

I. PRÉLIMINAIRES : ÉTUDE DE QUELQUES ÉLÉMENTS DE E

1 Soit $\alpha > 0$. Notons $\varphi : t \mapsto p_\alpha(t)^2 e^{-t}/t$. La fonction $p_\alpha : t \mapsto t^\alpha = \exp(\alpha \ln t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ par composition de fonctions continues. Il en est donc de même pour φ . De plus,

$$p_\alpha(t)^2 \frac{e^{-t}}{t} = t^{2\alpha} \frac{e^{-t}}{t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{t^{1-2\alpha}}$$

Puisque $\alpha > 0$, $1 - 2\alpha < 1$ et le critère de Riemann assure l'intégrabilité de φ au voisinage de 0. Par ailleurs, lorsque t tend vers $+\infty$, par croissances comparées,

$$t^2 p_\alpha(t)^2 \frac{e^{-t}}{t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} t^{1+2\alpha} e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

de sorte que

$$p_\alpha(t)^2 \frac{e^{-t}}{t} = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{t^2} \right)$$

Le critère de Riemann garantit à nouveau l'intégrabilité de φ au voisinage de $+\infty$, et ainsi sur $\mathbb{R}_+^*$. Par conséquent,

Pour tout $\alpha > 0$, p_α appartient à E.

Dans ce type de question élémentaire de début d'énoncé, il faut prendre un soin particulier à n'oublier aucun argument. Ici, il est important de mentionner la continuité de la fonction. Par ailleurs, il est conseillé de ne pas parachuter la domination en $o(1/t^2)$ sans la justifier proprement au moins une fois dans sa copie.

2 La fonction P est polynomiale donc continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Notons une nouvelle fois $\varphi : t \mapsto P(t)^2 e^{-t}/t$ et cherchons sous quelles conditions φ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit n le degré de P et a_n son coefficient dominant. La fonction φ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Lorsque t tend vers $+\infty$, on a l'équivalent

$$P(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} a_n t^n$$

d'où à nouveau
$$\varphi(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} a_n^2 t^{2n-1} e^{-t} = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{t^2} \right)$$

La fonction φ est donc dans tous les cas intégrable au voisinage de $+\infty$.

Au voisinage de 0, on distingue deux cas :

- Si $P(0) \neq 0$,
$$P(t)^2 \frac{e^{-t}}{t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{P(0)^2}{t}$$

Le critère de Riemann assure alors que φ n'est pas intégrable au voisinage de 0.

- Si $P(0) = 0$, alors $P(t) = \underset{t \rightarrow 0}{O}(t)$ de sorte que

$$P(t)^2 \frac{e^{-t}}{t} = \underset{t \rightarrow 0}{O}(t)$$

En particulier, φ est de limite nulle en 0 donc prolongeable par continuité en 0 et ainsi intégrable au voisinage de cette borne réelle.

On rappelle qu'une limite nulle en $+\infty$ ne suffit pas à garantir l'intégrabilité d'une fonction au voisinage de $+\infty$. La précision « 0 est un réel » ci-dessus n'est pas anodine.

On peut donc conclure.

La restriction de P à $\mathbb{R}_+^*$ appartient à E si et seulement si $P(0) = 0$.

3 Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, l'application $f : t \mapsto a e^t + b$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus,

- Si $a \neq 0$, alors

$$f(t)^2 \frac{e^{-t}}{t} \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} a^2 \frac{e^t}{t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$$

En particulier, $t \mapsto f(t)^2 e^{-t}/t$ n'est pas intégrable au voisinage de $+\infty$ donc sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Si $a = 0$ et $b \neq 0$, cette fois

$$f(t)^2 \frac{e^{-t}}{t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \frac{b^2}{t}$$

Le critère de Riemann assure alors que $t \mapsto f(t)^2 e^{-t}/t$ n'est pas intégrable au voisinage de 0 donc sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Enfin, lorsque $a = b = 0$, $t \mapsto f(t)^2 e^{-t}/t$ est nulle donc intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par conséquent,

La fonction $t \mapsto a e^t + b$ appartient à E si et seulement si $a = b = 0$.

