

1 Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes

Définition 1

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries à termes complexes. On appelle produit de Cauchy de ces deux séries la série $\sum_{n \geq 0} w_n$ dont le terme général est défini par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} = \sum_{p+q=n} u_p v_q$$

Théorème 1

Si les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ sont absolument convergentes, alors la série produit de Cauchy $\sum_{n \geq 0} w_n$ de ces deux séries converge absolument et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right)$$

Corollaire 1

L'exponentielle complexe $z \mapsto \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n/n!$ satisfait la relation suivante

$$\forall z, z' \in \mathbb{C}, \quad \exp(z + z') = \exp(z) \exp(z')$$

2 Rayon de convergence

2.1 Définition

Définition 2

On appelle série entière toute série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ où pour tout n , f_n est de la forme $z \mapsto a_n z^n$ avec $a_n \in \mathbb{C}$.

Remarque 1

En général, on utilise l'abus de notation $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ directement pour désigner la série. De plus, lorsqu'on se restreint à une variable réelle, on utilise la variable x plutôt que z .

Exemple 1

- Un polynôme est la somme d'une série entière
- La fonction $z \mapsto \frac{1}{1-z}$ est la somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} z^n$ sur $B(0, 1)$.
- La fonction exponentielle est la somme sur $\mathbb{C}$ de la série entière $\sum_{n \geq 0} z^n/n!$.

Proposition 1 (Lemme d'Abel)

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière. Si ρ est un réel tel que la suite $(a_n \rho^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, alors la série $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est absolument convergente pour tout $z \in B(0, \rho)$.

Définition 3

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière. On note

$$I_a = \{\rho \in \mathbb{R}_+, (a_n \rho^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est borné}\}$$

Alors, I_a est un intervalle contenant 0 dont la borne supérieure dans $\overline{\mathbb{R}}$ est appelée le rayon de convergence de la série entière. On appelle disque (resp. intervalle) ouvert de convergence l'ensemble des complexes (resp. réels) de module (resp. valeur absolue) strictement inférieure à R .

Théorème 2

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R . Alors,

- Si $R < +\infty$, alors pour tout z de module $> R$, $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ diverge grossièrement.
- Si $R > 0$, alors pour tout z de module $< R$, $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ est absolument convergente.

Remarque 2

Le théorème ne précise rien quand à la nature de $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ lorsque $|z| = R$. En fait, presque toutes les situations sont possibles.

Corollaire 2

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R et $z_0 \in \mathbb{C}$.

- Si $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée ou si $\sum_{n \geq 0} a_n z_0^n$ est convergente, alors $R \geq |z_0|$.
- Si $(a_n z_0^n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée ou si $\sum_{n \geq 0} a_n z_0^n$ est divergente, alors $R \leq |z_0|$.

Proposition 2

- La série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ a pour rayon de convergence $+\infty$.
- Pour tout réel α , $\sum_{n \geq 0} z^n / n^\alpha$ a pour rayon de convergence 1.

Remarque 3

On s'intéresse à la convergence de $\sum_{n \geq 0} z^n / n^\alpha$ au bord du disque ouvert de convergence :

- si $\alpha = 0$, la série diverge pour tout z de module 1 ;
- si $\alpha = 2$, la série converge pour tout z de module 1 ;
- si $\alpha = 1$, la série converge pour tout z de module 1 sauf si $z = 1$.

Proposition 3 (Comparaison de RDC de deux séries entières)

Soient $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b . Alors,

- Si $a_n = O(b_n)$, alors $R_a \geq R_b$;
- Si $|a_n| \sim |b_n|$, alors $R_a = R_b$.

Proposition 4 (Règle de d'Alembert pour les séries entières)

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière. On suppose que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne s'annule pas et que le quotient $|a_{n+1}|/|a_n|$ admet une limite ℓ dans $\overline{\mathbb{R}}$. Alors, le rayon de convergence de la série vaut $1/\ell$ avec les conventions $1/+\infty = 0$ et $1/0 = +\infty$.

Remarque 4

- La réciproque est bien entendu complètement fausse.
- Cette technique ne doit être appliquée qu'aux cas pratiques (ie a_n donné explicitement, contrairement à un exo théorique).
- Attention à ne pas l'appliquer à des séries **lacunaires** c'est-à-dire où la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ s'annule régulièrement. L'erreur typique est de l'appliquer par exemple à une série de la forme $\sum_{n \geq 0} a_n z^{2^n}$. Pour ce type d'exemple, on repasse par la preuve et la version de d'Alembert pour les séries **numériques**.

