

Variables aléatoires finies

1 _____ (**) _____ **Mines PC 2016**

Un centre d'appel cherche à contacter n personnes, chacune ayant une probabilité $p \in]0; 1[$ de répondre. On note X le nombre de personnes ayant répondu à la première vague d'appels. Le centre lance un nouvel appel aux personnes n'ayant pas répondu la première fois. Soit Y le nombre de personnes ayant répondu la deuxième fois, mais pas la première.

- Donner la loi de X .
- Déterminer $P(Y = k | X = i)$ pour $(i, k) \in \llbracket 0; n \rrbracket^2$.
- Soit $Z = X + Y$. Donner la loi de Z ainsi que son espérance.

2 _____ (**) _____ **X PC 2016**

En arrivant dans un restaurant, n personnes déposent leur manteau au vestiaire. En partant du restaurant, chacun prend un manteau au hasard. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de personnes ayant récupéré leur manteau. Déterminer la loi de X .

3 _____ (**) _____ **Centrale PC 2016**

Une urne contient $2n$ boules. Parmi ces boules, n portent le numéro 0, les autres sont numérotées de 1 à n . On tire simultanément n boules de l'urne. Pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, soit X_i la variable aléatoire égale à 1 si la boule portant le numéro i a été tirée, 0 sinon.

- Déterminer la loi de X_i , la covariance $\text{cov}(X_i, X_j)$ si $1 \leq i < j \leq n$.
- Soit S la somme des numéros tirés. Déterminer $E(S)$ et $V(S)$.

4 _____ (**) _____ **ENS PC 2016**

Soit X une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs. On dit que λ est une valeur médiane si $P(X \leq \lambda) \geq 1/2$ et $P(X \geq \lambda) \geq 1/2$.

- Montrer que X admet une valeur médiane. Est-elle forcément unique ?
- Trouver t minimisant $t \mapsto E((X - t)^2)$.
- Trouver t minimisant $t \mapsto E(|X - t|)$.

Variables aléatoires discrètes

5 _____ (*) _____ **Centrale PC 2019**

Soit une pièce ayant pour probabilité p de tomber sur pile et $q = 1 - p$ de tomber sur face. A lance la pièce et s'arrête de la lancer lorsqu'il fait pile pour la première fois. On note X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués par A . B lance alors la pièce autant de fois que A . On note Y la variable aléatoire égale au nombre de pile effectués par B .

- Déterminer l'ensemble image de X et de Y .
- Pour tout $j \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $P(Y = j | X = k)$.
- Donner la loi de Y .
- Y admet-elle une espérance ?

6 _____ (*) _____ **CCP PC 2019**

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes indépendantes qui suivent toutes deux une loi géométrique de paramètre p . On note $U = \max(X, Y)$ et $V = \min(X, Y)$.

- Donner la loi de (U, V) .
- Donner la loi de V et $E(V)$.

7 _____ (*) _____ **Centrale PC 2016**

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une même loi de Poisson de paramètre λ . Déterminer la loi de $\max(X, Y)$.

8 _____ (*) _____ **Mines PC 2016**

Soit X une variable aléatoire ayant un moment d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que X possède un moment d'ordre p pour tout $p \leq n$.

9 _____ (*) _____ **Mines PC 2016**

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1[$. Calculer $P(Y \geq X)$ et $P(Y = X)$.

10 _____ (**) _____ **Mines PC 2016**

Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1[$. On pose $U = |X - Y|$ et $V = \min(X, Y)$. Déterminer la loi du couple (U, V) et en déduire les lois de U et V . Les variables U et V sont-elles indépendantes ?

11 _____ (*) _____ **Mines PC 2016**

Soient $a \in [0; 1]$ et $b \in \mathbb{R}_+$, X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$ de loi conjointe donnée par

$$\forall i, j \in \mathbb{N}, \quad P(X = i, Y = j) = \begin{cases} \frac{b^i e^{-b} (1-a)^{i-j} a^j}{(i-j)! j!} & \text{si } j \leq i \\ 0 & \text{si } j > i \end{cases}$$

Déterminer les lois de X et de Y . Calculer leur espérance et leur variance si elles existent.

