

EXERCICE 2

Extremums d'une forme quadratique sur la boule unité fermée

On se donne un entier $n \geq 2$. On rappelle que la norme euclidienne usuelle $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$ est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad x = (x_1, \dots, x_n), \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}.$$

On note $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$.

On fixe des réels $a_{i,j}$ pour $1 \leq i \leq j \leq n$ et on considère l'application $f : B_n \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=i}^n a_{i,j} x_i x_j \right) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j} x_i x_j.$$

L'objectif de cet exercice est d'étudier les extremums de la fonction f sur la partie B_n . On définit la matrice $M_f \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ comme la matrice **symétrique** dont les coefficients $(m_{i,j})$ vérifient :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad m_{i,j} = \begin{cases} a_{i,i} & \text{si } i = j \\ \frac{a_{i,j}}{2} & \text{si } i < j. \end{cases}$$

Si M est une matrice à coefficients réels, on note M^T sa matrice transposée.

Partie I - Étude d'un exemple

Dans cette **partie**, on suppose que $n = 2$ et que l'application $f : B_2 \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$\forall (x_1, x_2) \in B_2, \quad f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2.$$

- Q11.** Justifier que l'application f admet un maximum et un minimum sur B_2 .
- Q12.** En étudiant la fonction $t \mapsto f(\cos(t), \sin(t))$, déterminer les extremums de l'application f sur la frontière $S_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ de B_2 .
- Q13.** Justifier que f est de classe C^1 et déterminer les points critiques de l'application f dans la boule unité ouverte $B'_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ de $\mathbb{R}^2$.
- Q14.** En déduire que le maximum de f sur B_2 est 3 et que le minimum de f sur B_2 est -1 .
- Q15.** Vérifier que la plus grande valeur propre de M_f est égale au maximum de f sur B_2 et que la plus petite valeur propre de M_f est égale au minimum de f sur B_2 .

Partie II - Le cas général

On ne suppose plus dans cette **partie** que $n = 2$.

On considère un vecteur $x = (x_1, \dots, x_n) \in B_n$ et on note $X = (x_1 \cdots x_n)^T \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Q16. Montrer que $f(x) = X^T M_f X$.

Q17. Justifier que la matrice M_f est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Dans la suite, on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ les valeurs propres de M_f comptées avec leur multiplicité et on suppose que $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$.

On fixe une matrice **orthogonale** $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $M_f = P D P^{-1}$ où :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

On note $Y = P^{-1}X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Q18. Montrer les égalités $Y^T Y = X^T X = \|x\|^2$.

Q19. On suppose que $\lambda_1 < 0 < \lambda_n$. Montrer que $\lambda_1 \leq Y^T D Y \leq \lambda_n$ et en déduire que $\lambda_1 \leq f(x) \leq \lambda_n$.

Q20. En déduire que si $\lambda_1 < 0 < \lambda_n$, alors $\max_{B_n}(f) = \lambda_n$ et $\min_{B_n}(f) = \lambda_1$.

Q21. Dans le cas où $\lambda_1 \geq 0$, déterminer le maximum et le minimum de f sur B_n .

Partie III - Application des résultats

Dans cette **partie**, on suppose que $n \geq 3$ et que l'application $f : B_n \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in B_n, \quad f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n x_k^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2x_i x_j.$$

Q22. Déterminer le maximum et le minimum de l'application f sur B_n (on pourra commencer par déterminer le rang de la matrice $M_f - 2I_n$ où I_n désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

Exercice II

Soient les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) \neq 0$, ainsi que l'équation :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x, y). \quad (\mathcal{E})$$

1. (a) Montrer qu'une telle fonction f vérifie l'équation $(\mathcal{E})$ si et seulement si il existe une fonction réelle a , de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, telle que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = a(x) f(x, y).$$

- (b) En déduire que les solutions de $(\mathcal{E})$ ne s'annulant pas sont exactement les fonctions de la forme $(x, y) \mapsto \varphi(x) \psi(y)$, où φ et ψ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ ne s'annulant pas. Pour une telle solution f de $(\mathcal{E})$, y-a-t-il unicité du couple (φ, ψ) ?

Téléchargé gratuitement sur www.Doc-Solus.fr.

- (c) Soient g et h deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^*$ et telles que $g(0) = h(0)$.

Montrer qu'il existe une et une seule solution f de $(\mathcal{E})$ ne s'annulant pas et telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x, 0) = g(x) \quad \text{et} \quad \forall y \in \mathbb{R}, f(0, y) = h(y).$$

2. Dans cette question, f désigne une solution de $\mathcal{E}$ sur $\mathbb{R}^2$, strictement positive.
- (a) Montrer que f présente en (x_0, y_0) un maximum local si et seulement si les fonctions $x \mapsto f(x, y_0)$ et $y \mapsto f(x_0, y)$ présentent respectivement en x_0 et en y_0 un maximum local.
- (b) En déduire que l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ où f présente un maximum local est de la forme $A \times B$, où A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$ à préciser.
3. Soit maintenant la fonction $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, F(x, y) = (xy)^3 + |xy|^3$.
- (a) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. (On pourra écrire F comme une composée).
- (b) Démontrer que F vérifie l'équation $(\mathcal{E})$.
- (c) Montrer qu'il n'existe pas de fonctions φ, ψ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, F(x, y) = \varphi(x) \psi(y).$$