Exemple 2

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n \geq 0} \frac{n}{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)} z^n \qquad \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{2n-1} \binom{2n}{n} z^{3n}$$

Exemple 3 (Exemple à la con)

Pour tout entier n , on note $|n|_7$ le nombre de 7 dans l'écriture de n en base 10. Alors, $\sum_{n \geq 0} |n|_7 z^n$ a pour rayon de convergence 1.

De la même manière, si l'on note π_n la n -ième décimale de π , la série entière $\sum_{n \geq 1} \pi_n x^n / n^2$ a pour rayon de convergence 1.

Proposition 5

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. Alors, les séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} n a_n$ ont mêmes rayons de convergence.

Remarque 5 (Invariance du RDC par multiplication par une fraction rationnelle)

Plus généralement, si F une fraction rationnelle à coefficients dans $\mathbb{C}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{N}$ et $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R_a , alors la série entière $\sum_{n \geq 0} F(n) a_n z^n$ a également R_a pour rayon de convergence.

Exercice 1

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer celui de la série $\sum a_n z^{n^2}$.

2.2 Opérations sur les séries entières**Définition 4**

Soient $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ deux séries entières. On appelle produit de Cauchy de ces deux séries la série entière $\sum_{n \geq 0} c_n z^n$ où $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

Exemple 4

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n \geq 0} a_n$. Alors la série entière $\sum_{n \geq 0} A_n z^n$ est le produit de Cauchy des séries $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} z^n$.

Proposition 6

Soient $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ deux séries entières convergeant toutes deux dans le disque ouvert $B(0, r)$ de somme respectives f et g . Alors,

- Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, la série entière $\sum_{n \geq 0} (\lambda a_n + b_n) z^n$ converge sur $B(0, r)$ et a pour somme $\lambda f + g$.
- Le produit $\sum_{n \geq 0} c_n z^n$ des deux séries entières est convergent sur $B(0, r)$ et a pour somme $f \cdot g$.

Corollaire 3

Soient $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b .

- Le rayon de convergence R_s de $\sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) z^n$ est supérieur ou égal à $\min(R_a, R_b)$. Il y a égalité si $R_a \neq R_b$.
- Le rayon de convergence R_p du produit de Cauchy des deux séries est supérieur ou égal à $\min(R_a, R_b)$.

Remarque 6

On ne peut rien dire de plus

- Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont opposées, alors le rayon de convergence R_s de la somme des séries entières vaut $+\infty$.
- Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante égale à 1, et si $\sum_{n \geq 0} b_n z^n = 1 - z$, alors le produit de Cauchy des séries entières vaut 1 qui a un rayon de convergence infini, strictement supérieur à celui de $\sum_{n \geq 0} a_n$.

3 Régularité de la somme d'une série entière de la variable réelle

3.1 Continuité

Théorème 3

Une série entière de rayon de convergence $R > 0$ converge normalement sur tout segment $[-r; r]$ avec $r < R$.

Remarque 7

On n'a pas nécessairement la convergence normale sur $[-R; R]$ comme pour l'exemple $\sum_{n \geq 0} x^n$ (sauf si $\sum_{n \geq 0} a_n$ est absolument convergente).

Proposition 7

La somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$ est continue sur l'intervalle $] -R; R[$.

Exercice 2 (Convergence au bord du domaine)

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$ et de somme f .

- Si la série $\sum_{n \geq 0} |a_n| R^n$ converge, alors f est continue sur $[-R; R]$.
- Si $\sum_{n \geq 0} a_n R^n$ converge (resp. $\sum_{n \geq 0} a_n (-R)^n$), alors f est continue sur $[0; R]$ (resp. sur $[-R; 0]$).
- Plus généralement, si $\sum_{n \geq 0} a_n R^n$ converge, alors pour tout $\alpha \in]0; \pi/2[$,

$$\lim_{\substack{z \rightarrow R \\ z \in D_\alpha}} f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$$

où l'on a noté $D_\alpha = B(0, 1) \cap \{1 - \rho e^{i\theta}, \rho > 0, |\theta| \leq \alpha\}$.