4 Soit $x > 0$. L'application $t \mapsto (e^t - 1)^2 e^{-t}/t$ est continue sur $]0; x]$. De plus, au voisinage de 0,

$$e^t = 1 + t + o_{t \rightarrow 0}(t) \quad \text{d'où} \quad (e^t - 1)^2 \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^2$$

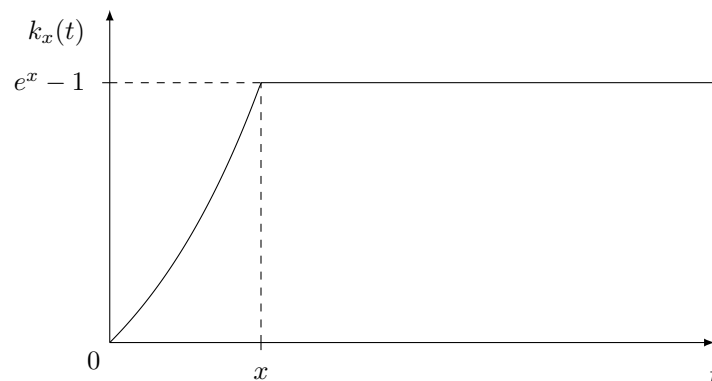
et ainsi

$$(e^t - 1)^2 \frac{e^{-t}}{t} \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$$

Puisque la fonction a une limite finie en 0, elle est en particulier intégrable au voisinage de ce point. Ainsi,

Pour tout $x > 0$, la fonction $t \mapsto (e^t - 1)^2 e^{-t}/t$ est intégrable sur $]0; x]$.

5 Par définition, la fonction k_x coïncide avec $t \mapsto e^t - 1$ sur $]0; x]$ qui est une fonction strictement croissante, nulle en 0 et de dérivée égale à 1 en ce point. Sur $[x; +\infty[$, la fonction k_x est constante égale à $e^x - 1$. Son graphe a donc l'allure suivante :



L'application $\varphi : t \mapsto k_x(t)^2 e^{-t}/t$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, intégrable sur $]0; x]$ d'après le résultat de la question 4. Au voisinage de $+\infty$,

$$k_x(t)^2 \frac{e^{-t}}{t} = (e^x - 1)^2 \frac{e^{-t}}{t} = {}_{t \rightarrow +\infty} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

ce qui assure finalement l'intégrabilité de φ sur $\mathbb{R}_+^*$. Par conséquent,

Pour tout $x > 0$, la fonction k_x appartient à E.

6 Commençons par préciser que si g est une fonction continue et intégrable sur un intervalle de la forme $I =]a; b[$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, alors l'application

$$G : x \mapsto \int_a^x g(t) dt$$

est une primitive de g de limite nulle en a . Le fait que G soit bien définie découle de l'intégrabilité de g , la limite nulle de la relation de Chasles généralisée en écrivant pour c quelconque fixé dans I et $x \in I$

$$G(x) = \int_a^c g(t) dt + \int_c^x g(t) dt$$

De la même manière, l'application $x \mapsto \int_x^b g(t) dt$ est une primitive de $-g$ de limite nulle en b .

Ce résultat n'est pas explicitement au programme de PSI mais il est mentionné dans le programme de MP. Même si on a l'habitude de l'utiliser, il peut être utile de prendre quelques lignes pour le justifier. La fonction G ainsi définie est même l'unique primitive de g de limite nulle en a , mais l'unicité ne sera pas utile pour la suite.

Il serait dangereux d'écrire ici directement quelque chose comme

$$\int_0^x g(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow 0} \int_0^0 g(t) dt = 0$$

car l'intégrale est impropre et la fonction g n'est pas définie en 0. Cette dernière rédaction ne poserait en revanche aucun problème pour une fonction g continue sur un voisinage de 0.

Remarquons dans un premier temps que Φ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ car l'application

$$g : t \mapsto e^{t/2}/\sqrt{t}$$

est intégrable sur tout intervalle de la forme $]0; x]$ avec $x > 0$. En effet, elle est continue et équivalente à $t \mapsto 1/\sqrt{t}$ en 0, ce qui suffit pour garantir son intégrabilité d'après le critère de Riemann. Dès lors, l'application

$$G : x \mapsto \int_0^x \frac{e^{t/2}}{\sqrt{t}} dt$$

est la primitive de g sur $\mathbb{R}_+^*$ de limite nulle en 0, donc une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Par ailleurs, l'application

$$h : x \mapsto \frac{4\sqrt{x}e^{x/2}}{1+x}$$

est également bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$, de limite nulle en 0, et de classe $\mathcal{C}^1$ par théorèmes généraux. Il s'ensuit que

La fonction Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et de limite nulle en 0.

