

LOG-CONCAVITÉ DES SUITES

1 Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, posons $a_k = \binom{n}{k}$ et remarquons que $a_k > 0$. Soit $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$. Calculons

$$\begin{aligned} \frac{a_k^2}{a_{k-1} a_{k+1}} &= \binom{n}{k}^2 \binom{n}{k-1}^{-1} \binom{n}{k+1}^{-1} \\ &= \frac{(n!)^2 (k-1)! (n-k+1)! (k+1)! (n-k-1)!}{(k!)^2 [(n-k)!]^2 (n!)^2} \\ &= \frac{k+1}{\underbrace{k}_{\geq 1}} \frac{n-k+1}{\underbrace{n-k}_{\geq 1}} \\ \frac{a_k^2}{a_{k-1} a_{k+1}} &\geq 1 \end{aligned}$$

Comme $a_{k-1} a_{k+1} > 0$, on a $a_k^2 \geq a_{k-1} a_{k+1}$. Ceci étant vrai pour tout $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$,

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $\left(\binom{n}{k} \right)_{0 \leq k \leq n}$ est log-concave.

2 Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$. Comme $(a_k)_{0 \leq k \leq n}$ est ultra log-concave,

$$\frac{a_k^2}{\binom{n}{k}^2} \geq \frac{a_{k-1} a_{k+1}}{\binom{n}{k-1} \binom{n}{k+1}}$$

soit $a_k^2 \geq a_{k-1} a_{k+1} \binom{n}{k}^2 \binom{n}{k-1}^{-1} \binom{n}{k+1}^{-1} \geq a_{k-1} a_{k+1}$

car $\left(\binom{n}{k} \right)_{0 \leq k \leq n}$ est log-concave d'après le résultat de la question 1.

Si $(a_k)_{0 \leq k \leq n}$ est ultra log-concave, alors elle est log-concave.

3 Soit $(a_k)_{0 \leq k \leq n}$ une suite strictement positive et log-concave. Posons

$$j = \max \{k \in \llbracket 0; n \rrbracket \mid a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_k\}$$

Si $k = n$, on pose $j = n$ et la suite est unimodulaire. Sinon, montrons par récurrence que le prédicat

$$\mathcal{P}(\ell) : \quad a_{j+\ell} \geq a_{j+\ell+1}$$

est vraie pour tout $\ell \in \llbracket 0; n-j-1 \rrbracket$.

- $\mathcal{P}(0)$ est vraie car par définition de j , on a $a_j > a_{j+1}$.
- $\mathcal{P}(\ell) \implies \mathcal{P}(\ell+1)$: soit $\ell \in \llbracket 0; n-j-1 \rrbracket$ tel que $\mathcal{P}(\ell)$ est vraie. Par log-concavité de la suite on a

$$a_{j+\ell+1} \geq \frac{a_{j+\ell} a_{j+\ell+2}}{a_{j+\ell+1}} \geq a_{j+\ell+2}$$

car $a_{j+\ell} \geq a_{j+\ell+1}$ par hypothèse de récurrence et $a_{j+\ell+1} > 0$. Donc $\mathcal{P}(\ell+1)$ est vraie.

- Conclusion : $\mathcal{P}(\ell)$ est vraie pour tout $\ell \in \llbracket 0; n-j-1 \rrbracket$.

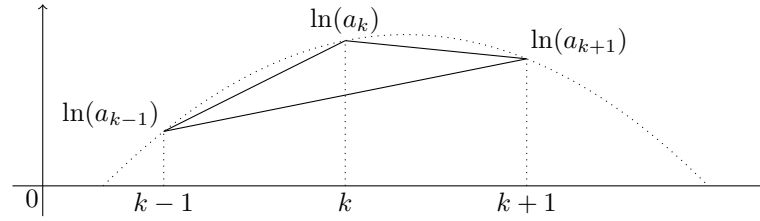
On a montré que $a_0 \leq \dots \leq a_j \geq a_{j+1} \geq \dots \geq a_n$.

Si $(a_k)_{0 \leq k \leq n}$ est strictement positive et log-concave, alors elle est unimodulaire.

Une suite $(a_k)_{0 \leq k \leq n}$ strictement positive est log-concave si et seulement si celle de ses logarithmes $(\ln(a_k))_{0 \leq k \leq n}$ vérifie

$$\forall k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket \quad \ln(a_k) \geq \frac{\ln(a_{k-1}) + \ln(a_{k+1}))}{2}$$

ce qui signifie que chaque terme est supérieur à la moyenne des deux qui l'entourent. Le logarithme de la suite a une allure de nuage de points « en cloche ».



