

PARTIE I

1 Prenons $A, B \in \text{Sym}^+(p)$. Alors pour a et b des réels positifs, et pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2$,

$$\begin{aligned}(aA + bB)_{ij} &= aA_{ij} + bB_{ij} \\ &= a(A^T)_{ij} + b(B^T)_{ij} \quad (\text{matrices symétriques}) \\ &= aA_{ji} + bB_{ji} \\ (aA + bB)_{ij} &= (aA + bB)_{ji}\end{aligned}$$

Autrement dit,

$$(aA + bB)^T = aA + bB$$

c'est-à-dire que la matrice est symétrique. De plus, pour $u \in \mathbb{R}^p$,

$$u^T(aA + bB)u = \underbrace{a}_{\geq 0} \underbrace{u^T A u}_{\geq 0} + \underbrace{b}_{\geq 0} \underbrace{u^T B u}_{\geq 0} \geq 0$$

Finalement, $\boxed{\forall a, b \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall A, B \in \text{Sym}_+(p) \quad aA + bB \in \text{Sym}^+(p)}$

2 Utilisons l'identité sur la transposée d'un produit matriciel :

$$\forall M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R}) \quad \forall N \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R}) \quad (MN)^T = N^T M^T$$

où p, q, r sont des entiers naturels. Pour $v \in \mathbb{R}^p$ et $A = vv^T$,

$$A^T = (vv^T)^T = (v^T)^T v^T = vv^T = A$$

De plus, pour $u \in \mathbb{R}^p$,

$$\begin{aligned}u^T A u &= u^T v v^T u \\ &= (v^T u)^T (v^T u) \\ &= (v^T u)(v^T u) \quad (\text{car } v^T u \in \mathbb{R}) \\ &= (v^T u)^2 \\ u^T A u &\geq 0\end{aligned}$$

Puis,

$$\boxed{\forall v \in \mathbb{R}^p \quad vv^T \in \text{Sym}^+(p)}$$

3.a Soient u, v deux vecteurs de $\mathbb{R}^p$ et $(i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2$. Alors

$$\begin{aligned}((uu^T) \odot (vv^T))_{ij} &= u_i u_j v_i v_j \\ &= (u_i v_i)(u_j v_j) \\ [1\text{mm}] &= (u \odot v)_i (u \odot v)_j \\ ((uu^T) \odot (vv^T))_{ij} &= ((u \odot v)(u \odot v)^T)_{ij}\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{(uu^T) \odot (vv^T) = (u \odot v)(u \odot v)^T}$$

3.b La matrice A est symétrique réelle. Le théorème spectral assure que A est diagonalisable en base orthonormée. Soit $(u_1, \dots, u_p)$ le p -uplet de vecteurs propres de A formant une famille orthonormale. Soit P la matrice de changement de base de la base canonique dans cette nouvelle base. On a alors

$$A = P D P^T$$

où D est la matrice diagonale dont les coefficients sont les $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, les valeurs propres associées. La matrice P a pour colonnes les vecteurs $u_1, \dots, u_p$ et P^T a pour lignes leurs transposés, les vecteurs $u_1^T, \dots, u_p^T$. Par suite,

$$\boxed{A = \sum_{k=1}^p \lambda_k u_k u_k^T}$$

De plus, $\forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket \quad 0 \leq u_k^T A u_k = \lambda_k u_k^T u_k = \lambda_k \|u_k\|_2^2$

Puis, $\boxed{\forall k \in \llbracket 1; p \rrbracket \quad \lambda_k \geq 0}$

3.c Soient $A, B \in \text{Sym}^+(p)$. En appliquant le théorème spectral, A et B sont diagonalisables en base orthonormée. Soient donc $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ et $(\mu_1, \dots, \mu_p)$ les valeurs propres respectivement de A et B . D'après la question 3.b, elles sont positives (ou nulles). Soient aussi $(u_1, \dots, u_p)$ et $(v_1, \dots, v_p)$ des bases orthonormées de vecteurs propres associées. Alors, d'après la question 3.b,

$$A = \sum_{k=1}^p \lambda_k u_k u_k^T \quad \text{et} \quad B = \sum_{\ell=1}^p \mu_\ell v_\ell v_\ell^T$$

L'opération $\odot$ étant la multiplication coefficient à coefficient, elle hérite des propriétés algébriques de la multiplication usuelle sur les réels. En particulier, elle est bilinéaire. En utilisant cette propriété, on a

$$\begin{aligned} A \odot B &= \left(\sum_{k=1}^p \lambda_k u_k u_k^T \right) \odot \left(\sum_{\ell=1}^p \mu_\ell v_\ell v_\ell^T \right) \\ &= \sum_{k=1}^p \lambda_k (u_k u_k^T) \odot \left(\sum_{\ell=1}^p \mu_\ell v_\ell v_\ell^T \right) \\ &= \sum_{k=1}^p \sum_{\ell=1}^p \lambda_k \mu_\ell (u_k u_k^T) \odot (v_\ell v_\ell^T) \\ A \odot B &= \sum_{k=1}^p \sum_{\ell=1}^p \lambda_k \mu_\ell (u_k \odot v_\ell)(u_k \odot v_\ell)^T \quad (\text{question 3.a}) \end{aligned}$$

D'après la question 2, pour tout $(k, \ell) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2$, on a $(u_k \odot v_\ell)(u_k \odot v_\ell)^T \in \text{Sym}^+(p)$. De plus, les valeurs propres étant positives, on a aussi $\lambda_k \mu_\ell \geq 0$. Or, en utilisant la question 1, on obtient par récurrence immédiate que toute combinaison linéaire, avec coefficients positifs, de matrices de $\text{Sym}^+(p)$ est encore dans $\text{Sym}^+(p)$. Formellement,

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+ \quad \forall A_1, \dots, A_n \in \text{Sym}^+(p) \quad \sum_{k=1}^n a_k A_k \in \text{Sym}^+(p)$$

Par suite, on en déduit que $\boxed{A \odot B \in \text{Sym}^+(p)}$

PARTIE II

4.a Soit $(i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2$. Remarquons d'abord que pour tout entier k ,

$$A_{ij}^{(0)} = 1 \quad A_{ij}^{(k+1)} = A_{ij}^{(k)} A_{ij}$$

On identifie une suite géométrique. On connaît donc son terme général :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad A_{ij}^{(k)} = (A_{ij})^k$$

Puis,
$$P[A]_{ij} = P(A_{ij}) = \sum_{k=0}^n a_k (A_{ij})^k = \sum_{k=0}^n a_k A_{ij}^{(k)} = \left(\sum_{k=0}^n a_k A^{(k)} \right)_{ij}$$

Autrement dit,

$$\boxed{P[A] = \sum_{k=0}^n a_k A^{(k)}}$$

4.b Soit $A \in \text{Sym}^+(p)$. Montrons par récurrence que la propriété

$$\mathcal{P}(k) : A^{(k)} \in \text{Sym}^+(p)$$

est vraie pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.