Pour tout $x > 0$, par linéarité de la dérivation puis dérivation d'un produit

$$\begin{aligned}
 \Phi'(x) &= h'(x) - g(x) \\
 &= \left(\frac{2e^{x/2}}{(1+x)\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}e^{x/2}}{(1+x)} - \frac{4\sqrt{x}e^{x/2}}{(1+x)^2} \right) - \frac{e^{x/2}}{\sqrt{x}} \\
 &= \frac{e^{x/2}}{(1+x)^2\sqrt{x}} (2(1+x) + 2x(1+x) - 4x - (1+x)^2) \\
 &= \frac{2e^{x/2}}{(1+x)^2\sqrt{x}} (1 - 2x + x^2) \\
 \Phi'(x) &= \frac{2e^{x/2}(1-x)^2}{(1+x)^2\sqrt{x}}
 \end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{\forall x > 0 \quad \Phi'(x) \geq 0}$$

La fonction Φ' est positive donc Φ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Notamment,

$$\forall x > 0 \quad \Phi(x) \geq \lim_{x \rightarrow 0} \Phi(x) = 0$$

donc d'après ce qui précède

$$\boxed{\forall x > 0 \quad \Phi(x) \geq 0}$$

7 Soit $x > 0$ et $\alpha \in]0; x[$. En appliquant le théorème fondamental de l'analyse,

$$\int_{\alpha}^x f'(t) dt = f(x) - f(\alpha)$$

d'où par inégalité triangulaire,

$$|f(x)| \leq |f(\alpha)| + \left| \int_{\alpha}^x f'(t) dt \right|$$

De plus, par inégalité triangulaire intégrale, puis par hypothèse,

$$\left| \int_{\alpha}^x f'(t) dt \right| \leq \int_{\alpha}^x |f'(t)| dt \leq C \int_{\alpha}^x \frac{e^{t/2}}{\sqrt{t}} dt$$

et donc

$$|f(x)| \leq |f(\alpha)| + C \int_{\alpha}^x \frac{e^{t/2}}{\sqrt{t}} dt$$

Puisque f est de limite nulle en 0 d'après le résultat de la question 6, et que l'application $t \mapsto e^{t/2}/\sqrt{t}$ est intégrable en 0, on peut faire tendre α vers 0 pour obtenir

$$|f(x)| \leq C \int_0^x \frac{e^{t/2}}{\sqrt{t}} dt$$

Enfin, puisque Φ est une fonction positive sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$\forall x > 0 \quad 4 \frac{\sqrt{x}e^{x/2}}{1+x} - \int_0^x \frac{e^{t/2}}{\sqrt{t}} dt \geq 0 \quad \text{soit} \quad \int_0^x \frac{e^{t/2}}{\sqrt{t}} dt \leq 4 \frac{\sqrt{x}e^{x/2}}{1+x}$$

De fait, on obtient directement le résultat souhaité

$$\boxed{\forall x > 0 \quad |f(x)| \leq 4C \frac{\sqrt{x}e^{x/2}}{1+x}}$$

8 D'après la majoration de la question 7, pour tout $t > 0$,

$$0 \leq f(t)^2 \frac{e^{-t}}{t} \leq \frac{(4C)^2}{(1+t)^2}$$

L'application $t \mapsto 1/(1+t)^2$ étant clairement intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ (continue, bornée au voisinage de 0 et dominée par $t \mapsto 1/t^2$ en $+\infty$), on en déduit par comparaison qu'il en est de même pour $t \mapsto f(t)^2 e^{-t}/t$. La fonction f étant continue, cela signifie par définition que

La fonction f est un élément de E .