12 _____ (*) _____ **Mines PC 2016**

Soit X une variable aléatoire réelle discrète suivant une loi de Poisson de paramètre λ . Quelle est la probabilité que X soit pair ?

13 _____ (**) _____ **Centrale PC 2016**

Trois clients se présentent à une banque disposant de deux guichets. Les clients C_1 et C_2 se présentent en premier aux deux guichets, puis le client C_3 se présente ensuite au premier des deux guichets qui se libère. Le temps passé par le client C_i suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1[$. Déterminer la probabilité que C_3 termine le dernier.

14 _____ (**) _____ **ENS PC 2024**

(a). Soit $\lambda > 0$ et X_λ une variable aléatoire qui suit une loi de Poisson de paramètre λ . Soit $\epsilon > 0$. Montrer que

$$P(|X_\lambda - \lambda| \geq \epsilon \lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0$$

(b). Soient $\lambda > 0$ et $A_\lambda, B_\lambda, C_\lambda$ et D_λ quatre variables aléatoires indépendantes qui suivent une loi de Poisson de paramètre λ . Déterminer la limite lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$ de la probabilité que le polynôme $A_\lambda X^2 + B_\lambda X + C_\lambda$ ait toutes ses racines réelles.

(c). Même question avec $A_\lambda X^3 + B_\lambda X^2 + C_\lambda X + D_\lambda$

15 _____ (***) _____ **X PC 2016**

Cinq compères sont autour d'une table ronde. Deux voisins ont chacun un ballon. A chaque tour, une personne ayant un ballon le donne à son voisin de gauche ou à son voisin de droite avec une probabilité égale à $1/2$. Déterminer le nombre moyen de tours nécessaires pour qu'une personne récupère les deux ballons.

Suites de variables aléatoires

16 _____ (**) _____ **Mines PC 2016**

Soient $p, n \in \mathbb{N}^*$. On considère une suite $(X_k)_{k \in [1; n]}$ de variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes une loi uniforme sur $[1; p]$. On pose alors $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$.

(a). Déterminer la loi de M_n .

(b). En déduire l'espérance de M_n , et déterminer la limite de $E(M_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$. Commenter.

17 _____ (**) _____

Une grenouille monte les marches d'un escalier en sautant à chaque étape une marche avec probabilité $1/2$ et deux marches d'un coup avec probabilité $1/2$. On note X_n le nombre de marches franchies après n sauts, et Y_n le nombre de fois où la grenouille n'a sauté qu'une seule marche sur ses n premiers sauts.

(a). Déterminer la loi de Y_n . Exprimer X_n en fonction de Y_n et en déduire la loi de X_n , son espérance et sa variance.

(b). On note N_p le nombre de sauts nécessaires pour atteindre ou dépasser la p -ième marche, c'est-à-dire le plus petit entier tel que $X_{N_p} \geq p$. Exprimer pour $p \geq 2$ et $k \geq 1$ la probabilité $P(N_p = k)$ en fonction des probabilités $P(N_{p-1} = k-1)$ et $P(N_{p-2} = k-1)$. En déduire que

$$E(N_p) = \frac{1}{2}E(N_{p-1}) + \frac{1}{2}E(N_{p-2}) + 1$$

(c). En déduire l'espérance de N_p et un équivalent de $E(N_p)$ lorsque p tend vers $+\infty$. Commenter.

