.6 :

$$(m + 1)P_{m+1}(X) - (N - 2X)P_m(X) + (N - m + 1)P_{m-1}(X) = 0$$

On pose l'hypothèse de récurrence HR_m définie par :

$$A_m = P_m(A)$$

La formule de récurrence portant sur trois termes, il faut vérifier d'abord le rang 0 puis le rang 1. Puisque $A_0 = \mathcal{I}$ et $P_0 = 1$, on a le résultat au rang 0. On a également

$$P_1(A) = N - 2A = N\mathcal{I} - 2\left(\frac{1}{2}(N\mathcal{I} - A_1)\right) = N\mathcal{I} - (N\mathcal{I} - A) = A$$

On utilise la convention suivante : à 1 (élément neutre de $\mathbb{K}[X]$) on associe la matrice identité (élément neutre de $M_n(\mathbb{R})$).

HR_1 est donc vrai.

Supposons HR_m et HR_{m-1} vrais. On remplace X par A dans l'égalité polynomiale, ce qui donne

$$\begin{aligned} 0 &= (m + 1)P_{m+1}(A) - (N\mathcal{I} - 2A)P_m(A) + (N - m + 1)P_{m-1}(A) \\ &= (m + 1)P_{m+1}(A) - A_1 P_m(A) + (N - m + 1)P_{m-1}(A) \\ &= (m + 1)P_{m+1}(A) - A_1 A_m + (N - m + 1)A_{m-1} \\ &= (m + 1)P_{m+1}(A) - ((N - m + 1)A_{m-1} + (m + 1)A_{m+1}) \\ &\quad + (N - m + 1)A_{m-1} \\ &= (m + 1)P_{m+1}(A) - ((m + 1)A_{m+1}) \\ 0 &= (m + 1)(P_{m+1}(A) - A_{m+1}) \end{aligned}$$

et on a donc $P_{m+1}(A) = A_{m+1}$, ce qui prouve que HR_{m+1} est vrai et achève la récurrence.

$$P_m(A) = A_m$$

III.11 D'après la question I.2.c, $P_j(i)$ admet l'expression suivante :

$$P_j(i) = \sum_{k=0}^N (-1)^k \binom{i}{k} \binom{N-i}{j-k}$$

Quel est le nombre de $J \in \mathcal{P}(E)$ vérifiant $\text{Card } J = j$, $\text{Card } I = i$ et $\text{Card } I \cap J = k$?

On décompose J en deux parties : l'une incluse dans I qui est de cardinal k , l'autre incluse dans ${}^c I$ qui est de cardinal $j - k$:

1. il y a $\binom{i}{k}$ choix possibles pour la partie incluse dans I ;
2. il y a $\binom{N-i}{j-k}$ choix possibles pour la partie incluse dans cI , car $\text{Card } {}^cI = N - i$.

Les deux choix étant indépendants,

$$\text{Card} \left\{ \begin{array}{l} J \in \mathcal{P}(E) \text{ avec } \text{Card } J = j, \\ \text{Card } I \cap J = k \text{ et } \text{Card } I = i \end{array} \right\} = \binom{i}{k} \binom{N-i}{j-k}$$

Par conséquent, si on parcourt les cardinaux possibles pour $I \cap J$, on obtient

$$P_j(i) = \sum_{k=0}^N (-1)^k \text{Card} \left\{ \begin{array}{l} J \in \mathcal{P}(E) \text{ avec } \text{Card } J = j, \\ \text{Card } I \cap J = k \text{ et } \text{Card } I = i \end{array} \right\}$$

$$P_j(i) = \sum_{\substack{J \in \mathcal{P}(E) \\ \text{Card } J = j}} (-1)^{\text{Card } I \cap J}$$