- $\mathcal{P}(0)$: par définition,

$$A^{(0)} = (1, \dots, 1)(1, \dots, 1)^T$$

En appliquant la question 2, on conclut que $A^{(0)} \in \text{Sym}^+(p)$.

- $\mathcal{P}(k) \implies \mathcal{P}(k+1)$: par hypothèse de récurrence, $A^{(k)} \in \text{Sym}^+(p)$. Ainsi, d'après la question 3.c,

$$A^{(k+1)} = A^{(k)} \odot A \in \text{Sym}^+(p)$$

- Conclusion : pour tout $k \in \mathbb{N}$, on conclut que $A^{(k)} \in \text{Sym}^+(p)$.

De plus, P étant à coefficients positifs, $P[A]$ est une combinaison linéaire à coefficients positifs de matrices symétriques positives. En utilisant la question 1 et le raisonnement de la question 3.c, on obtient que

$$\boxed{\text{Pour toute matrice } A \in \text{Sym}^+(p), P[A] \in \text{Sym}^+(p).}$$

en tant que combinaison linéaire avec coefficients positifs de matrices de $\text{Sym}^+(p)$.

5.a Fixons $(i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2$. Alors, par la question 4.a,

$$P_n[A] = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} A^{(k)}$$

Rappelons aussi que la fonction $\exp$ est développable en série entière de rayon de convergence $+\infty$. Le polynôme P_n correspondant à sa somme partielle d'ordre n , on a que pour tout réel x ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x) = \exp(x)$$

Puis, par définition,

$$P_n[A]_{ij} = P_n(A_{ij})$$

d'où

$$\boxed{\forall (i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n[A]_{ij} = \exp(A_{ij})}$$

5.b Soit $(i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2$. Alors

$$\begin{aligned} \exp[A]_{ij} &= \exp(A_{ij}) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n[A]_{ij} && \text{(question 5.a)} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} (P_n[A]^T)_{ij} && \text{(question 4.b)} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n[A]_{ji} \\ &= \exp(A_{ji}) && \text{(question 5.a)} \\ &= \exp[A]_{ji} \\ \exp[A]_{ij} &= (\exp[A]^T)_{ij} \end{aligned}$$

On a aussi pour $u \in \mathbb{R}^p$, par linéarité de la limite,

$$\begin{aligned} u^T \exp[A]u &= \sum_{i=1}^p u_i \sum_{j=1}^p \exp[A]_{ij} u_j \\ &= \sum_{i=1}^p u_i \sum_{j=1}^p \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n[A]_{ij} \right) u_j \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^p u_i \sum_{j=1}^p P_n[A]_{ij} u_j \\ u^T \exp[A]u &= \lim_{n \rightarrow +\infty} u^T P_n[A]u \end{aligned}$$

Or, d'après la question 4.b, on a que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u^T P_n[A]u \geq 0$$

Par suite,

$$\boxed{\exp[A] \in \text{Sym}^+(p)}$$

5.c Observons que, par la question 2, pour $u \in \mathbb{R}^p$, on a $uu^T \in \text{Sym}^+(p)$. De plus, la question 5.b précise que $\exp[A] \in \text{Sym}^+(p)$. D'où, en application de la question 3.c à $\exp[A]$ et uu^T , on a

$$\boxed{\forall u \in \mathbb{R}^p \quad \exp[A] \odot (uu^T) \in \text{Sym}^+(p)}$$

6.a L'application bilinéaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est un produit scalaire. En particulier, elle est symétrique, d'où, pour $(i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2$,

$$A_{ij} = \langle x_i | x_j \rangle = \langle x_j | x_i \rangle = A_{ji} = (A^T)_{ij}$$

Soit maintenant $y \in \mathbb{R}^p$. On a

$$\begin{aligned} y^T A y &= \sum_{i=1}^p y_i (A y)_i \\ &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p A_{ij} y_i y_j \\ &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \langle x_i | x_j \rangle y_i y_j \\ &= \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \langle y_i x_i | y_j x_j \rangle \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^p y_i x_i, \sum_{j=1}^p y_j x_j \right\rangle \\ y^T A y &= \left\| \sum_{i=1}^p y_i x_i \right\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{A \in \text{Sym}^+(p)}$$

6.b Soit $(i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2$. On a

$$\begin{aligned} (\exp[A] \odot (uu^T))_{ij} &= \exp[A]_{ij} (uu^T)_{ij} \\ &= \exp[A]_{ij} u_i u_j \\ &= \exp(\langle x_i | x_j \rangle) \exp\left(-\frac{|x_i|^2}{2}\right) \exp\left(-\frac{|x_j|^2}{2}\right) \\ (\exp[A] \odot (uu^T))_{ij} &= \exp\left(\langle x_i | x_j \rangle - \frac{|x_i|^2}{2} - \frac{|x_j|^2}{2}\right) \end{aligned}$$

Or, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^p$ on a

$$|x_i - x_j|^2 = |x_i|^2 + |x_j|^2 - 2\langle x_i | x_j \rangle$$

d'où

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2 \quad (\exp[A] \odot (uu^T))_{ij} = \exp\left(-\frac{|x_i - x_j|^2}{2}\right)$$

6.c Soit B la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2 \quad B_{ij} = \left\langle \frac{x_i}{\sqrt{\lambda}}, \frac{x_j}{\sqrt{\lambda}} \right\rangle$$

D'après la question 6.a, $B \in \text{Sym}^+(p)$. On définit alors aussi le vecteur $v \in \mathbb{R}^p$ de coordonnées

$$\left(\exp\left(-\frac{1}{2} \left| \frac{x_1}{\sqrt{\lambda}} \right|^2\right), \dots, \exp\left(-\frac{1}{2} \left| \frac{x_p}{\sqrt{\lambda}} \right|^2\right) \right)$$

