

PROBLÈME 1

I. QUELQUES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS f_α

6 On rappelle que le rayon de convergence R d'une série entière $\sum_{n \geq 1} a_n x^n$ est par définition

$$R = \sup \{ \rho \in \mathbb{R}_+ \mid \text{la suite } (a_n \rho^n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est bornée} \}$$

La borne supérieure est prise dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Prenons un réel $x \in]0; 1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{x^n}{n^\alpha} = \exp(n \ln x - \alpha \ln n) = \exp\left(n \left(\ln x - \alpha \frac{\ln n}{n}\right)\right)$$

Par croissances comparées, on sait que $\ln n/n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$. Comme de plus on a $\ln x < 0$, il suit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\ln x - \alpha \frac{\ln n}{n}\right) = -\infty$$

Par composition de limite avec la fonction $\exp$, on en déduit que la suite $(x^n/n^\alpha)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers 0. Elle est en particulier bornée. Cela montre que $R \geq x$. En passant à la limite lorsque $x \rightarrow 1^-$, on établit que $R \geq 1$.

Traisons maintenant le cas où $x > 1$. Cette fois, $\ln x > 0$. Les raisonnements précédents donnent que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\ln x - \alpha \frac{\ln n}{n}\right) = +\infty$$

Par composition de limite, la suite $(x^n/n^\alpha)_{n \in \mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$ et par conséquent n'est pas bornée, ce qui implique que $R \leq x$. Ceci valant pour tout $x > 1$, on obtient que $R \leq 1$ par un passage à la limite.

Remarquons au passage que la nature de la suite $(x^n/n^\alpha)_{n \in \mathbb{N}^*}$ en $x = 1$ nous est inconnue. Tout dépend du paramètre α . Lorsque $\alpha > 0$, cette suite converge vers 0. Lorsque $\alpha = 0$, elle est constante égale à 1, enfin dans le cas où $\alpha < 0$, elle diverge vers $+\infty$.

Le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^\alpha}$ est $R = 1$.

On peut également résoudre cette question en utilisant la règle de d'Alembert, ce que l'on fait au paragraphe suivant. Dans une épreuve en temps limité, cette approche est préférable lorsqu'elle est possible. Mais la règle de d'Alembert ne marche pas à tous les coups, dans ces cas-là les raisonnements nécessitent de bien comprendre ce qu'est un rayon de convergence.

Pour tout $x > 0$, posons la suite $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n(x) = x^n/n^\alpha$. Alors

$$\left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \left| \frac{x^{n+1}/(n+1)^\alpha}{x^n/n^\alpha} \right| = |x| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |x|$$

Dans le cas où $|x| < 1$, alors la série $\sum_{n \geq 1} u_n(x) = \sum_{n \geq 1} x^n/n^\alpha$ converge, et dans le cas où $|x| > 1$, elle diverge (grossièrement). On conclut alors que $R = 1$.

7 D'après la question précédente $] -1; 1[\subset \mathcal{D}_\alpha$, et ce quelle que soit la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$. Il faut à présent étudier la convergence de f_α au bord du domaine de convergence. Divers cas se présentent.

- Cas où $\alpha \leq 0$: prenons un réel $x \in \{-1, 1\}$. Alors la suite dont le terme général est $|x^n/n^\alpha| = 1/n^\alpha$ ne tend pas vers 0. Il en résulte que la série $\sum_{n \geq 1} x^n/n^\alpha$ diverge grossièrement.
- Cas où $\alpha \in]0; 1[$: d'après le critère de Riemann, la série numérique $\sum_{n \geq 1} 1/n^\alpha$ est divergente, autrement dit $1 \notin \mathcal{D}_\alpha$. Par ailleurs, la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n/n^\alpha$ vérifie le critère spécial des séries alternées. En effet, la suite $(1/n^\alpha)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante de limite nulle. Par ce théorème, la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n/n^\alpha$ est convergente.
- Cas où $\alpha > 1$: quel que soit $x \in \{-1, 1\}$, on a la majoration

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \left| \frac{x^n}{n^\alpha} \right| \leq \frac{1}{n^\alpha}$$

D'après le critère de Riemann, la série $\sum_{n \geq 1} 1/n^\alpha$ est cette fois convergente, d'où l'on déduit par domination que $\sum_{n \geq 1} x^n/n^\alpha$ converge absolument, donc converge.