POLYNÔMES RÉELS À RACINES TOUTES RÉELLES

4 Soit $n \in \mathbb{N}$. Remarquons que si $n = 0$, alors P' est le polynôme nul pour lequel la notion de polynôme à racines toutes réelles n'est pas définie par l'énoncé. Si $n = 1$, alors P' est un polynôme constant non nul et l'ensemble de ses racines est vide, c'est bien un polynôme à racines toutes réelles. Supposons maintenant que $n = \deg(P) \geq 2$ de sorte que P' puisse admettre une racine sans être le polynôme nul. Le polynôme P s'écrit

$$P = a_n \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{\nu_i}$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ sont les racines de P de multiplicités respectives $\nu_1, \dots, \nu_r$. On a

$$n = \deg(P) = \sum_{i=1}^r \nu_i$$

Quitte à réordonner les racines, on peut supposer que $\lambda_1 < \dots < \lambda_r$. Pour $i \in \llbracket 1; r \rrbracket$, si $\nu_i \geq 2$, alors λ_i est aussi racine de P' , avec multiplicité $\nu_i - 1$. Soit $k \in \llbracket 1; r-1 \rrbracket$.

- La fonction P est continue sur $[\lambda_k; \lambda_{k+1}]$.
- La fonction P est dérivable sur $] \lambda_k; \lambda_{k+1} [$.
- $P(\lambda_k) = P(\lambda_{k+1}) = 0$.

D'après le théorème de Rolle, il existe $c_k \in] \lambda_k; \lambda_{k+1} [$ tel que $P'(c_k) = 0$.

On obtient $r - 1$ racines $c_1, \dots, c_{r-1}$ de P' , distinctes car elle appartiennent à des intervalles deux à deux disjoints, et distinctes des λ_i par définition. En comptant avec multiplicité, P' admet au moins

$$\sum_{i=1}^r (\nu_i - 1) + r - 1 = n - 1$$

racines. Or P' est de degré $\deg(P) - 1 = n - 1$. On les a donc toutes, et elles sont réelles.

Le polynôme P' est à racines toutes réelles.

5 Si $Q \in \mathbb{R}[X]$ vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \quad Q(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_{k=0}^n a_k x^{n-k}$$

alors Q et le polynôme $R(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^{n-k}$

coïncident sur $\mathbb{R}^*$. Le polynôme $Q - R$ admet alors une infinité de racines donc est nul. Il est alors naturel de prendre pour définition

$$Q(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^{n-k}$$

Le calcul de $X^n P(1/X)$ a en fait bien un sens dans l'ensemble des fractions rationnelles $\mathbb{K}(X)$ (notion hors programme jusqu'en 2021) et le calcul ci-dessus montre que c'est le polynôme Q annoncé.

Notons ν la multiplicité de 0 comme racine de P , en convenant que $\nu = 0$ si $P(0) \neq 0$. Alors $a_0 = \dots = a_{\nu-1} = 0$ et $a_\nu \neq 0$, soit par changement d'indice

$$Q(X) = \sum_{k=\nu}^n a_k X^{n-k} = \sum_{k'=0}^{\nu} a_{n-k'} X^{k'}$$

qui est un polynôme de degré $n - \nu$ car $a_\nu \neq 0$. Le polynôme P s'écrit

$$P(X) = a_n X^\nu \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{\nu_i}$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ sont les racines non nulles de P de multiplicités respectives $\nu_1, \dots, \nu_r$. On a

$$n = \deg(P) = \nu + \sum_{i=1}^r \nu_i$$

et

$$Q(X) = a_n X^{n-\nu} \prod_{i=1}^r (1 - \lambda_i X)^{\nu_i}$$

Les racines de Q sont donc les $1/\lambda_i$ de multiplicités respectives ν_i . On compte bien

$$\sum_{i=1}^r \nu_i = n - \nu = \deg(Q)$$

racines pour Q .

Le polynôme $Q(X) = X^n P(1/X)$ est à racines toutes réelles.