Alors, en appliquant la question 6.b à B et v , on obtient que pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket^2$,

$$(\exp[B] \odot (vv^T))_{ij} = \exp\left(-\frac{1}{2} \left| \frac{x_i}{\sqrt{\lambda}} - \frac{x_j}{\sqrt{\lambda}} \right|^2\right) = \exp\left(-\frac{|x_i - x_j|^2}{2\lambda}\right) = K_{ij}$$

Puis, en utilisant la question 5.c, on conclut

$$K \in \text{Sym}^+(p)$$

PARTIE III

7 Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{E}$. Soient alors $a, A > 0$ associés à f et $b, B > 0$ associés à g tels que

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad |f(y)| \leq A \exp\left(-\frac{y^2}{a}\right) \quad \text{et} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad |g(y)| \leq B \exp\left(-\frac{y^2}{b}\right)$$

Posons $c = \max(a, b)$. Alors $-1/a \leq -1/c$ et $-1/b \leq -1/c$. Donc, par croissance de l'exponentielle,

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad |f(y)| \leq A \exp\left(-\frac{y^2}{c}\right) \quad \text{et} \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad |g(y)| \leq B \exp\left(-\frac{y^2}{c}\right)$$

Par suite, pour tout réel $y \in \mathbb{R}$,

$$|f(y)g(y)| \leq AB \exp\left(-\frac{2|y|^2}{c}\right) \leq AB \exp\left(-\frac{y^2}{c/2}\right) = \underset{y \rightarrow \pm\infty}{o}(\exp(-|y|))$$

En tant que produit de fonctions continues, la fonction fg est elle-même continue. De plus, $y \mapsto \exp(-|y|)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car égale à $y \mapsto \exp(-y)$. Par parité, elle est alors intégrable sur $\mathbb{R}$. Ainsi, la fonction fg est bornée en valeur absolue par une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. Par comparaison pour les fonction positives, il s'ensuit que

$$\boxed{\text{La fonction } fg \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}.}$$

En réalité, nous avons montré que pour $f, g \in \mathcal{E}$, on a $fg \in \mathcal{E}$ et que toute fonction de $\mathcal{E}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

8.a Soit $f \in \mathcal{E}$. Par la question 7, la fonction f^2 est intégrable sur $\mathbb{R}$. Comme elle est positive et que $-\infty < +\infty$, on obtient que

$$(f | f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(y) dy \geq 0$$

Il y a égalité si et seulement si f^2 est nulle sur $\mathbb{R}$. Pour résumer,

Pour tout $f \in \mathcal{E}$, $(f | f) \geq 0$ et, de plus, $(f | f) = 0$ si et seulement si f est nulle.

8.b Cette question demande de connaître les astuces usuelles de majoration. Il s'agit sans doute de la première question fortement discriminante du sujet. Lorsque l'on souhaite majorer une fonction, il est parfois utile de l'écrire différemment, quitte à ajouter 0 (écrit en général sous la forme $-x + x$) ou encore de l'étudier par cas, et de la majorer sur différents intervalles. C'est cette dernière méthode que nous allons employer ici. Typiquement, la fonction se comporte bien différemment en $\pm \infty$, où elle s'écroule vers 0 très rapidement, et autour de x , où elle atteint son maximum.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a $\tau_x(\gamma_\lambda)(y) = \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right)$

L'idée va être de se mettre suffisamment loin de x , à une distance δ , pour que la fonction ressemble suffisamment à $\exp(-y^2/\mu)$ pour un μ bien choisi.

Supposons donc $|y-x| \geq \delta$ pour un certain $\delta > 0$ arbitraire. Cherchons μ tel que

$$-\frac{(y-x)^2}{\lambda} \leq -\frac{y^2}{\mu}$$

soit

$$\mu \geq \lambda \frac{y^2}{(y-x)^2}$$

c'est-à-dire

$$\mu \geq \lambda \left(1 + \frac{x}{y-x}\right)^2$$

Il suffit donc de prendre

$$\mu = \lambda \left(1 + \frac{|x|}{\delta}\right)^2$$

et alors, pour $y \in \mathbb{R}$ tel que $|y-x| \geq \delta$, par croissance de la fonction exponentielle,

$$\exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right) \leq \exp\left(-\frac{y^2}{\mu}\right)$$

Remarquons au passage que $\mu > 0$ puisqu'il en est de même pour λ . Supposons maintenant que $|y-x| \leq \delta$. Les fonctions $\tau_x(\gamma_\lambda)$ et $y \mapsto \exp(-y^2/\mu)$ sont toutes les deux continues sur $[x-\delta; x+\delta]$ comme composées de l'exponentielle et de polynômes. En particulier, elles y sont bornées et atteignent leurs bornes. Elles sont par ailleurs strictement positives. Ainsi, ces bornes le sont aussi. Soient M le maximum de $\tau_x(\gamma_\lambda)$ et m le minimum de $y \mapsto \exp(-y^2/\mu)$ sur $[x-\delta; x+\delta]$. Ces quantités sont strictement positives. Alors, pour $|y-x| \leq \delta$,

$$\exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right) \leq M \quad \text{et} \quad \exp\left(-\frac{y^2}{\mu}\right) \geq m$$

d'où

$$\exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right) \leq \frac{M}{m} \exp\left(-\frac{y^2}{\mu}\right)$$

Soit maintenant $A = \max(1, M/m)$. Alors

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad |\tau_x(\gamma_\lambda)(y)| = \tau_x(\gamma_\lambda)(y) \leq A \exp(-y^2/\mu)$$

et donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \tau_x(\gamma_\lambda) \in \mathcal{E}}$$

9.a Commençons par suivre l'indication et observons que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} \frac{a+\lambda}{a\lambda} \left(y - \frac{ax}{a+\lambda}\right)^2 + \frac{x^2}{a+\lambda} &= \frac{a+\lambda}{a\lambda} y^2 - \frac{2axy}{a\lambda} + \frac{a^2 x^2}{a\lambda(a+\lambda)} + \frac{x^2}{a+\lambda} \\ &= \frac{y^2}{a} + \frac{y^2 - 2xy}{\lambda} + \frac{ax^2}{\lambda(a+\lambda)} + \frac{\lambda x^2}{\lambda(a+\lambda)} \\ \frac{a+\lambda}{a\lambda} \left(y - \frac{ax}{a+\lambda}\right)^2 + \frac{x^2}{a+\lambda} &= \frac{y^2}{a} + \frac{y^2 - 2xy}{\lambda} + \frac{(a+\lambda)x^2}{\lambda(a+\lambda)} \end{aligned}$$