En résumé,

$$\mathcal{D}_\alpha = \begin{cases}] -1; 1[& \text{si } \alpha \leq 0 \\ [-1; 1[& \text{si } 0 < \alpha \leq 1 \\ [-1; 1] & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$$

8 On observe d'abord que $f_\alpha(0) = 0$. Maintenant, fixons un $x \in \mathcal{D}_\alpha \cap \mathbb{R}_+^*$. Alors

$$f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}$$

est positif en tant que série à termes positifs. En revanche, si $x \in \mathcal{D}_\alpha \cap \mathbb{R}_-^* = [-1; 0[$,

$$f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n |x|^n}{n^\alpha}$$

est une série alternée qui vérifie les hypothèses du théorème spécial. En effet, la suite de terme général $|x|^n/n^\alpha$ est décroissante (en tant que produit terme à terme des deux suites $(|x|^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(n^{-\alpha})_{n \in \mathbb{N}^*}$ décroissantes positives) et de limite nulle. Dans ce cas, le signe de la série de somme $f_\alpha(x)$ est celui de son premier terme, qui est $x < 0$.

La fonction f est strictement négative sur $[-1; 0[$, nulle en 0 et strictement positive sur $\mathcal{D}_\alpha \cap \mathbb{R}_+^*$.

9 Il s'agit de séries entières classiques. Pour $x \in] -1; 1[$, la série entière de somme $f_0(x)$ est une série géométrique de raison x

$$\forall x \in] -1; 1[\quad f_0(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = x \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$$

Toujours pour $x \in] -1; 1[$,

$$f_{-1}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^n = x \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$$

On reconnaît une dérivée terme à terme d'une série géométrique, ce qui permet de poursuivre ainsi

$$f_{-1}(x) = x \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} x^n \right) = x \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{1-x} \right) = x \frac{d}{dx} \left(-1 + \frac{1}{1-x} \right) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Enfin, occupons-nous de la fonction f_1 . À quelques changements près, on reconnaît le développement en série entière de $t \mapsto \ln(1+t)$.

$$\forall x \in [-1; 1[\quad f_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(-x)^n}{n} = -\ln(1-x)$$

La convergence d'une série entière au bord de son domaine de convergence est à la limite du programme de PSI. Dans le cas présent, la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ en $x = -1$ n'est pas un résultat de cours. Il est peu probable que les concepteurs du sujet aient voulu piéger les candidats sur cette question, qui avait vraisemblablement vocation à tester leurs connaissances sur les développements en série entière classiques. Néanmoins, on peut montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge effectivement, et que sa somme est $-\ln 2$.

La fonction $t \mapsto \ln(1+t)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0; 1]$, et une récurrence facile permet de calculer ses dérivées

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \forall t \in [0; 1] \quad \frac{d^k \ln(1+t)}{dt^k} = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(1+t)^k}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la formule de Taylor avec reste intégral, appliquée entre les points 0 et 1 à la fonction $t \mapsto \ln(1+t)$ donne

$$\begin{aligned} \ln(2) &= \ln(1) + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{k!} + \frac{1}{n!} \int_0^1 (1-t)^n \frac{(-1)^{n+2}n!}{(1+t)^{n+1}} dt \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} + (-1)^n \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^n} dt \end{aligned}$$

Le reste intégral peut être majoré en valeur absolue par

$$\left| (-1)^n \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^n} dt \right| \leq \int_0^1 (1-t)^n dt = \frac{1}{n+1}$$

Par encadrement, on en déduit qu'il tend vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$. Ensuite, un passage à la limite dans la formule de Taylor donne le développement de $\ln 2$

$$\ln 2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

En conclusion,

Pour tout $x \in]-1; 1[$, on a $f_0(x) = \frac{x}{1-x}$ et $f_1(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$. Pour tout $x \in [-1; 1[$, on a l'expression $f_{-1}(x) = -\ln(1-x)$.
--

- 10** Par des arguments généraux sur les séries entières, on sait que la somme de la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}$ est continue, et même de classe $\mathcal{C}^\infty$, sur son intervalle ouvert de convergence $] -1 ; 1 [$. Ici, on cherche à établir la continuité au bord du domaine et il faut utiliser un autre argument.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\varphi_n : [-1 ; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto x^n/n^\alpha$. Les fonctions φ_n sont continues, bornées et vérifient $\|\varphi\|_\infty = 1/n^\alpha$. Comme $\alpha > 1$ par hypothèse, la série $\sum_{n \geq 1} \|\varphi\|_\infty$ converge par le critère de Riemann. Il en découle que la série de fonctions $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \varphi_n$, de somme f_α , converge normalement. Par suite,

La fonction f_α est continue sur $[-1 ; 1]$.