III.12.a Si x appartient à $(I \Delta J) \cap K$, cela veut dire qu'il appartient à K et soit à I , soit à J . Par suite, il appartient à $I \cap K$ ou à $J \cap K$, d'où

$$(I \Delta J) \cap K = (I \cap K) \Delta (J \cap K)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} (-1)^{\text{Card } (I \Delta J) \cap K} &= (-1)^{\text{Card } (I \cap K) \Delta (J \cap K)} \\ &= (-1)^{\text{Card } (I \cap K) \cup (J \cap K) - \text{Card } (I \cap K) \cap (J \cap K)} \\ &= (-1)^{\text{Card } (I \cap K) + \text{Card } (J \cap K) - \text{Card } (I \cap K) \cap (J \cap K)} \\ &\quad \times (-1)^{-\text{Card } (I \cap K) \cap (J \cap K)} \\ &= (-1)^{\text{Card } (I \cap K) + \text{Card } (J \cap K) - 2 \text{Card } (I \cap K) \cap (J \cap K)} \\ &= (-1)^{\text{Card } (I \cap K) + \text{Card } (J \cap K)} \\ (-1)^{\text{Card } (I \Delta J) \cap K} &= (-1)^{\text{Card } (I \cap K)} (-1)^{\text{Card } (J \cap K)} \end{aligned}$$

En résumé on a

$$(-1)^{\text{Card } (I \Delta J) \cap K} = (-1)^{\text{Card } (I \cap K)} (-1)^{\text{Card } (J \cap K)}$$

III.12.b Notons $S_{I,J}$ la somme en question. On utilise ce qui précède :

$$S_{I,J} = \sum_{K \in \mathcal{P}(E)} (-1)^{\text{Card } (I \Delta J) \cap K}$$

Malgré la ressemblance avec la question III.11, on n'est pas dans le même cas car il n'y a aucune contrainte sur K . Pour chaque élément x de E il y a deux choix possibles : soit il appartient à K , soit il n'y appartient pas. On a également

$$(-1)^{\text{Card } (I \Delta J) \cap \{x_{i_1}, \dots, x_{i_r}\}} = \prod_{j=1}^{j=r} (-1)^{\text{Card } (I \Delta J) \cap \{x_{i_j}\}}$$

On a donc l'expression suivante pour la somme :

$$\begin{aligned} S_{I,J} &= \prod_{x \in E} ((-1)^{\text{Card } (I \Delta J) \cap \emptyset} + (-1)^{\text{Card } (I \Delta J) \cap \{x\}}) \\ &= \prod_{x \in E} (1 + (-1)^{\text{Card } (I \Delta J) \cap \{x\}}) \end{aligned}$$

Deux cas sont possibles :

1. Si $I = J$, alors $I \Delta J = \emptyset$ donc $(-1)^{\text{Card } (I \Delta J) \cap \{x\}} = 1$. Dans ces conditions,

$$\boxed{S_{I,J} = \prod_{x \in E} (1 + 1) = 2^{\text{Card } E} = 2^N}$$

2. Si $I \neq J$, alors $I \Delta J \neq \emptyset$; si x_0 est un élément de cet ensemble,

$$(1 + (-1)^{\text{Card } (I \Delta J) \cap \{x_0\}}) = 0$$

Le produit est donc nul, d'où

$$\boxed{S_{I,J} = 0}$$

III.13.a On a $(B_k)_{pq} = \frac{1}{2^N} \sum_{n=0}^N P_k(n) (A_n)_{pq}$

Or on sait que $(A_n)_{pq} = \begin{cases} 1 & \text{si } d(I_p, I_q) = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

La somme se réduit donc à

$$(B_k)_{pq} = \frac{1}{2^N} P_k(d(I_p, I_q))$$

On exprime à nouveau les éléments $(B_k)_{pq}$ sous forme de somme (avec la relation $\text{Card } I = d(I_p, I_q)$)

$$(B_k)_{pq} = \frac{1}{2^N} \sum_{\substack{J \in \mathcal{P}(E) \\ \text{Card } J = k}} (-1)^{\text{Card } I \cap J}$$

On peut prendre pour ensemble I l'ensemble $I_p \Delta I_q$, qui est de cardinal $d(I_p, I_q)$, ce qui donne

$$\begin{aligned} (B_k)_{pq} &= \frac{1}{2^N} \sum_{\substack{J \in \mathcal{P}(E) \\ \text{Card } J = k}} (-1)^{\text{Card } (I_p \Delta I_q) \cap J} \\ (B_k)_{pq} &= \frac{1}{2^N} \sum_{\substack{J \in \mathcal{P}(E) \\ \text{Card } J = k}} (-1)^{\text{Card } I_p \cap J} (-1)^{\text{Card } I_q \cap J} \end{aligned}$$