6 Soit $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$. Comme P est de degré n et $k \leq n-1$, d'après les propriétés sur la dérivation de polynômes, Q_1 est de degré $n-k+1$. D'après le résultat de la question 5, Q_2 est de degré au plus $n-k+1$. En dérivant $n-k-1$ fois, le polynôme Q est de degré au plus 2. S'il est de degré inférieur ou égal à 1, il est à racines toutes réelles car ses coefficients sont réels. Sinon, calculons

$$Q_1(X) = P^{(k-1)}(X) = \sum_{i=k-1}^n a_i \frac{i!}{(i-k+1)!} X^{i-k+1}$$

puis

$$\begin{aligned} Q_2(X) &= X^{n-k+1} Q_1(1/X) \\ &= \sum_{i=k-1}^n a_i \frac{i!}{(i-k+1)!} X^{n-k+1-(i-k+1)} \\ Q_2(X) &= \sum_{i=k-1}^n a_i \frac{i!}{(i-k+1)!} X^{n-i} \end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned} Q(X) &= Q_2^{(n-k-1)}(X) \\ &= \sum_{i=k-1}^{k+1} a_i \frac{i!}{(i-k+1)!} \frac{(n-i)!}{(n-i-(n-k-1))!} X^{n-i-(n-k-1)} \\ &= \sum_{i=k-1}^{k+1} a_i \frac{i!}{(i-k+1)!} \frac{(n-i)!}{(k-i+1)!} X^{k-i+1} \\ Q(X) &= a_{k-1} \frac{(k-1)!(n-k+1)!}{2} X^2 + a_k k!(n-k)! X + a_{k+1} \frac{(k+1)!(n-k-1)!}{2} \end{aligned}$$

Comme $Q(X) \in \mathbb{R}[X]$ a deux racines réelles, son discriminant Δ est positif, c'est-à-dire

$$\Delta = (a_k k!(n-k)!)^2 - a_{k-1} (k-1)!(n-k+1)! a_{k+1} (k+1)!(n-k-1)! \geq 0$$

Il vient

$$\frac{\Delta}{(n!)^2} \geq 0$$

soit

$$\frac{a_k^2}{\binom{n}{k}^2} \geq \frac{a_{k-1}}{\binom{n}{k-1}} \times \frac{a_{k+1}}{\binom{n}{k+1}}$$

Ainsi,

La suite $(a_k)_{0 \leq k \leq n}$ est ultra log-concave.

7 L'énoncé confond abusivement polynômes et fonctions polynomiales. L'opérateur de dérivation D étant d'ailleurs défini sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, on va définir Q en passant par cet espace.

Si $\alpha = 0$, alors la fonction $x \mapsto e^{\alpha x} D(e^{-\alpha x} P(x)) = P'(x)$ est la fonction polynomiale associée au polynôme P' . Celui-ci est à racines toutes réelles d'après la question 1. Sinon, on a $\alpha \neq 0$. Calculons, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^{\alpha x} D(e^{-\alpha x} P(x)) = e^{\alpha x} (-\alpha e^{-\alpha x} P(x) + e^{-\alpha x} P'(x)) = (P' - \alpha P)(x)$$

Notons $Q = P' - \alpha P \in \mathbb{R}[X]$. C'est un polynôme de degré n . En effet, comme on a supposé $\alpha \neq 0$, $\deg(\alpha P) = \deg(P) = n$. De plus, comme $n \geq 1$, $\deg(P') = n-1$, d'où $\deg(P' - \alpha P) = n$. Comme dans la question 4, notons

$$P = a_n \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{\nu_i}$$

Supposons que les racines vérifient $\lambda_1 < \dots < \lambda_r$ et suivons le même raisonnement que dans la question 4. Pour tout $1 \leq i \leq r$, si $\nu_i \geq 2$, λ_i est racine de P' de multiplicité $\nu_i - 1$. Ainsi λ_i est racine de $P' - \alpha P$ de multiplicité au moins $\nu_i - 1$, ce qui fournit $n - r$ racines comptées avec multiplicité.

Toujours avec le même raisonnement que dans la question 4, ici appliqué à Q , pour tout $k \in \llbracket 1; r-1 \rrbracket$,

- la fonction Q est continue sur $[\lambda_k; \lambda_{k+1}]$;
- la fonction Q est dérivable sur $] \lambda_k; \lambda_{k+1} [$;
- $Q(\lambda_k) = Q(\lambda_{k+1}) = 0$.