- 11** Comme $\alpha \leq 1$, on a $n^\alpha \leq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. En passant à l'inverse, on obtient donc $1/n^\alpha \geq 1/n$. Si $x \in [0 ; 1[$, alors

$$f_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^\alpha} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = f_1(x) = -\ln(1-x)$$

Or $\lim_{x \rightarrow 1^-} -\ln(1-x) = +\infty$. Par minoration, il s'ensuit que

Pour tout $\alpha \leq 1$, la fonction f_α tend vers $+\infty$ en 1^- .

II. UN LOGARITHME COMPLEXE

- 14** On rappelle le développement en série entière suivant.

$$\forall x \in]-1 ; 1[\quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$$

- 15** Cette question ressemble à la question 6. Dans cette réponse, on se propose de déduire le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 1} (-z)^n/n$ du rayon de convergence déjà calculé de $\sum_{n \geq 1} z^n/n$. On pourrait également faire appel à la règle de d'Alembert.

Pour tout $\rho \in \mathbb{R}_+$, on a clairement l'équivalence

$$\left(\frac{\rho^n}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est bornée } \iff \left(\frac{(-\rho)^n}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est bornée}$$

D'où l'égalité suivante

$$\begin{aligned} R &= \sup \left\{ \rho \in \mathbb{R}_+ : \text{la suite } \left(\frac{(-1)^n \rho^n}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est bornée} \right\} \\ &= \sup \left\{ \rho \in \mathbb{R}_+ : \text{la suite } \left(\frac{\rho^n}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est bornée} \right\} \end{aligned}$$

Mais cette dernière quantité n'est autre que le rayon de convergence de la série entière définissant f_1 , qui vaut 1 d'après la question 6. Ainsi

$$\boxed{R = 1}$$

Pour tout $x \in]-1; 1[$, on a $S(x) = \ln(1+x)$ d'après la question 14. Il en découle que $\exp(S(x)) = e^{\ln(1+x)} = 1+x$.

$$\boxed{\forall x \in]-1; 1[\quad \exp(S(x)) = 1+x}$$

16 Éliminons d'emblée le cas facile où $z_0 = 0$. On a alors affaire à la série entière nulle $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} z_0^n t^n / n$, dont le rayon de convergence est $+\infty$.

Par contre, si $z_0 \neq 0$, on peut utiliser le critère de d'Alembert pour le calcul du rayon de convergence. Pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, notons $(u_n(t))_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de terme général $u_n(t) = (-1)^{n-1} z_0^n t^n / n$. Alors

$$\left| \frac{u_{n+1}(t)}{u_n(t)} \right| = \left| \frac{(-1)^n z_0^{n+1} t^{n+1} / (n+1)}{(-1)^{n-1} z_0^n t^n / n} \right| = |z_0| |t| \frac{n}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |z_0| |t|$$

De suite, si $|t| < |z_0|^{-1}$, c'est-à-dire lorsque $|z_0| |t| < 1$, la série numérique $\sum_{n \geq 1} u_n(t)$ converge. Lorsque $|t| > |z_0|^{-1}$, elle diverge grossièrement. Par conséquent, le rayon de convergence cherché est $|z_0|^{-1}$.

$$\boxed{\text{Le rayon de convergence de la série définissant } g \text{ est } \begin{cases} |z_0|^{-1} & \text{si } z_0 \neq 0 \\ +\infty & \text{si } z_0 = 0 \end{cases}}$$