Puis,

$$\boxed{\frac{a+\lambda}{a\lambda} \left(y - \frac{ax}{a+\lambda}\right)^2 + \frac{x^2}{a+\lambda} = \frac{y^2}{a} + \frac{y^2 - 2xy + x^2}{\lambda}}$$

On a donc aussi

$$\exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda} - \frac{y^2}{a}\right) = \tau_{\frac{ax}{a+\lambda}}(\gamma_{\frac{a\lambda}{a+\lambda}})(y) \exp\left(-\frac{x^2}{a+\lambda}\right)$$

Or, d'après la question 8.b, valable pour tout $\lambda > 0$, la fonction $\tau_{\frac{ax}{a+\lambda}}(\gamma_{\frac{a\lambda}{a+\lambda}})$ est dans $\mathcal{E}$. D'après le raisonnement de la question 7, elle est intégrable sur $\mathbb{R}$, d'où, par linéarité de l'intégrale sur $\mathbb{R}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right) \exp\left(-\frac{y^2}{a}\right) dy = \exp\left(-\frac{x^2}{a+\lambda}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \tau_{\frac{ax}{a+\lambda}}(\gamma_{\frac{a\lambda}{a+\lambda}})(y) dy$$

Ainsi en posant

$$c = \int_{-\infty}^{+\infty} \tau_{\frac{ax}{a+\lambda}}(\gamma_{\frac{a\lambda}{a+\lambda}})(y) dy$$

on remarque que $c \geq 0$ car la fonction $\tau_{\frac{ax}{a+\lambda}}(\gamma_{\frac{a\lambda}{a+\lambda}})$ est positive. Dès lors,

$$\boxed{\exists c \geq 0 \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right) \exp\left(-\frac{y^2}{a}\right) dy = c \exp\left(-\frac{x^2}{a+\lambda}\right)}$$

9.b Soient $a, A \in \mathbb{R}_+^*$ associés à $g \in \mathcal{E}$ de sorte que

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad |g(y)| \leq A \exp\left(-\frac{y^2}{a}\right)$$

D'après le résultat de la question 8.b, la fonction $\tau_x(\gamma_\lambda)$ appartient à $\mathcal{E}$. Par la question 7, le produit $\tau_x(\gamma_\lambda)g$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, et pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |C(g)(x)| &= \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right) g(y) dy \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right) |g(y)| dy \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right) A \exp\left(-\frac{y^2}{a}\right) dy \\ |C(g)(x)| &\leq cA \exp\left(-\frac{x^2}{a+\lambda}\right) \end{aligned} \quad (\text{question 9.a})$$

On conclut alors naturellement que $\boxed{C(g) \in \mathcal{E}}$

9.c L'application C est déjà définie sur $\mathcal{E}$ et à valeurs dans $\mathcal{E}$, d'après la question 9.b. Il reste à montrer qu'elle est linéaire. Soient $f, g \in \mathcal{E}$ et $a, b \in \mathbb{R}$. Par linéarité de l'intégrale, on a pour $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} C(af + bg)(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right) (af + bg)(y) dy \\ &= a \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right) f(y) dy + b \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right) g(y) dy \end{aligned}$$

$$C(af + bg)(x) = aC(f)(x) + bC(g)(x)$$

On conclut que C est linéaire et que

L'application C définit un endomorphisme de $\mathcal{E}$.

PARTIE IV

10 Par définition, la famille $\mathcal{G}$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de fonctions $\tau_x(\gamma_\lambda)$ avec $x \in \mathbb{R}$. C'est donc l'espace vectoriel engendré par $\{\tau_x(\gamma_\lambda) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

La famille $\mathcal{G}$ est le plus petit espace vectoriel contenant $\{\tau_x(\gamma_\lambda) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

De plus, d'après la question 8.b, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\tau_x(\gamma_\lambda) \in \mathcal{E}$. Comme $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel, toute combinaison linéaire de fonctions de la forme $\tau_x(\gamma_\lambda)$ appartient à $\mathcal{E}$, c'est-à-dire que tout élément de $\mathcal{G}$ est un élément de $\mathcal{E}$ et donc

L'espace $\mathcal{G}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$.

11.a Commençons par traiter l'indication. Pour tout $(x, x', y) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda} ((y-x)^2 + (y-x')^2) &= \frac{1}{\lambda} (y^2 - 2xy + x^2 + y^2 - 2x'y + x'^2) \\ &= \frac{1}{\lambda} (2y^2 - 2(x+x')y + x^2 + x'^2) \\ &= \frac{2}{\lambda} (y^2 - (x+x')y) + \frac{1}{\lambda} (x^2 + x'^2) \\ &= \frac{2}{\lambda} \left(y - \frac{x+x'}{2}\right)^2 - \frac{2}{\lambda} \frac{(x+x')^2}{4} + \frac{1}{\lambda} (x^2 + x'^2) \\ &= \frac{2}{\lambda} \left(y - \frac{x+x'}{2}\right)^2 + \frac{2x^2 + 2x'^2 - (x+x')^2}{2\lambda} \\ \frac{1}{\lambda} ((y-x)^2 + (y-x')^2) &= \frac{2}{\lambda} \left(y - \frac{x+x'}{2}\right)^2 + \frac{x^2 + x'^2 - 2xx'}{2\lambda} \end{aligned}$$

Ainsi, $\frac{1}{\lambda} ((y-x)^2 + (y-x')^2) = \frac{2}{\lambda} \left(y - \frac{x+x'}{2}\right)^2 + \frac{(x'-x)^2}{2\lambda}$

On peut alors écrire

$$\begin{aligned} (\tau_x(\gamma_\lambda)(y) \mid \tau_{x'}(\gamma_\lambda)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda}\right) \exp\left(-\frac{(y-x')^2}{\lambda}\right) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{\lambda} - \frac{(y-x')^2}{\lambda}\right) dy \end{aligned}$$

Puis, en utilisant l'indication,

$$\begin{aligned} (\tau_x(\gamma_\lambda)(y) \mid \tau_{x'}(\gamma_\lambda)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{2}{\lambda}\left(y - \frac{x+x'}{2}\right)^2 - \frac{(x'-x)^2}{2\lambda}\right) dy \\ &= \exp\left(-\frac{(x'-x)^2}{2\lambda}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{2}{\lambda}\left(y - \frac{x+x'}{2}\right)^2\right) dy \\ (\tau_x(\gamma_\lambda)(y) \mid \tau_{x'}(\gamma_\lambda)) &= \gamma_{2\lambda}(x-x') \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{2}{\lambda}\left(y - \frac{x+x'}{2}\right)^2\right) dy \end{aligned}$$