Remarque 8

Réciproquement, si f est la somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $R \in \mathbb{R}_+^*$, et si $f(x)$ a une limite ℓ lorsque x tend vers R , on peut se poser légitimement la question :

« La série numérique $\sum_{n \geq 0} a_n R^n$ est-elle convergente et sa somme est-elle égale à ℓ ? »

La réponse est non comme le montre l'exemple $a_n = (-1)^n$ pour tout entier n . On a besoin d'hypothèses supplémentaires pour conclure. Le résultat devient vrai si l'on suppose l'une des hypothèses suivantes :

- Pour tout entier n , a_n est un réel positif.
- Lorsque n tend vers $+\infty$, $a_n = o(1/n)$ (théorème taubérien faible).
- Lorsque n tend vers $+\infty$, $a_n = O(1/n)$ (théorème taubérien fort).

Exemple 5

On vérifiera un peu plus tard que

$$\forall x \in]-1; 1[, \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

On déduit alors que

$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

3.2 Dérivation et intégration terme à terme**Proposition 8**

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière de la variable réelle, de rayon de convergence $R > 0$ et de somme f .

- On peut intégrer terme à terme sur tout segment $[a; b]$ inclus dans $]-R; R[$, et ainsi

$$\int_a^b f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_a^b t^n dt$$

- En particulier, pour tout $x \in [-R; R]$,

$$\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

Proposition 9

Avec les mêmes notations, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -R; R[$ et pour tout entier k et tout $x \in] -R; R[$,

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) a_n x^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+k) \cdots (n+1) a_{n+k} x^n \end{aligned}$$

En particulier, $f^{(k)}(0) = a_k k!$.

Remarque 9

Pour conclure, on peut intégrer et dériver terme à terme et à volonté sur l'intervalle ouvert de convergence !

Exemple 6

$$\forall x \in]-1; 1[, \quad \frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k}{n} x^n$$

4 Développement en série entière au voisinage de 0 d'une fonction d'une variable réelle

4.1 Définitions

Définition 5

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ ouvert centré en 0 et $f : I \mapsto \mathbb{K}$. On dit que f est développable en série entière sur I s'il existe une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ telle que

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Remarque 10

Plus généralement, soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, x_0 un point de I et $f : I \mapsto \mathbb{K}$. On dit que f est développable en série entière au voisinage de x_0 s'il existe une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et un voisinage $\mathcal{V}$ de x_0 tels que

$$\forall x \in \mathcal{V}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Proposition 10

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0. L'ensemble des fonctions définies et développables en série entière sur I est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{K})$, stable par produit.

Remarque 11

Le développement en série entière d'un rapport ou d'une composée se traite au cas par cas. Il n'y a pas d'énoncé général au programme.

Théorème 4 (Formule de Taylor avec reste intégral)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I . Alors pour tous réels a et b dans I ,

$$f(b) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt$$

Corollaire 4

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. Pour que f soit développable en série entière sur I , il faut et il suffit que

$$\forall x \in I, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt = 0$$

et dans ce cas, le développement en série entière de f coïncide avec sa série de Taylor

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Le rayon de convergence R est alors tel que $I \subset]-R; R[$.

Corollaire 5

Si une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ est développable en série entière sur un intervalle I , alors son développement est unique. Autrement dit, si $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n x^n$ sont deux séries entières convergeant toutes deux sur I et telles que

$$\forall x \in I, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

alors $a_n = b_n$ pour tout entier n .

Remarque 12

Plus généralement, on peut démontrer l'unicité des coefficients d'une série entière de la variable complexe avec des hypothèses assez souples. En effet, il suffit d'avoir l'égalité

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$

sur un voisinage de 0 (et même simplement pour une suite $(z_p)_{p \in \mathbb{N}}$ de complexes de limite nulle) pour pouvoir conclure que $a_n = b_n$ pour tout entier n .

Corollaire 6

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ une série entière de la variable réelle convergeant sur un intervalle réel de la forme $]-r; r[$ et de somme f . Alors, si f est paire (resp. impaire), on a b_{2n+1} (resp. b_{2n}) nul pour tout entier n .

Remarque 13

- Pour montrer qu'une fonction est développable en série entière, on se contentera la plupart du temps d'une majoration (grossière) de $f^{(n)}$ sur I . Par exemple, s'il existe $\delta > 0$ et $A \in \mathbb{R}_+$ tels que $\|f^{(n)}\|_\infty = O(A^n)$, alors f est développable en série entière sur $]-\delta; \delta[$.
- Il existe des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ qui ne sont pas développables en série entière au voisinage de 0. La série de Taylor de la fonction $\mathcal{C}^\infty$

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \exp(-1/x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est la série nulle qui n'est donc pas égale à f .