18

(***)

Une puce se déplace une règle graduée infinie en partant de la position 0. A chaque instant, elle effectue un saut de une unité vers la droite avec probabilité $1/2$ ou un saut vers la gauche avec probabilité $1/2$. Sa position après n sauts est notée X_n avec $X_0 = 0$. Pour tout entier $n \geq 1$, on note $U_n = X_n - X_{n-1}$, qui suit donc une loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On suppose que les sauts sont indépendants, de sorte que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ forme une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes. On va justifier qu'avec une probabilité égale à 1, la marche de la puce est non bornée. On notera B l'ensemble « la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée » et pour tout $m \in \mathbb{N}$, on note B_m l'ensemble « la suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[-m; m]$ ». On note pour finir pour tous entiers $n, m \geq 1$

$$A_{n,m} = \{\forall k \in \llbracket 1; 2m \rrbracket, U_{(2n-1)m+k} = 1\}$$

(a). Vérifier que $B = \bigcup_{m=0}^{\infty} B_m$ et en déduire que B est un évènement.

(b). On fixe un entier $m \geq 1$.

(i) Décrire $A_{5,3}$, puis $A_{6,3}$. Justifier que les évènements $(A_{n,m})_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont mutuellement indépendants.

(ii) Soit $n \geq 1$. Calculer $P(A_{n,m})$. En déduire que l'évènement « une infinité d'évènements parmi $(A_{n,m})_{n \in \mathbb{N}}$ se réalise » est de probabilité 1.

(iii) En déduire que
$$P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_{n,m}\right) = 1$$

(iv) Montrer que $A_{n,m} \subset \overline{B_{m-1}}$ pour tout entier $n \geq 1$, puis que $P(B_{m-1}) = 0$.

(c). Conclure.

Exercices supplémentaires non corrigés

19

(**)

PC Centrale 2024

On considère une matrice aléatoire $A_n = (X_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ où les $X_{i,j}$ sont indépendantes et suivent une loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On pose $D_n = \det A_n$.

(a). Déterminer $E(D_n)$.

(b). Montrer que $V(D_n) = n!$ par récurrence sur n .

20

(?)

PC ENS 2024

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $\llbracket 1; n \rrbracket$. On note $D(X)$ le nombre de diviseurs premiers de X .

(a). Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(D(X))$.

(b). On admet que

$$\sum_{\substack{p \text{ premier} \\ p \leq n}} \frac{1}{p} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(\ln n)$$

Montrer que
$$\forall \epsilon > 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{D(X)}{\ln(\ln n)} - 1\right| \geq \epsilon\right) = 0$$

21

(**)

PC Mines 2024

Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$ telle que $|Z| + 1$ suit une loi géométrique de paramètre p , et telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(Z = n) = P(Z = -n)$$

On pose

$$A = \begin{pmatrix} 0 & Z & Z \\ Z & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a). Déterminer la loi du rang de A .

(b). Déterminer la probabilité pour que A soit diagonalisable.

22 _____ (**) _____ **PC ENS 2024**

On considère une urne vide qu'on remplit successivement d'une boule blanche (avec probabilité p) ou d'une boule rouge (avec probabilité $1 - p$). On s'arrête de la remplir lorsqu'on obtient la première boule rouge. Puis on la vide jusqu'à retirer la boule rouge. Déterminer le nombre moyen de boules blanches restantes à la fin.

23 _____ (?) _____ **PC X 2024**

On lance une pièce une infinité de fois. On note S_n le nombre de successions de deux piles consécutifs dans les n premiers lancers.

- Trouver $E(S_n)$ et $V(S_n)$.
- On pose $T = \min \{n \in \mathbb{N}, S_n = 1\}$. Calculer $G_T(t)$ et en déduire sa loi.

24 _____ (?) _____ **PC Mines 2024**

Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $]0; 1[$ telle que la série $\sum_{n \geq 0} p_n$ converge. Pour tout entier n , on considère une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p_n puis on pose

$$S_n = \sum_{k=0}^n X_k \quad \text{et} \quad S = \sum_{k=0}^{+\infty} X_k$$

- Soit $k \in \mathbb{N}$. Exprimer l'évènement $(S \geq k)$ à l'aide des évènements $(S_n \geq k)$. En déduire que S est une variable aléatoire.
- Montrer que S est presque-sûrement finie.
- Montrer que S admet une espérance et la calculer.

