

PARTIE II

Étude de l'existence de J_m

Rappel : $J_m = \int_0^{+\infty} \frac{(\sin t)^m}{t} dt$ et $\varphi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} e^{-xt} dt$.

II.1/ Étude de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin t)^m}{t} dt$.

Justifier la convergence de l'intégrale généralisée $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin t)^m}{t} dt$ pour tout entier naturel non nul m .

Pour tout entier relatif k tel que l'intégrale généralisée $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{e^{ikt}}{t} dt$ converge, on note I_k la valeur de cette intégrale.

II.2/ Étude de J_1 .

Justifier l'existence de J_1 et établir une relation entre J_1 et $\varphi(0)$ (on pourra utiliser une intégration par parties, en remarquant que $(1 - \cos)' = \sin$).

II.3/ Étude de l'existence de I_k .

Préciser la nature de l'intégrale généralisée I_k selon la valeur de l'entier relatif k (on pourra utiliser une intégration par parties).

II.4/ Étude de la nature de J_m

Pour tout x appartenant à $\left[\frac{\pi}{2}; +\infty\right[$ et tout entier relatif k , on note : $I_k(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{e^{ikt}}{t} dt$.

II.4.1/ Exprimer, pour tout entier naturel non nul m et pour tout nombre réel x appartenant à

$\left[\frac{\pi}{2}; +\infty\right[$, l'intégrale $\int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{(\sin t)^m}{t} dt$ à l'aide des intégrales $I_k(x)$.

II.4.2/ En déduire l'existence de J_{2p+1} pour tout entier naturel p .

II.4.3/ Quelle est la nature de l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{(\sin t)^{2p}}{t} dt$ pour p entier naturel non nul ?

PARTIE II

1. Soit f une fonction de $\mathcal{C}$. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est intégrable sur $] -1,1[$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \int_{-1}^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

2.1 Calculer I_0 et I_1 .

2.2 Pour $n \geq 2$, donner une relation entre I_n et I_{n-2} (on pourra, entre autre méthode, utiliser le changement de variable $\theta = \text{Arc cos } x$).

2.3 En déduire les valeurs de I_2 et I_4 . Quelle est la valeur de I_{2p+1} pour $p \in \mathbb{N}$?

4. On veut montrer qu'il existe trois réels a_0, a_1, a_2 uniques, tels que pour tout polynôme $P \in \mathcal{R}_5$, on a

$$(1) \quad \int_{-1}^1 \frac{p(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = a_0 P\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) + a_1 P(0) + a_2 P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

4.1 On suppose que l'égalité (1) est satisfaite par tout $P \in \mathcal{R}_5$. En prenant successivement les polynômes P définis par $P(x)=1$, $P(x)=x$, $P(x)=x^2$, déterminer les réels a_0, a_1, a_2 .

4.2 Montrer que le triplet (a_0, a_1, a_2) trouvé convient pour les polynômes P définis par $P(x) = x^4$ puis $P(x) = x^5$.

En déduire que l'égalité (1) est vérifiée pour tout polynôme $P \in \mathcal{R}_5$.

5. calcul d'une intégrale.

5.1 Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{x^4}{\sqrt{x(1-x)}}$ est intégrable sur $]0,1[$.

5.2 Calculer l'intégrale $J = \int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{x(1-x)}} dx$, à l'aide du changement de variable $t = 2x - 1$ et de la formule (1).