17 Lorsque $z_0 = 0$, g est la fonction identiquement nulle, qui est bien de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0; 1]$. Dans le cas contraire, on sait par la question 16 que le rayon de convergence de la série définissant g est $|z_0|^{-1}$. Par hypothèse, $|z_0| < 1$ donc $|z_0|^{-1} > 1$ et ainsi $[0; 1]$ est inclus dans l'intervalle ouvert $] -|z_0|^{-1}; |z_0|^{-1} [$ de convergence, où g est de classe $\mathcal{C}^\infty$. On aboutit donc à la même conclusion.

$$\boxed{\text{La fonction } g \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } [0; 1].}$$

On calcule g' sur $[0; 1]$ en appliquant à nouveau le théorème de dérivation terme à terme des séries entières. Pour $t \in [0; 1]$,

$$\begin{aligned} g'(t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} z_0^n t^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n z_0^{n+1} t^n && \text{(décalage d'indices)} \\ &= z_0 \sum_{n=0}^{+\infty} (-z_0 t)^n \\ &= \frac{z_0}{1 - (-tz_0)} && \text{(série géométrique)} \\ g'(t) &= \frac{z_0}{1 + tz_0} \end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\forall t \in [0; 1] \quad g'(t) = \frac{z_0}{1 + tz_0}}$$

18 La fonction g est dérivable sur $[0; 1]$ d'après la question précédente, et la fonction $\exp$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction composée est donc dérivable sur $[0; 1]$, et la règle de dérivation des fonctions composées donne

$$\forall t \in [0; 1] \quad h'(t) = g'(t)(\exp' \circ g)(t) = \frac{z_0}{1 + tz_0}(\exp \circ g)(t) = \frac{z_0}{1 + tz_0}h(t)$$

ce qui est le résultat attendu.

$$\boxed{\forall t \in [0; 1] \quad h'(t) = \frac{z_0}{1 + tz_0}h(t)}$$

19

Le résultat demandé $\exp(S(z_0)) = z_0 + 1$ est déjà valable si z_0 est dans l'intervalle réel $] -1; 1 [$, comme on l'a montré à la question 15. Il s'agit maintenant de le prouver pour des valeurs de z_0 complexes, ce qui est plus fort et doit faire intervenir de nouveaux arguments. C'est en ce sens que S est le « logarithme complexe » du titre de cette partie.

Comme $h(0) = e^{g(0)} = e^0 = 1$, et grâce à la question 18, on observe que h est solution du problème de Cauchy linéaire suivant

$$\begin{cases} y' = \frac{z_0}{1 + tz_0}y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

On vérifie que la fonction affine $\tilde{h}: t \mapsto 1 + tz_0$ est également solution du problème, en l'injectant dans l'équation. En effet, elle vérifie la condition initiale $\tilde{h}(0) = 1$ et par ailleurs

$$\forall t \in [0; 1] \quad \tilde{h}'(t) = z_0 = \frac{z_0}{1 + tz_0}\tilde{h}(t)$$

Or le théorème de Cauchy linéaire assure l'unicité de la solution du problème de Cauchy. Par conséquent, $h = \tilde{h}$. En particulier, au point 1 ces deux fonctions prennent les valeurs $h(1) = \exp(g(1)) = \exp(S(z_0))$ et $\tilde{h}(1) = 1 + z_0$. D'où

$$\boxed{\exp(S(z_0)) = z_0 + 1}$$

L'équation à laquelle on est confronté

$$y'(t) = a(t)y(t) \quad \text{avec} \quad a(t) = \frac{z_0}{1 + tz_0}$$

est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients non constants. La théorie nous dit que ses solutions sont toutes de la forme $t \mapsto C \exp(A(t))$, où A est une primitive de a et C une constante quelconque.

Si l'on s'engage dans cette voie, il faut éviter l'erreur rédhibitoire qui consiste à affirmer que $A: t \mapsto \ln(1 + tz_0)$ est une primitive de a , puisqu'en dérivant formellement on trouve $A' = a$. En réalité, ceci n'a guère de sens, car la quantité $1 + tz_0$ est complexe, tandis que $\ln$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour réparer ce raisonnement, il nous faudrait une extension de la fonction $\ln$ au domaine complexe, ce qui est précisément la conclusion de la question (sans compter qu'il faudrait donner un sens à la notion de dérivation par rapport à une variable complexe).

L'unique méthode disponible pour primitiver a est de primitiver séparément ses parties réelle et imaginaire. Si théoriquement cette démarche aboutit, les calculs sont totalement impraticables.