25 _____ (?) _____ **PC X 2024**

Soient $p \in]0; 1[$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définie par $X_0 = 0$ et pour tout entier n , $X_{n+1} = X_n + 1$ avec probabilité p et $X_{n+1} = 0$ avec probabilité $1 - p$. Déterminer la loi de X_n , son espérance et sa variance.

26 _____ (?) _____ **PC ENS 2024**

Soit $\theta \in [0; 2\pi[$ et $p \in]0; 1[$. On pose

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On considère une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variables aléatoires indépendantes qui vérifient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(A_n = R) = p \quad \text{et} \quad P(A_n = Q) = 1 - p$$

On note $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad U_n = A_n U_{n-1}$

On note $t_1 < t_2 < \dots$ les instants successifs où $A_{t_i} = Q$.

- Trouver la loi de $\|U_{t_1}\|$ où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne canonique.
- Pour $N \in \mathbb{N}^*$, donner une approximation du nombre d'indices i tels que $t_i \leq N$.

Dans la suite, on suppose que $\theta = 2\pi/3$.

- Calculer $E(\ln \|U_{t_1}\|)$.
- Déterminer la loi de $\|U_{t_2}\|$ puis celle de $\|U_{t_k}\|$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
- Déterminer $E(\ln \|U_{t_k}\|)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

- 1** (a) Il s'agit d'une loi binomiale.
 (b) Là encore, il s'agit d'une loi binomiale.
 (c) Utiliser la formule des probabilités totales, à l'aide du système complet d'évènement $((X = i))_{i \in \llbracket 0; n \rrbracket}$.
- 2** On modélise l'univers par l'ensemble Ω des permutations de $\llbracket 1; n \rrbracket$ avec X qui à une permutation σ associe son nombre de points fixes. Il s'agit alors de calculer pour tout entier $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ le nombre de permutations ayant k points fixes.
- 3** (a) Compter le nombre de tirages où la boule i a été tirée, et celui où les deux boules i et j ont été tirées pour $i \neq j$.
 (b) Utiliser la linéarité de l'espérance.
- 4** (a) On pourra utiliser la croissance de l'application $\lambda \mapsto P(X \leq \lambda)$ (qui est également continue à droite).
 (b) On pourra remarquer que $t \mapsto E((X - t)^2)$ est polynomiale de degré 2.
 (c) Faire le lien avec la notion de valeur médiane de X .
- 5** (b). Reconnaître une loi binomiale.
 (c). Utiliser la loi conjointe et la formule des probabilités totales. Pour calculer la somme obtenue, on pourra justifier puis utiliser l'égalité

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall |z| < 1, \quad \frac{1}{(1-z)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} z^n$$

- (a) Utiliser un argument de croissance comparées.
- 6** (a) Remarquer que $U \geq V$. Pour $a \geq b$ deux entiers, exprimer l'évènement $(U, V) = (a, b)$ en fonction des évènements $(X = a)$, $(X = b)$, $(Y = a)$, $(Y = b)$ en distinguant le cas particulier $a = b$.
 (b) Utiliser la loi conjointe et la formule des probabilités totales. Pour calculer l'espérance, on pourra utiliser l'égalité

$$\forall x \in]-1; 1[, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k \quad \text{qui donne par dérivation} \quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} k x^{k-1}$$

- 7** Pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, on pourra considérer l'union disjointe

$$(\max(X, Y) = k) = (X = k \cap Y = k) \cup (X = k \cap Y < k) \cup (Y = k \cap X < k)$$

- 8** Utiliser le théorème de comparaison des séries à termes positifs.

- 9** Utiliser le système complet d'évènements $((X = k))_{k \in \mathbb{N}^*}$.