Le produit $B_k B_l$ admet l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
(B_k B_l)_{pq} &= \sum_{r=1}^{2^N} (B_k)_{pr} (B_l)_{rq} \\
&= \sum_{r=1}^{2^N} \frac{1}{2^N} P_k(d(I_p, I_r)) \frac{1}{2^N} P_l(d(I_r, I_q)) \\
(B_k B_l)_{pq} &= \sum_{r=1}^{2^N} \frac{1}{4^N} \sum_{\substack{J \in \mathcal{P}(E) \\ \text{Card } J=k}} \sum_{\substack{J' \in \mathcal{P}(E) \\ \text{Card } J'=l}} \\
&\quad (-1)^{\text{Card } I_p \cap J} (-1)^{\text{Card } I_r \cap J} (-1)^{\text{Card } I_r \cap J'} (-1)^{\text{Card } I_q \cap J'}
\end{aligned}$$

On intervertit les sommes, et on obtient :

$$\begin{aligned}
(B_k B_l)_{pq} &= \frac{1}{4^N} \sum_{\substack{J \in \mathcal{P}(E) \\ \text{Card } J=k}} \sum_{\substack{J' \in \mathcal{P}(E) \\ \text{Card } J'=l}} \\
&\quad \sum_{r=1}^{2^N} (-1)^{\text{Card } I_p \cap J} (-1)^{\text{Card } I_r \cap J} (-1)^{\text{Card } I_r \cap J'} (-1)^{\text{Card } I_q \cap J'} \\
&= \frac{1}{4^N} \sum_{\substack{J \in \mathcal{P}(E) \\ \text{Card } J=k}} \sum_{\substack{J' \in \mathcal{P}(E) \\ \text{Card } J'=l}} (-1)^{\text{Card } I_p \cap J} (-1)^{\text{Card } I_q \cap J'} \\
&\quad \sum_{r=1}^{2^N} (-1)^{\text{Card } I_r \cap J} (-1)^{\text{Card } I_r \cap J'} \\
(B_k B_l)_{pq} &= \frac{1}{4^N} \sum_{\substack{J \in \mathcal{P}(E) \\ \text{Card } J=k}} \sum_{\substack{J' \in \mathcal{P}(E) \\ \text{Card } J'=l}} \\
&\quad (-1)^{\text{Card } I_p \cap J} (-1)^{\text{Card } I_q \cap J'} \left\{ \begin{array}{ll} 2^N & \text{si } J = J' \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

Que se passe-t-il ? Si $k \neq l$, alors la condition $J = J'$ n'est jamais vérifiée et la somme fait zéro, ce qui nous donne

$$\boxed{B_k B_l = 0}$$

Par contre, si $k = l$, alors la condition $J = J'$ peut être vérifiée et la somme se réduit à

$$\begin{aligned}
(B_k B_k)_{pq} &= \frac{1}{4^N} \sum_{\substack{J \in \mathcal{P}(E) \\ \text{Card } J=k}} (-1)^{\text{Card } I_p \cap J} (-1)^{\text{Card } I_q \cap J} 2^N \\
&= \frac{1}{2^N} \sum_{\substack{J \in \mathcal{P}(E) \\ \text{Card } J=k}} (-1)^{\text{Card } I_p \cap J} (-1)^{\text{Card } I_q \cap J} \\
(B_k B_k)_{pq} &= (B_k)_{pq}
\end{aligned}$$

On a donc bien

$$(B_k)^2 = B_k$$

III.13.b La relation $(B_k)^2 = B_k$ signifie simplement que B_k est la matrice d'un projecteur. Les projecteurs se diagonalisent (puisqu'ils annulent le polynôme scindé à racines simples $X(X-1)$) et on obtient, en faisant les calculs dans une base diagonalisante, que $\text{Tr } B_k = \text{rg } B_k$. (En effet, les seules valeurs propres possibles d'un projecteur sont 0 et 1, comme on le constate aisément en utilisant la définition.)