II. STRUCTURE PRÉHILBERTIENNE DE E

9 Pour tous réels a et b , $|a - b| \leq \frac{1}{2} (a^2 + b^2)$

L'inégalité précédente est classique et peut être utilisée sans justification. Rappelons néanmoins que pour la démontrer, il suffit de remarquer que $(|b| - |a|)^2 \geq 0$ et de développer le carré.

En particulier, si f et g sont deux applications définies sur $\mathbb{R}_+^*$, alors pour tout $t > 0$,

$$|f(t)g(t)| \leq \frac{1}{2} (f(t)^2 + g(t)^2)$$

puis
$$\left| f(t)g(t) \frac{e^{-t}}{t} \right| = |f(t)g(t)| \frac{e^{-t}}{t} \leq \frac{1}{2} \left(f(t)^2 \frac{e^{-t}}{t} + g(t)^2 \frac{e^{-t}}{t} \right)$$

Si maintenant f et g sont deux éléments de E , la quantité de droite est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc par comparaison, il en est de même de $t \mapsto f(t)g(t)e^{-t}/t$. En d'autres termes,

L'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)g(t) \frac{e^{-t}}{t} dt$ est absolument convergente.

10 Il est clair que la fonction nulle est un élément de E donc E est non vide. De plus, étant donnés f et g appartenant à E et λ un réel, alors $\lambda f + g$ est continue par combinaison linéaire de fonctions continues, et pour tout réel $t > 0$,

$$(\lambda f + g)^2(t) \frac{e^{-t}}{t} = \lambda^2 f(t)^2 \frac{e^{-t}}{t} + 2\lambda f(t)g(t) \frac{e^{-t}}{t} + g(t)^2 \frac{e^{-t}}{t}$$

Compte tenu du résultat de la question 9 et de la définition de E , le terme de droite est la somme de trois fonctions dont l'intégrale sur $\mathbb{R}_+^*$ est convergente. Par suite, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} (\lambda f + g)^2(t) \frac{e^{-t}}{t} dt$$

converge, ce qui signifie que $\lambda f + g$ est un élément de E . Finalement,

L'ensemble E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.

11 L'application $(f, g) \mapsto \langle f | g \rangle$ est bien définie d'après le résultat de la question 9. De plus,

- Elle est clairement symétrique, par commutativité du produit dans $\mathbb{R}$.
- Etant donnés $f, g_1, g_2 \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\langle f | \lambda g_1 + g_2 \rangle &= \int_0^{+\infty} f(t) (\lambda g_1(t) + g_2(t)) \frac{e^{-t}}{t} dt \\ &= \lambda \int_0^{+\infty} f(t) g_1(t) \frac{e^{-t}}{t} dt + \int_0^{+\infty} f(t) g_2(t) \frac{e^{-t}}{t} dt \\ \langle f | \lambda g_1 + g_2 \rangle &= \lambda \langle f | g_1 \rangle + \langle f | g_2 \rangle\end{aligned}$$

la séparation des intégrales étant justifiée par leur convergence établie à la question 9. Ceci prouve que $(f, g) \mapsto \langle f | g \rangle$ est linéaire à droite, donc bilinéaire par symétrie.

- Enfin pour $f \in E$, l'application $t \mapsto f(t)^2 e^{-t}/t$ est continue et positive, donc par positivité de l'intégrale, $\langle f | f \rangle$ est un réel positif. S'il est nul, cela implique par continuité que $f(t)^2 e^{-t}/t$ est nul pour tout réel t , donc que $f(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, autrement dit que f est la fonction nulle. Ainsi, $(f, g) \mapsto \langle f | g \rangle$ est définie positive.

Pour conclure,

L'application $(f, g) \mapsto \langle f | g \rangle$ est un produit scalaire sur E .

12 Soit $x > 0$. Compte tenu des éléments de la question 5,

$$\|k_x\|^2 = \int_0^x (e^t - 1)^2 \frac{e^{-t}}{t} dt + \int_x^{+\infty} (e^x - 1)^2 \frac{e^{-t}}{t} dt$$

Justifions que les deux termes de cette somme sont de limite nulle lorsque x tend vers 0.