D'après le théorème de Rolle, il existe $c_k \in] \lambda_k; \lambda_{k+1} [$ tel que $Q'(c_k) = 0$. On obtient $r - 1$ racines $c_1, \dots, c_{r-1}$ distinctes car elle appartiennent à des intervalles deux à deux disjoints, et distinctes des λ_k par définition. En comptant avec multiplicité, le polynôme Q admet au moins

$$\sum_{i=1}^r (\nu_i - 1) + r - 1 = n - 1$$

racines et est divisible par le polynôme de degré $n - 1$

$$Q_1 = \prod_{i=1}^r (X - \lambda_i)^{\nu_i - 1} \prod_{k=1}^{r-1} (X - c_k)$$

Rappelons que $\deg(Q) = n$ et que Q est à coefficients réels. La division euclidienne de Q par Q_1 dans $\mathbb{R}[X]$ s'écrit $Q = Q_1 Q_2$ où $Q_2 \in \mathbb{R}[X]$ est un polynôme de degré 1, qui admet donc une racine réelle.

L'unique polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant pour tout réel x l'égalité $Q(x) = e^{\alpha x} D(e^{-\alpha x} P(x))$ a toutes ses racines réelles.

On peut montrer que la dernière racine de Q est réelle par d'autres méthodes. Cette racine existe dans $\mathbb{C}$, notons-la z . Si $z \notin \mathbb{R}$, $\bar{z}$ serait aussi racine de Q , distincte de z , et Q aurait alors au moins $n + 1$ racines comptées avec multiplicité, ce qui contredit que Q est un polynôme non nul.

On peut aussi considérer la somme des racines. Appelons $z_1, \dots, z_n$ les racines de P où $z_1, \dots, z_{n-1}$ sont réelles. Comme la somme des racines est $-a_{n-1}/a_n \in \mathbb{R}$, on a

$$z_n = \frac{-a_{n-1}}{a_n} - z_1 - \dots - z_{n-1} \in \mathbb{R}$$

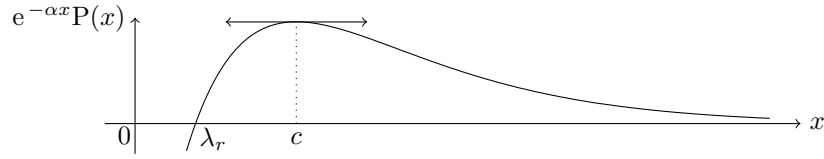
L'énoncé suggérerait plutôt le raisonnement suivant pour trouver la dernière racine. Supposons $\alpha > 0$ (le cas $\alpha < 0$ est symétrique). Comme λ_r est la plus grande racine de P , pour $x = \lambda_r + 1$, on a $A = e^{-\alpha x} P(x) \neq 0$. De plus, par croissances comparées,

$$e^{-\alpha x} P(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

d'où $\exists A > \lambda_r + 1 \quad \forall x \geq \lambda_r + 1 \quad |e^{-\alpha x} P(x)| \leq |A|/2$

La fonction $f : x \mapsto e^{-\alpha x} P(x)$ est donc bornée sur $[\lambda_r + 1; +\infty[$. Comme elle est continue sur le segment $[\lambda_r; \lambda_r + 1]$, elle est bornée sur celui-ci, donc sur $[\lambda_r; +\infty[$.

Si $A > 0$, alors f admet un maximum sur le segment $[\lambda_r; \lambda_r + 1]$, qui n'est atteint ni en λ_r , ni en $\lambda_r + 1$. Comme f est dérivable sur $] \lambda_r; \lambda_r + 1 [$, ce maximum est atteint en un point critique $c \in] \lambda_r; \lambda_r + 1 [$ de f , soit $f'(c) = 0$, puis $Q(c) = 0$.



8 Le polynôme Q étant à racines toutes réelles, il est non nul. Supposons $b_m \neq 0$ de sorte que $m = \deg(Q)$ et

$$Q(X) = b_m \prod_{i=1}^m (X - \lambda_i)$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sont les m racines réelles de Q , écrites avec multiplicité. Alors

$$Q(D) = b_m (D - \lambda_m \text{Id}) \circ \dots \circ (D - \lambda_1 \text{Id})$$

où Id est l'identité de $\mathbb{R}[X]$. D'après le résultat de la question 7, comme P est à racines toutes réelles, $(D - \lambda_i \text{Id})P = P' - \lambda_i P$ l'est également pour tout $i \in \llbracket 1; m \rrbracket$. Par récurrence immédiate, $(D - \lambda_k \text{Id}) \circ \dots \circ (D - \lambda_1 \text{Id})P(X)$ est à racines toutes réelles pour tout $k \in \llbracket 1; m \rrbracket$, ainsi que $Q(D)P(X)$.

Pour tous polynômes P et Q à racines toutes réelles, le polynôme $Q(D)P(X)$ est à racines toutes réelles.