Avec un changement de variable $z = y - \frac{x+x'}{2}$, affine de coefficient directeur strictement positif, donc licite, on a

$$(\tau_x(\gamma_\lambda)(y) \mid \tau_{x'}(\gamma_\lambda)) = \gamma_{2\lambda}(x-x') \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{2}{\lambda}z^2\right) dz$$

Ou encore $(\tau_x(\gamma_\lambda)(y) \mid \tau_{x'}(\gamma_\lambda)) = \gamma_{2\lambda}(x-x') \int_{-\infty}^{+\infty} \tau_0(\gamma_{\frac{\lambda}{2}})(z) dz$

Posons $c_\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} \tau_0(\gamma_{\frac{\lambda}{2}})(z) dz$

La fonction $\tau_0(\gamma_{\frac{\lambda}{2}})$ étant strictement positive, on a $c_\lambda > 0$. Puis,

$$\boxed{\exists c_\lambda > 0 \quad (\tau_x(\gamma_\lambda) \mid \tau_{x'}(\gamma_\lambda)) = c_\lambda \gamma_{2\lambda}(x-x')}$$

11.b Fixons $x \in \mathbb{R}$. On a que pour tout $x' \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} C(\tau_x(\gamma_\lambda))(x') &= (\tau_{x'}(\gamma_\lambda) \mid \tau_x(\gamma_\lambda)) \\ &= c_\lambda \gamma_{2\lambda}(x' - x) \quad (\text{question 11.a}) \\ C(\tau_x(\gamma_\lambda))(x') &= c_\lambda \tau_x(\gamma_{2\lambda})(x') \end{aligned}$$

Par suite,

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad C(\tau_x(\gamma_\lambda)) = c_\lambda \tau_x(\gamma_{2\lambda})}$$

La question 9.c montre que C est un endomorphisme. En particulier, C est linéaire.

Donc, pour $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_\lambda)$, on a

$$C(f) = \sum_{i=1}^n c_\lambda \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda})$$

d'où $\mathcal{H} \subseteq \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}) \mid n \in \mathbb{N}^*, \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket (x_i, \alpha_i) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

Réciproquement, soit $g = \sum_{i=1}^n \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda})$. Alors, comme $c_\lambda > 0$ et est donc en particulier non nul,

$$C\left(\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{c_\lambda} \tau_{x_i}(\gamma_\lambda)\right) = g$$

On déduit donc

$$\boxed{\mathcal{H} = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}) \mid n \in \mathbb{N}^*, \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket (x_i, \alpha_i) \in \mathbb{R}^2 \right\}}$$

12.a Fixons une famille $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de réels tous distincts. Montrons alors par récurrence que la propriété

$$\mathcal{P}(n) : \forall (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}) = 0 \implies \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \alpha_i = 0$$

est vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$. Faisons d'abord remarquer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $\tau_x(\gamma_{2\lambda})$ est dérivable et que

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad \tau_x(\gamma_{2\lambda})'(y) = -\frac{y-x}{\lambda} \tau_x(\gamma_{2\lambda})(y)$$

- $\mathcal{P}(1)$: supposons $\alpha_1 \tau_{x_1}(\gamma_{2\lambda}) = 0$. Comme

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2\lambda}\right) = 1 \iff y = x$$

on a

$$\alpha_1 = \alpha_1 \tau_{x_1}(\gamma_{2\lambda})(x_1) = 0$$

- $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$: supposons le résultat vrai pour un entier naturel n quelconque. Soit maintenant $(\alpha_i)_{i \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket}$ une famille de réels telle que

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}) = 0$$

Dérivons la fonction. Nous obtenons que, en multipliant par λ , pour tout $y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 0 &= -\sum_{i=1}^{n+1} (y - x_i) \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda})(y) \\ &= -y \underbrace{\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda})(y)}_{=0} + \sum_{i=1}^{n+1} x_i \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda})(y) \\ 0 &= \sum_{i=1}^{n+1} x_i \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda})(y) \end{aligned}$$

Par ailleurs, nous avons aussi

$$x_{n+1} \underbrace{\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda})}_{=0} = 0$$

d'où

$$x_{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda})$$

ou encore

$$\sum_{i=1}^n (x_{n+1} - x_i) \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}) = 0$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient que pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$

$$\alpha_i (x_{n+1} - x_i) = 0$$

Comme les x_i sont tous distincts deux à deux, on a que pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$

$$\alpha_i = 0$$

d'où

$$\alpha_{n+1} \tau_{x_{n+1}}(\gamma_{2\lambda}) = 0$$

En particulier en appliquant la fonction en x_{n+1} on a que $\alpha_{n+1} = 0$. On obtient donc la propriété au rang $n+1$.

- Conclusion : La propriété réciproque étant triviale,

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \forall (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}) = 0 \iff \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \alpha_i = 0$$

12.b La question n'est pas totalement évidente. On pourrait penser que c'est trivial, que C envoie une base sur une base (ce qui est le cas) et que donc C est inversible et que son inverse est linéaire. Mais nous ne sommes pas là dans le cas du cours. Les espaces vectoriels considérés sont de dimensions infinies. De plus, leurs bases sont indénombrables. Le cas n'étant pas au programme, il faut donc refaire une preuve rigoureuse, sans s'appuyer sur de fausses généralisations de résultats en dimension finie.

Supposons qu'il existe deux applications linéaires distinctes D_1 et D_2 réalisant l'inverse de C . Soit $h \in \mathcal{H}$ tel que $D_1(h) \neq D_2(h)$. Écrivons alors $D_1(h) - D_2(h)$ sous la forme

$$D_1(h) - D_2(h) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_\lambda)$$

ce qui est possible car ce sont des éléments de $\mathcal{G}$. Alors, d'une part,

$$\begin{aligned} C(D_1(h) - D_2(h)) &= C\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_\lambda)\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i C(\tau_{x_i}(\gamma_\lambda)) \\ C(D_1(h) - D_2(h)) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i c_\lambda \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}) \quad (\text{d'après la question 11.b}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D'autre part,} \quad C(D_1(h) - D_2(h)) &= C \circ D_1(h) - C \circ D_2(h) \\ &= h - h \end{aligned}$$

$$C(D_1(h) - D_2(h)) = 0$$

D'après la question 12.a, tous les a_i sont nuls. Donc $D_1(h) - D_2(h) = 0$, ce qui est une contradiction. Finalement, $D_1 = D_2$. Il y a donc unicité d'une telle fonction.