- La question 4 a permis de constater que $t \mapsto (e^t - 1)^2 e^{-t}/t$ est intégrable sur l'intervalle $]0; x]$. Le résultat en introduction de la question 6 assure donc que la première intégrale est de limite nulle en 0.
- Pour la deuxième intégrale, notons que $t \mapsto 1/t$ est décroissante sur $[x; +\infty[$ donc

$$0 \leq \int_x^{+\infty} (e^x - 1)^2 \frac{e^{-t}}{t} dt \leq \int_x^{+\infty} (e^x - 1)^2 \frac{e^{-t}}{x} dt = \frac{(e^x - 1)^2}{x} \int_x^{+\infty} e^{-t} dt$$

De plus
$$\int_x^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_x^{+\infty} = e^{-x}$$

donc
$$0 \leq \int_x^{+\infty} (e^x - 1)^2 \frac{e^{-t}}{t} dt \leq \frac{(e^x - 1)^2 e^{-x}}{x}$$

En utilisant à nouveau le résultat de la question 6, la quantité de droite est de limite nulle en 0, et il s'ensuit par majoration que

$$\int_x^{+\infty} (e^x - 1)^2 \frac{e^{-t}}{t} dt \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

Finalement, $\|k_x\|^2$ est de limite nulle lorsque x tend vers 0 comme somme de deux quantités de limite nulle. Ainsi,

$$\boxed{\|k_x\| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0}$$

13 Soit $k \in \mathbb{N}$. On note $I_k = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt$

L'application $t \mapsto t^k e^{-t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et par croissances comparées,

$$t^{k+2} e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{soit} \quad t^k e^{-t} = o_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right)$$

donc la fonction est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, ce qui justifie l'existence de I_k .

Calculons maintenant cette intégrale. Dans un premier temps,

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^{+\infty} = 1$$

Soit maintenant $k \in \mathbb{N}^*$. Effectuons une intégration par parties en posant

$$u(t) = t^k \quad u'(t) = k t^{k-1} \quad v'(t) = e^{-t} \quad v(t) = -e^{-t}$$

Par croissances comparées, une nouvelle fois

$$u(t)v(t) = -t^k e^{-t} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$$

ce qui valide l'intégration par parties et assure l'égalité

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = [t^k e^{-t}]_0^{+\infty} + k \int_0^{+\infty} t^{k-1} e^{-t} dt$$

soit encore

$$I_k = k I_{k-1}$$

Les deux suites $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(k!)_{n \in \mathbb{N}}$ ont la même valeur initiale et vérifient la même relation de récurrence. Elles sont donc égales. Ainsi,

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \quad \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = k!}$$

Le calcul de cette intégrale a certainement été vu par la majorité des candidats au concours. Une récurrence classique est envisageable, le seul argument essentiel étant de justifier proprement par intégration par parties la relation de récurrence $I_k = k I_{k-1}$.

14 Soient i et j deux entiers strictement positifs. Par définition,

$$\langle p_i | p_j \rangle = \int_0^{+\infty} t^{i+j-1} e^{-t} dt$$

En particulier, pour $i = 1$ et $j = 2$, on obtient avec le résultat de la question 13

$$\langle p_1 | p_2 \rangle = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dt = 2! \neq 0$$

ce qui suffit à garantir que

$$\boxed{\text{La famille } (p_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ n'est pas orthogonale.}}$$

Pour contredire l'orthogonalité de la famille, un simple exemple suffit ici, mais on peut remarquer que plus généralement, $\langle p_a | p_b \rangle$ est strictement positif pour tous réels a et b , comme intégrale d'une fonction continue positive et non identiquement nulle sur $\mathbb{R}_+$.

III. UN OPÉRATEUR SUR E

15 Soit $f \in E$ et $x > 0$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|U(f)(x)| = |\langle k_x | f \rangle| \leq \|k_x\| \cdot \|f\|$$

Puisque $\|f\|$ est une constante indépendante de x , le résultat de la question 12 permet de conclure par majoration que

$$U(f)(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

16 Rappelons que $k_x(t)$ vaut $e^t - 1$ si $t \leq x$ et $e^x - 1$ sinon. La relation de Chasles permet alors d'écrire que

$$U(f)(x) = \int_0^x (e^t - 1)f(t) \frac{e^{-t}}{t} dt + \int_x^{+\infty} (e^x - 1)f(t) \frac{e^{-t}}{t} dt$$