Il suffit donc de calculer la trace de B_k . On constate d'abord que, si $n > 0$, alors $\text{Tr } A_n = 0$ car tous les termes de la diagonale sont nuls. On a donc

$$\text{Tr } B_k = \frac{1}{2^N} P_k(0) \text{Tr } \mathcal{I} = P_k(0)$$

On sait par ailleurs que $\phi_k(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k > 0 \end{cases}$

Cela nous donne $P_k(0) = \phi_k(N) = \binom{N}{k}$

et donc

$$\text{Tr } B_k = \text{rg } B_k = \binom{N}{k}$$

III.14.a Les N projecteurs commutent entre eux. Ils sont donc tous codiagonalisables. On connaît l'expression de B_k en fonction de A_n , mais il faut l'inverser ; on utilise pour cela le fait que les polynômes $(P_a)_{0 \leq a \leq N}$ forment une base orthogonale de $\mathbb{R}_N[X]$ pour le produit scalaire $\langle | \rangle$.

On reprend les calculs de la question I.5.b ; on calcule la norme euclidienne de ces polynômes avec la fonction $F(u, v)$ et on a

$$2^N \binom{N}{a} (a!)^2 = \frac{\partial^{2a} F(u, v)}{\partial u^a \partial v^a} (0, 0) = (a!)^2 \langle P_a | P_a \rangle$$

ce qui donne $\langle P_a | P_a \rangle = 2^N \binom{N}{a}$. La matrice $(P_k(n))_{0 \leq k, n \leq N}$ est inversible (les polynômes P_k étant de degré k , il suffit de se ramener par des opérations élémentaires à $Q_k = X^k$ et d'utiliser le déterminant de Van der Monde de la matrice $(n^k)_{0 \leq k, n \leq N}$). Par conséquent, on peut exprimer les A_n en fonction des B_k de façon unique. On pose

$$D_n = \binom{N}{n} \sum_{k=0}^N P_k(n) B_k$$

et on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^N} \sum_{n=0}^N P_k(n) D_n &= \frac{1}{2^N} \sum_{n=0}^N P_k(n) \binom{N}{n} \sum_{l=0}^N P_l(n) B_l \\
&= \frac{1}{2^N} \sum_{n=0}^N \sum_{l=0}^N P_k(n) \binom{N}{n} P_l(n) B_l \\
&= \frac{1}{2^N} \sum_{l=0}^N \sum_{n=0}^N P_k(n) \binom{N}{n} P_l(n) B_l \\
&= \frac{1}{2^N} \sum_{l=0}^N B_l \sum_{n=0}^N P_k(n) \binom{N}{n} P_l(n) \\
&= \frac{1}{2^N} \sum_{l=0}^N B_l \langle P_k | P_l \rangle \\
&= \frac{1}{2^N} B_k \langle P_k | P_k \rangle \\
&= \frac{1}{2^N} B_k 2^N \binom{N}{k}
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2^N} \sum_{n=0}^N P_k(n) D_n = B_k \binom{N}{k}$$

Par conséquent,
$$B_k = \frac{1}{\binom{N}{k}} \frac{1}{2^N} \sum_{n=0}^N P_k(n) D_n$$

ce qui nous donne, par unicité, $\frac{D_n}{\binom{N}{k}} = A_n$, puis finalement

$$A_n = \frac{1}{\binom{N}{k}} \binom{N}{n} \sum_{k=0}^N P_k(n) B_k$$

Les images des projecteurs sont en somme directe car $B_k B_l = 0$ pour $k \neq l$.
Les valeurs propres de A_n sont donc les réels

$$\lambda_{n,N}^k = \frac{1}{\binom{N}{k}} \binom{N}{n} P_k(n)$$

avec $0 \leq k \leq N$. Cela forme $N + 1$ valeurs propres.

La clef du calcul est la formule

$$P = \sum_{n=0}^N \langle P_k | P \rangle P_k$$

(très souvent utile) qui est vraie parce que les polynômes P_i forment une famille orthonormée.

III.14.b On a $\text{Im } B_k \oplus \text{Im } B_l$ si $k \neq l$. La multiplicité de la valeur propre $\lambda_{n,N}^k$ est simplement le rang de la matrice B_k , soit

$$\binom{N}{k}$$