Montrons maintenant que cette fonction existe. Rappelons que $c_\lambda > 0$. On va donc montrer que la fonction définie par

$$D\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda})\right) = \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{c_\lambda} \tau_{x_i}(\gamma_\lambda)$$

convient. En effet, si cette fonction est bien définie et est linéaire, c'est l'inverse de C .

- Montrons que la fonction D est bien définie. Il suffit de vérifier que pour tous entiers n et m , pour tous réels $(x_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ distincts deux à deux, pour tous $(y_i)_{i \in \llbracket 1; m \rrbracket}$ distincts deux à deux, pour tous réels non nuls $(\alpha_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ et tous réels non nuls $(\beta_i)_{i \in \llbracket 1; m \rrbracket}$, on a

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}) = \sum_{i=1}^m \beta_i \tau_{y_i}(\gamma_{2\lambda})\right) \implies \left(\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{c_\lambda} \tau_{x_i}(\gamma_\lambda) = \sum_{i=1}^m \frac{\beta_i}{c_\lambda} \tau_{y_i}(\gamma_\lambda)\right)$$

Soit k le nombre d'éléments en commun des familles $(x_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ et $(y_i)_{i \in \llbracket 1; m \rrbracket}$. Quitte à réindicer, supposons que pour $i \in \llbracket 1; k \rrbracket$, on a $x_i = y_i$. En posant

$$z_i = \begin{cases} x_i = y_i & \text{si } i \in \llbracket 1; k \rrbracket \\ x_i & \text{si } i \in \llbracket k+1; n \rrbracket \\ y_{k+i-n} & \text{si } i \in \llbracket n+1; n+m-k \rrbracket \end{cases}$$

$$\text{et} \quad \delta_i = \begin{cases} \alpha_i - \beta_i & \text{si } i \in \llbracket 1; k \rrbracket \\ \alpha_i & \text{si } i \in \llbracket k+1; n \rrbracket \\ -\beta_{k+i-n} & \text{si } i \in \llbracket n+1; n+m-k \rrbracket \end{cases}$$

$$\text{on a alors} \quad \sum_{i=1}^{n+m-k} \delta_i \tau_{z_i}(\gamma_{2\lambda}) = 0$$

Les $(z_i)_{i \in \llbracket 1; n+m-k \rrbracket}$ sont deux à deux distincts, sinon il y aurait d'autres éléments en commun entre les familles $(x_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ et $(y_i)_{i \in \llbracket 1; m \rrbracket}$, ce qui contredirait la définition de k . La question 12.a permet alors de conclure que $\delta_i = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1; n+m-k \rrbracket$. Comme les $(\alpha_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ et les $(\beta_i)_{i \in \llbracket 1; m \rrbracket}$ sont non nuls, il ne peut pas y avoir de δ_i pour $i \geq k+1$. C'est-à-dire que $\llbracket 1; k \rrbracket$ contient tous les indices possibles, autrement dit, $n = m = k$. Puis $\alpha_i = \beta_i$ pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Par suite,

$$\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{c_\lambda} \tau_{x_i}(\gamma_\lambda) = \sum_{i=1}^m \frac{\beta_i}{c_\lambda} \tau_{y_i}(\gamma_{2\lambda})$$

Ainsi, la fonction D est bien définie.

- La fonction D est linéaire. En effet, soient $h, h' \in \mathcal{H}$. Quitte à prendre l'union des familles de réels associées à h et h' , on a

$$h = \sum_{i=1}^n \alpha_i \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}) \quad \text{et} \quad h' = \sum_{i=1}^n \beta_i \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda})$$

Soit maintenant $a \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} D(h + ah') &= D\left(\sum_{i=1}^n (\alpha_i + a\beta_i) \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda})\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i + a\beta_i}{c_\lambda} \tau_{x_i}(\gamma_\lambda) \\ D(h + ah') &= D(h) + aD(h') \end{aligned}$$

L'application D est donc linéaire.

Finalement,

Il existe une unique application linéaire D telle que $D \circ C = \text{id}_{\mathcal{H}}$ et $C \circ D = \text{id}_{\mathcal{G}}$.

12.c Soit $h \in \mathcal{H}$. Soit x un réel. Alors, par la question 12.b,

$$h(x) = C \circ D(h)(x) = C(D(h))(x)$$

ce qui s'écrit, en utilisant la définition de C ,

$$\forall h \in \mathcal{H} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad h(x) = (\tau_x(\gamma_\lambda) \mid D(h))$$

13.a Pour montrer que l'application $(\cdot \mid \cdot)_{\mathcal{H}}$, est un produit scalaire, il faut vérifier qu'elle est linéaire à droite, symétrique et définie positive. Soient donc $f, g, h \in \mathcal{H}$.

- Définie positive: D'après la question 8.a, $(D(h) \mid D(h)) \geq 0$ avec égalité si et seulement si $D(h) = 0$, ce qui est le cas si et seulement si $h = 0$ car, d'après la question 12.b, le morphisme D est bijectif. De plus, d'après la question 11.a, on a $c_\lambda > 0$, et donc $(h \mid h)_{\mathcal{H}} \geq 0$ avec égalité si et seulement si $h = 0$.
- Linéaire à droite: Soient μ, ν deux réels. Alors

$$\begin{aligned} (f \mid \mu g + \nu h)_{\mathcal{H}} &= c_\lambda (D(f) \mid \mu D(g) + \nu D(h)) \\ &= c_\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} D(f)(y) (\mu D(g) + \nu D(h))(y) dy \\ &= \mu c_\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} D(f)(y) D(g)(y) dy + \nu c_\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} D(f)(y) D(h)(y) dy \\ (f \mid \mu g + \nu h)_{\mathcal{H}} &= \mu (f \mid g) + \nu (f \mid h) \end{aligned}$$

• Symétrique :

$$\begin{aligned}
 (h \mid g)_{\mathcal{H}} &= c_{\lambda}(\mathcal{D}(h) \mid \mathcal{D}(g)) \\
 &= c_{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{D}(h)(y) \mathcal{D}(g)(y) dy \\
 &= c_{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{D}(g)(y) \mathcal{D}(h)(y) dy \\
 (h \mid g)_{\mathcal{H}} &= (g \mid h)_{\mathcal{H}}
 \end{aligned}$$

Ainsi,

L'application $(\cdot \mid \cdot)_{\mathcal{H}}$ est un produit scalaire.