- 10** Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on pourra combiner le système complet d'évènements $((Y = n))_{n \in \mathbb{N}}$ avec l'union disjointe

$$(U = k) = (X - Y = k) \cup (Y - X = k)$$

et de même, pour tout $k \in \mathbb{N}$ cette fois

$$(V = k) = (X = k \cap Y = k) \cup (X = k \cap Y > k) \cup (Y = k \cap X > k)$$

- 11** Il suffit d'utiliser l'union disjointe $\forall i \in \mathbb{N}, \quad P(X = i) = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} P(X = i \cap Y = j)$

et de même pour Y .

- 12** On pourra écrire $\ll X \text{ pair} \gg = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (X = 2k)$

- 13** Noter T_i le temps passé au guichet par le client C_i . Il s'agit de déterminer la probabilité de

$$((T_3 + T_2 \geq T_1) \cap (T_2 < T_1)) \cup ((T_3 + T_1 \geq T_2) \cap (T_1 < T_2))$$

Utiliser alors le système complet d'évènements $((T_1 = i, T_2 = j))_{i, j \in \mathbb{N}}$.

- 14** (a) Utiliser l'inégalité de Bienaimé-Tchebychev.

- (b) On pourra remarquer que compte-tenu du résultat précédent, pour tout $\epsilon > 0$, les trois quantités

$$P(A_\lambda \geq (1 - \epsilon)\lambda) \quad P(C_\lambda \geq (1 - \epsilon)\lambda) \quad \text{et} \quad P(B_\lambda \leq (1 + \epsilon)\lambda)$$

sont toutes de limites nulles lorsque λ tend vers $+\infty$, puis chercher une condition sur ϵ pour que les trois conditions $(A_\lambda \geq (1 - \epsilon)\lambda)$, $(C_\lambda \geq (1 - \epsilon)\lambda)$ et $(B_\lambda \leq (1 + \epsilon)\lambda)$ impliquent $(B_\lambda)^2 \leq 4A_\lambda C_\lambda$.

- 15** Remarquer que les deux ballons sont toujours au maximum à 2 personnes l'un de l'autre. Introduire pour tout $i \in \{0, 1, 2\}$ la variable aléatoire X_i donnant le nombre de tours pour qu'une même personne ait les deux ballons à partir d'une distance initiale de i personnes. Déterminer alors des relations de récurrences sur les lois de X_1 et X_2 .

- 16** (a) Commencer par calculer $P(X_n \leq k)$ pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$.
 (b) Pour obtenir une expression plus simple de $E(M_n)$, on pourra appliquer une transformation d'Abel.
- 17** (a) On peut remarquer que Y_n suit une loi binomiale.
 (b) On pourra remarquer que $(N_p = k) = [(X_1 = 1) \cap (N_p = k)] \cup [(X_1 = 2) \cap (N_p = k)]$
 (c) Remarquer que pour un réel α à déterminer, la quantité $u_p = E(N_p) - \alpha \cdot p$ suit une récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
- 18** (a) Passer au logarithme et utiliser le théorème de comparaison.
 (b) Remarquer que B_m est un évènement pour tout entier m .
 (c) (i) Les ensembles $(A_{m,n})_{n \in \mathbb{N}}$ font intervenir des ensembles de variables parmi $(U_k)_{k \in \mathbb{N}}$ deux à deux disjoints.
 (ii) L'évènement « une infinité d'évènements parmi $(A_{n,m})_{n \in \mathbb{N}}$ se réalise » peut s'écrire

$$\bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{n=k}^{+\infty} A_{n,m}$$

Utiliser ensuite la continuité décroissante et la première question.

- (iii) Si une infinité des $(A_{n,m})_{n \in \mathbb{N}}$ se réalise, alors au moins un d'entre eux se réalise.
 (iv) Si on effectue $2m$ pas consécutifs vers la droite, alors on ne peut pas rester dans l'intervalle B_{m-1} .