Il suffit maintenant d'écrire $(e^t - 1)e^{-t} = 1 - e^{-t}$ dans la première intégrale, et de faire sortir le terme $e^x - 1$ indépendant de t dans la seconde.

$$\forall x > 0 \quad U(f)(x) = \int_0^x (1 - e^{-t}) \frac{f(t)}{t} dt + (e^x - 1) \int_x^{+\infty} f(t) \frac{e^{-t}}{t} dt$$

17 Soit $f \in E$. Les fonctions

$$a : t \mapsto (1 - e^{-t}) \frac{f(t)}{t} \quad \text{et} \quad b : t \mapsto -f(t) \frac{e^{-t}}{t}$$

sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$ par théorèmes généraux. Par suite, les primitives

$$A : x \mapsto \int_0^x (1 - e^{-t}) \frac{f(t)}{t} dt \quad \text{et} \quad B : x \mapsto \int_x^{+\infty} f(t) \frac{e^{-t}}{t} dt$$

sont des applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Puisque $x \mapsto e^x - 1$ est également de classe $\mathcal{C}^1$, alors

$$\text{La fonction } U(f) \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.$$

De plus, pour tout $x > 0$, par dérivation de sommes et de produits,

$$(U(f))'(x) = (1 - e^{-x}) \frac{f(x)}{x} - (e^x - 1)f(x) \frac{e^{-x}}{x} + e^x \int_x^{+\infty} f(t) \frac{e^{-t}}{t} dt$$

Les deux premiers termes se compensent et finalement

$$\forall x > 0 \quad (U(f))'(x) = e^x \int_x^{+\infty} f(t) \frac{e^{-t}}{t} dt$$

18 L'expression précédente de $U(f)'$ montre que cette fonction est le produit de la fonction exponentielle et d'une primitive de la fonction continue $t \mapsto -f(t)e^{-t}/t$. Elle est donc de classe $\mathcal{C}^1$, ce qui signifie que $U(f)$ est de classe $\mathcal{C}^2$. Par dérivation d'un produit, pour tout $x > 0$,

$$U(f)''(x) = e^x \int_x^{+\infty} f(t) \frac{e^{-t}}{t} dt + e^x \left(-f(x) \frac{e^{-x}}{x} \right)$$

soit
$$U(f)''(x) = U(f)'(x) - \frac{f(x)}{x}$$

ce qui montre bien que

La fonction $U(f)$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et solution de l'équation différentielle

$$y'' - y' = -\frac{f(x)}{x}$$

19 Fixons $x > 0$. Pour tout $t \in [x; +\infty[$, on peut écrire

$$f(t) \frac{e^{-t}}{t} = \left(f(t) \frac{e^{-t/2}}{\sqrt{t}} \right) \cdot \frac{e^{-t/2}}{\sqrt{t}}$$

L'application $t \mapsto f(t)e^{-t/2}/\sqrt{t}$ est de carré intégrable sur $[x; +\infty[$ car f est un élément de E . Il en est de même pour $t \mapsto e^{-t/2}/\sqrt{t}$ puisqu'elle est continue sur $[x; +\infty[$ et dominée par $t \mapsto 1/t^2$ au voisinage de $+\infty$. D'après le cours, le produit de ces deux fonctions est donc intégrable sur $[x; +\infty[$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz permet d'écrire que

$$\begin{aligned} \left| \int_x^{+\infty} f(t) \frac{e^{-t}}{t} dt \right| &\leq \left(\int_x^{+\infty} \left(f(t) \frac{e^{-t/2}}{\sqrt{t}} \right)^2 dt \right)^{1/2} \cdot \left(\int_x^{+\infty} \left(\frac{e^{-t/2}}{\sqrt{t}} \right)^2 dt \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_x^{+\infty} f(t)^2 \frac{e^{-t}}{t} dt \right)^{1/2} \cdot \left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \right)^{1/2} \\ \left| \int_x^{+\infty} f(t) \frac{e^{-t}}{t} dt \right| &\leq \underbrace{\left(\int_0^{+\infty} f(t)^2 \frac{e^{-t}}{t} dt \right)^{1/2}}_{\|f\|} \cdot \left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \right)^{1/2} \end{aligned}$$