13.b Soient $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathcal{H}$. En utilisant la question 12.c, on a

$$h(x) = (\tau_x(\gamma_{\lambda}) \mid \mathcal{D}(h))$$

Puis maintenant en appliquant la question 11.b,

$$h(x) = (c_{\lambda} \mathcal{D}(\tau_x(\gamma_{2\lambda})) \mid \mathcal{D}(h))$$

et donc

$$\forall h \in \mathcal{H} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad h(x) = (\tau_x(\gamma_{2\lambda}) \mid h)_{\mathcal{H}}$$

13.c La fonction h est une somme finie de fonctions qui tendent vers 0 en $\pm\infty$. Il en est donc de même pour h . De plus, h est aussi continue. Il en va de même pour $|h|$. Donc $|h|$ atteint son maximum. Disons qu'elle l'atteint en un point x . Alors, d'après la question 13.b,

$$\|h\|_{\infty} = |h(x)| = |(\tau_x(\gamma_{2\lambda}) \mid h)_{\mathcal{H}}|$$

Puis, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\|h\|_{\infty} \leq \|\tau_x(\gamma_{2\lambda})\|_{\mathcal{H}} \|h\|_{\mathcal{H}}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
 \|\tau_x(\gamma_{2\lambda})\|_{\mathcal{H}}^2 &= (\tau_x(\gamma_{2\lambda}) \mid \tau_x(\gamma_{2\lambda}))_{\mathcal{H}} \\
 &= c_{\lambda}(\mathcal{D}(\tau_x(\gamma_{2\lambda})) \mid \mathcal{D}(\tau_x(\gamma_{2\lambda}))) \\
 &= c_{\lambda} \left(\frac{1}{c_{\lambda}} \tau_x(\gamma_{\lambda}) \mid \frac{1}{c_{\lambda}} \tau_x(\gamma_{\lambda}) \right) \quad (\text{question 11.b}) \\
 &= \frac{1}{c_{\lambda}} (\tau_x(\gamma_{\lambda}) \mid \tau_x(\gamma_{\lambda})) \\
 &= \gamma_{2\lambda}(x - x) \quad (\text{question 11.a})
 \end{aligned}$$

$$\|\tau_x(\gamma_{2\lambda})\|_{\mathcal{H}}^2 = 1$$

Par conséquent,

$$\|h\|_{\infty} \leq \|h\|_{\mathcal{H}}$$

PARTIE V

14 Supposons que $\mathcal{S}_*$ ait au moins deux éléments notés h_1 et h_2 . Ce sont des interpolantes. Soit alors la fonction $h_3 = (h_1 + h_2)/2$. Cette dernière fonction est aussi une interpolante. De plus,

$$\begin{aligned}
 J(h_3) &= \frac{1}{2} \left\| \frac{h_1 + h_2}{2} \right\|_{\mathcal{H}}^2 \\
 &= \frac{1}{2} \left(\left\| \frac{h_1}{2} \right\|_{\mathcal{H}}^2 + \left\| \frac{h_2}{2} \right\|_{\mathcal{H}}^2 + 2 \left(\frac{h_1}{2} \middle| \frac{h_2}{2} \right)_{\mathcal{H}} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \|h_1\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{1}{4} \|h_2\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{1}{2} (h_1 | h_2)_{\mathcal{H}} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} J(h_1) + \frac{1}{2} J(h_2) + \frac{1}{2} (h_1 | h_2)_{\mathcal{H}} \right) \\
 &\leq \frac{1}{2} \left(J_* + \frac{1}{2} \|h_1\|_{\mathcal{H}} \|h_2\|_{\mathcal{H}} \right) \quad (\text{inégalité de Cauchy-Schwarz}) \\
 &\leq \frac{1}{2} \left(J_* + \frac{1}{2} \sqrt{2J_*} \sqrt{2J_*} \right) \\
 J(h_3) &\leq J_*
 \end{aligned}$$

Or, par définition $J(h_3) \geq J_*$. Il s'ensuit que toutes les inégalités sont en réalité des égalités, en particulier pour l'application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Ainsi, h_1 et h_2 sont colinéaires. Par symétrie des rôles, on peut supposer qu'il existe a un réel tel que $h_1 = ah_2$. Comme les fonctions h_1 et h_2 coïncident en les x_i , alors se présentent deux cas :

- Soit les a_i sont tous nuls et alors bien évidemment la seule fonction minimisant J est la fonction nulle et donc $h_1 = h_2 = 0$.
- Soit il existe un indice i tel que a_i est non nul. Or, en appliquant h_1 et h_2 en x_i , on a $a_i = aa_i$, d'où $a = 1$ puis $h_1 = h_2$.

Finalement $h_1 = h_2 = h_3$ et donc

L'ensemble $\mathcal{S}_*$ possède au plus un élément.

15 Supposons l'existence de $h_0 \in \mathcal{H}_0$ tel que $(h_0 | \tilde{h})_{\mathcal{H}} \neq 0$. Quitte à prendre $-h_0$, on supposera que $(h_0 | \tilde{h})_{\mathcal{H}} > 0$. Posons pour $a \in \mathbb{R}$

$$P(a) = J(\tilde{h} - ah_0)$$

$$\text{ou encore } P(a) = \frac{1}{2} \|\tilde{h} - ah_0\|_{\mathcal{H}}^2 = \frac{1}{2} \|\tilde{h}\|_{\mathcal{H}}^2 + \frac{1}{2} \|h_0\|_{\mathcal{H}}^2 a^2 - a(h_0 | \tilde{h})_{\mathcal{H}}$$

Il s'agit d'un polynôme du second degré dont le coefficient dominant est positif. Il admet donc un minimum. Ce minimum est atteint en

$$a_{min} = -\frac{(h_0 | \tilde{h})_{\mathcal{H}}}{\|h_0\|_{\mathcal{H}}^2} = \frac{(h_0 | \tilde{h})_{\mathcal{H}}}{\|h_0\|_{\mathcal{H}}^2} > 0$$

Le polynôme P est décroissant puis croissant (car c'est un polynôme de degré 2 à coefficient dominant positif). Le minimum étant atteint après 0, on a $P(a_{min}) < P(0)$.

Or $P(0) = J(\tilde{h}) = J_*$. Donc $P(a_{\min}) < J_*$. Nous résumons tout cela dans le tableau de variation suivant :

	$-\infty$	0	$a_{\min}$	$+\infty$
P	$+\infty$	J_*	$P(a_{\min})$	$+\infty$

Or $P(a_{\min}) = J(\tilde{h} - a_{\min}h_0)$ et pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$ on a

$$(\tilde{h} - a_{\min}h_0)(x_i) = \tilde{h}(x_i) - a_{\min}h_0(x_i) = a_i$$

Il s'agit donc d'une interpolante. C'est une interpolante dont l'image par J est strictement plus faible que le minimum J_* , ce qui est absurde. Finalement,

$$\boxed{\forall h_0 \in \mathcal{H}_0 \quad (\tilde{h} | h_0)_{\mathcal{H}} = 0}$$

16.a Procédons par double inclusion. D'une part, on a que pour $\tilde{h} \in \mathcal{S}_*$, la question 15 montre que $\tilde{h} \in \mathcal{H}_0^\perp$. Par définition, on a aussi $\tilde{h} \in \mathcal{S}$. Par suite,

$$\mathcal{S}_* \subseteq \mathcal{S} \cap \mathcal{H}_0^\perp$$

D'autre part, si $\tilde{h} \in \mathcal{S} \cap \mathcal{H}_0^\perp$, alors pour tout $h \in \mathcal{S}$, on a que

$$\forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket \quad (\tilde{h} - h)(x_i) = a_i - a_i = 0$$

autrement dit,

$$\tilde{h} - h \in \mathcal{H}_0$$

Comme, en particulier, $\tilde{h} \in \mathcal{H}_0^\perp$, on a donc

$$(\tilde{h} | \tilde{h} - h)_{\mathcal{H}} = 0$$

Ce qui s'écrit encore

$$\|\tilde{h}\|_{\mathcal{H}}^2 = (\tilde{h} | h)_{\mathcal{H}}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\|\tilde{h}\|_{\mathcal{H}}^2 \leq \|\tilde{h}\|_{\mathcal{H}} \|h\|_{\mathcal{H}}$$

Si $\|\tilde{h}\|_{\mathcal{H}} = 0$, alors on a déjà $\|\tilde{h}\|_{\mathcal{H}} \leq \|h\|_{\mathcal{H}}$. Sinon, en divisant par la quantité $\|\tilde{h}\|_{\mathcal{H}}$, on obtient encore que $\|\tilde{h}\|_{\mathcal{H}} \leq \|h\|_{\mathcal{H}}$. On conclut que $\|\tilde{h}\|_{\mathcal{H}}$ est minimal. En particulier, $\tilde{h}$ minimise aussi J :

$$\frac{1}{2} \|\tilde{h}\|_{\mathcal{H}}^2 = J_*$$

Enfin,

$$\boxed{\mathcal{S}_* = \mathcal{S} \cap \mathcal{H}_0^\perp}$$

16.b Il suffit de vérifier que, pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, on a $\tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}) \in \mathcal{H}_0^\perp$. Soit donc i compris entre 1 et p et $h_0 \in \mathcal{H}_0$. Alors, d'après la question 13.b et la définition de $\mathcal{H}_0$,

$$(\tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}) | h_0)_{\mathcal{H}} = h_0(x_i) = 0$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathcal{H}_0^\perp \supseteq \text{Vect } (\tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}))_{i \in \llbracket 1; p \rrbracket}}$$

17.a Pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$ on a

$$\begin{aligned} (K\alpha)_i &= \sum_{j=1}^p K_{ij} \alpha_j \\ &= \sum_{j=1}^p \exp\left(-\frac{(x_i - x_j)^2}{2\lambda}\right) \alpha_j \\ &= \sum_{j=1}^p \alpha_j \tau_{x_j}(\gamma_{2\lambda})(x_i) \\ (K\alpha)_i &= h_\alpha(x_i) \end{aligned}$$

Par conséquent,

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^p$, h_α est une interpolante si et seulement si $K\alpha = a$.

17.b Soit $u \in \text{Ker } K$. Alors, en particulier, $u^T K u = 0$. Par le calcul de la question 17.a, $Ku = (h_u(x_1), \dots, h_u(x_n))^T$. Ainsi,

$$\begin{aligned} u^T K u &= \sum_{i=1}^p u_i h_u(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^p u_i (\tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}) \mid h_u)_{\mathcal{H}} && \text{(question 13.b)} \\ &= \left(\sum_{i=1}^p u_i \tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}) \mid h_u \right)_{\mathcal{H}} \\ &= (h_u \mid h_u)_{\mathcal{H}} \\ u^T K u &= \|h_u\|_{\mathcal{H}}^2 \end{aligned}$$

Puis, d'après la question 13.c, on a

$$0 = u^T K u \geq \|h_u\|_{\infty}^2$$

On obtient donc que $h_u = 0$. En utilisant la question 12.a, on obtient aussi que $u = 0$. Ainsi,

$$\text{Ker } K = \{0\}$$

c'est-à-dire

La matrice K est inversible.

18 La question 17.b a permis de montrer que K est inversible. On peut donc poser $\alpha_* = K^{-1}a$. Alors, d'après la question 17.a, on a $h_{\alpha_*} \in \mathcal{S}$. De plus, par définition, on a $h_{\alpha_*} \in \text{Vect } (\tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}))_{i \in \llbracket 1; p \rrbracket}$. Ainsi, avec la question 16.b on sait que $h_{\alpha_*} \in \mathcal{H}_0^\perp$. La question 16.a permet donc de conclure que $h_{\alpha_*} \in \mathcal{S}_*$. Dès lors, d'après la question 14,

$$\exists \alpha_* \quad \mathcal{S}_* = \{\alpha_*\}$$

On a donc $J_* = \frac{1}{2} \|h_{K^{-1}a}\|_{\mathcal{H}}^2$

$$J_* = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p (K^{-1}a)_i (K^{-1}a)_j (\tau_{x_i}(\gamma_{2\lambda}) \mid \tau_{x_j}(\gamma_{2\lambda}))_{\mathcal{H}}$$

En appliquant la question 13.b,

$$J_* = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p (K^{-1}a)_i (K^{-1}a)_j \tau_{x_j}(\gamma_{2\lambda})(x_i)$$