La première majoration souhaitée s'obtient en multipliant par e^x . Pour obtenir la seconde, on peut reprendre la majoration de la question 12, utilisant la décroissance de la fonction $t \mapsto 1/t$. Pour tout $x > 0$,

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \leq \frac{1}{x} \int_x^{+\infty} e^{-t} dt = \frac{1}{x} [-e^{-t}]_x^{+\infty} = \frac{e^{-x}}{x}$$

et ainsi
$$|U(f)'(x)| \leq e^x \|f\| \left(\frac{e^{-x}}{x} \right)^{1/2}$$

Finalement,

$$\forall f \in E \quad \forall x > 0 \quad |U(f)'(x)| \leq e^x \|f\| \left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \right)^{1/2} \leq \|f\| \frac{e^{x/2}}{\sqrt{x}}$$

20 La linéarité de U est évidente. Les résultats des questions 15 et 19 donnent exactement les hypothèses nécessaires pour appliquer les résultats de la sous-section I.B à la fonction $U(f)$ avec $C = \|f\|$. Le résultat de la question 8 s'applique et assure que la fonction $U(f)$ appartient à E . Ceci étant valable pour tout f dans E ,

L'application U est un endomorphisme de E .

Le résultat de la question 7 prouve par ailleurs que

$$\forall f \in E \quad \forall x > 0 \quad |U(f)(x)| \leq 4\|f\| \frac{\sqrt{x}e^{x/2}}{1+x}$$

21 Comme à la question 8, le résultat de la question 20 assure que pour tout $t > 0$,

$$0 \leq (U(f)(t))^2 \frac{e^{-t}}{t} \leq \frac{16\|f\|^2}{(1+t)^2}$$

La quantité de droite étant intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut intégrer cette inégalité de 0 à $+\infty$ comme à la question 8 pour obtenir

$$\int_0^{+\infty} (U(f)(t))^2 \frac{e^{-t}}{t} dt \leq 16\|f\|^2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^2} dt$$

Or,

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t)^2} dt = \left[-\frac{1}{1+t} \right]_0^{+\infty} = 1$$

donc

$$\|U(f)\|^2 = \int_0^{+\infty} (U(f)(t))^2 \frac{e^{-t}}{t} dt \leq 16\|f\|^2$$

et en passant à la racine,

$$\|U(f)\| \leq 4\|f\|$$

22 Soit f appartenant à $\text{Ker } U$. Alors $U(f)$ est nulle donc $U(f)'$ et $U(f)''$ également. Or, d'après le résultat de la question 18, pour tout $x > 0$,

$$U(f)''(x) - U(f)'(x) = -\frac{f(x)}{x} \quad \text{d'où} \quad f(x) = 0$$

Ainsi, f est nulle et $\text{Ker } U = \{0\}$ ce qui équivaut à dire que

L'endomorphisme U est injectif.

23 Le résultat de la question 17 précise que si f est dans E , alors $U(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$. Il suffit donc de trouver un élément de E qui ne soit pas de classe $\mathcal{C}^1$ pour garantir que U n'est pas surjective. Pour cela, on peut proposer $t \mapsto |\sin t|$. En effet, cette fonction n'est pas dérivable en tout point où la fonction $\sin$ s'annule et pour tout $t > 0$, $|\sin t| \leq t$ de sorte que

$$0 \leq |\sin t|^2 \frac{e^{-t}}{t} \leq te^{-t}$$

La quantité de droite est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme on l'a vu à la question 13. Ainsi, par comparaison, $|\sin|$ est bien un élément de E qui n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ et

L'endomorphisme U n'est pas surjectif.

24 D'après le résultat de la question 17, pour tout $x > 0$,

$$F(x) = - \int_x^{+\infty} f(t) \frac{e^{-t}}{t} dt$$

Cette expression assure immédiatement le résultat, d'après les éléments apportés en début de question 6.

La fonction F est une primitive de $x \mapsto f(x) \frac{e^{-x}}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

25 Soit $x > 0$. Le résultat de la question 19 donne la majoration

$$|U(f)'(x)| \leq \|f\| \frac{e^{x/2}}{\sqrt{x}} \quad \text{d'où} \quad |F(x)| \leq \|f\| \frac{e^{-x/2}}{\sqrt{x}}$$

tandis que celui de la question 20 appliquée à $g \in E$ donne

$$|U(g)(x)| \leq 4\|g\| \frac{\sqrt{x}e^{x/2}}{1+x}$$

et donc

$$\forall x > 0 \quad |F(x)U(g)(x)| \leq \frac{4\|f\|\|g\|}{1+x}$$

26 D'après le résultat de la question 19,

$$|F(x)| = |U(f)'(x)e^{-x}| \leq \|f\| \left(\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \right)^{1/2}$$

Pour $x \in]0; 1]$, on découpe l'intégrale à l'aide de la relation de Chasles :

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$$

Sur l'intervalle $]0; 1]$, on peut majorer $t \mapsto e^{-t}$ par 1, tandis que sur $[1; +\infty[$, on peut majorer $t \mapsto 1/t$ par 1. Ainsi,

$$\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \leq \int_x^1 \frac{1}{t} dt + \int_1^{+\infty} e^{-t} dt$$

Les deux intégrales peuvent maintenant se calculer,

$$\int_x^1 \frac{1}{t} dt = [\ln t]_x^1 = -\ln x \quad \text{et} \quad \int_1^{+\infty} e^{-t} dt = [-e^{-t}]_1^{+\infty} = e^{-1}$$

ce qui permet de conclure.

$$\forall x \in]0; 1] \quad |F(x)| \leq \|f\| (e^{-1} - \ln x)^{1/2}$$

27 La majoration de la question 25 montre immédiatement que

$$F(t)U(g)(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$$

La majoration de la question 20 appliquée à g et celle de la question 26 montrent également que

$$F(t) = O_{t \rightarrow 0}(|\ln t|^{1/2}) \quad \text{et} \quad U(g)(t) = O_{t \rightarrow 0}(\sqrt{t})$$

donc le produit tend également vers 0 en 0 par croissances comparées. Par conséquent,

$$\text{La fonction } t \mapsto F(t)U(g)(t) \text{ est de limite nulle en 0 et en } +\infty.$$

28 Par définition,

$$\langle f | U(g) \rangle = \int_0^{+\infty} f(t)U(g)(t) \frac{e^{-t}}{t} dt$$

Effectuons une intégration par parties en posant

$$u'(t) = f(t) \frac{e^{-t}}{t} \quad u(t) = F(t) \quad v(t) = U(g)(t) \quad v'(t) = U(g)'(t)$$

Le résultat de la question précédente assure que l'intégration par parties est valide. On peut donc écrire

$$\int_0^{+\infty} f(t)U(g)(t) \frac{e^{-t}}{t} dt = \underbrace{[F(t)U(g)(t)]_0^{+\infty}}_{=0} - \int_0^{+\infty} F(t)U(g)'(t) dt$$

ce qui est le résultat voulu par définition de F.

$$\boxed{\langle f | U(g) \rangle = \int_0^{+\infty} U(f)'(t)U(g)'(t)e^{-t} dt}$$

29 Par symétrie du produit scalaire,

$$\langle U(f) | g \rangle = \langle g | U(f) \rangle$$

Le résultat de la question précédente étant valable pour toutes fonctions f et g , on obtient en échangeant f et g l'égalité

$$\langle g | U(f) \rangle = \int_0^{+\infty} U(g)'(t)U(f)'(t)e^{-t} dt$$

Le produit dans $\mathbb{R}$ étant commutatif, il vient

$$\int_0^{+\infty} U(g)'(t)U(f)'(t)e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} U(f)'(t)U(g)'(t)e^{-t} dt = \langle U(f) | g \rangle$$

On a donc bien démontré que

$$\boxed{\langle f | U(g) \rangle = \langle U(f) | g \rangle}$$

Ce résultat étant valable pour tous éléments f et g de E , cela signifie que l'endomorphisme U est symétrique pour le produit scalaire $(f, g) \mapsto \langle f | g \rangle$. Ce vocabulaire n'est au programme de la PSI que dans le cadre des espaces euclidiens, mais il reste identique dans le cadre des espaces préhilbertiens réels.