4.2 Développements en série entière usuels

Proposition 11 (Fonctions exponentielles et circulaires)

- **(Fonctions exponentielles)** Pour tout réel x , on a

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

puis

$$\operatorname{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

- **(Fonctions circulaires)** Pour tout réel x , on a

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Remarque 14

On peut montrer en exercice que la fonction $\tan$ admet également un développement en série entière sur $]-\pi/2; \pi/2[$ mais tout résultat sur le quotient de deux fonctions développables en série entière est hors-programme.

Corollaire 7

L'exponentielle complexe (définie comme la somme de la série entière ci-dessus) satisfait la relation

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad \exp(a + ib) = e^a (\cos b + i \sin b)$$

Proposition 12 (Séries géométrique et conséquences)

Par substitution et intégration terme à terme de $\sum_{n \geq 0} x^n$, on obtient les développements en série suivants pour tout $x \in]-1; 1[$:

$$-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \quad \text{d'où} \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

$$\operatorname{argth} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{et} \quad \arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Proposition 13 (Série du binôme)

Pour tout réel α et tout $x \in]-1; 1[$, on a

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

Le rayon de convergence de la série vaut $+\infty$ si α est un entier positif, et 1 sinon.

5 Série de fonctions de la variable complexe

Remarque 15

Les fonctions étudiées dans le chapitre « série de fonctions » sont définies sur $I \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$. Les notions de convergence simple, normale, de continuité de la somme s'étendent naturellement à des fonctions de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ (avec le cours sur les espaces vectoriels normés). En revanche, la notion de dérivée d'une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ n'est pas au programme. On se contente donc des éléments suivants :

- Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{C}$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur $\mathcal{D}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$.
 - On dit que la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur $\mathcal{D}$ si $\sum_{n \geq 0} f_n(z)$ converge pour tout z de $\mathcal{D}$.
 - On dit que la série converge normalement si f_n est bornée sur $\mathcal{D}$ et si $\sum_{n \geq 0} \|f_n\|_\infty$ converge.
- La convergence normale implique à nouveau la convergence simple.
- Si $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur $\mathcal{D}$, sa somme est continue sur ce même domaine.

Proposition 14

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ une série entière de la variable complexe de rayon de convergence $R \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors, la somme de la série est continue sur le disque ouvert $B(0, R)$ et sur $\mathbb{C}$ si $R = +\infty$.

6 Compléments : applications

6.1 Techniques de développements en série entière

Cas simple : fractions rationnelles

On effectue une décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}[X]$ puis on utilise le résultat de la remarque en fin de section 3

Exemple 7

$$\forall x \in]-2; 2[, \quad \frac{1}{(x-2)(x-3)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}} \right) x^n$$

Intégration/dérivation

L'idée générale est la même que pour les développements limités : on cherche un développement en série de la dérivée que l'on intègre terme à terme.

Exemple 8

$$\forall x \in]\sqrt{3}-2; \sqrt{3}+2[, \quad \arctan x = \frac{\pi}{3} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 2^n} \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) x^n$$

Produit de Cauchy

Si f et g sont DSE au voisinage de 0, notons R_1 et R_2 les rayons de convergence des séries associées. Alors, $f \cdot g$ est DSE avec un rayon de convergence au moins $\min(R_1, R_2)$. Les coefficients sont donnés par la formule du produit de Cauchy (pas souvent simplifiable).

Exemple 9

$$\forall x \in]-1; 1[, \quad \arctan(x)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \left(\sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} \right) x^{2n+2}$$

Equation différentielle

1. On commence par justifier que f est DSE au voisinage de 0.
2. On cherche alors une équation différentielle satisfaite par f à coefficients polynomiaux.
3. En substituant à f l'expression $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et à ses dérivées les dérivées terme à terme, on obtient par unicité d'un DSE une relation de récurrence sur $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que l'on résout.

Exercice 3 (Mines)

Donner une expression simple de $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \operatorname{sh}(x\sqrt{t}) e^{-t} dt$

Note : Montrer que $xf'(x) = -2f(x) + 2f''(x)$ par IPP. On peut aussi intégrer terme à terme et utiliser les propriétés de la fonction Γ pour simplifier les coefficients du DSE.

6.2 Calculs de sommes de séries numériques

Soit $\sum_{n \geq 0} a_n$ une série convergente. On cherche à calculer la somme de cette série. A cet effet, on peut introduire la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ dont on note f la somme.

- Si le rayon de convergence est > 1 , alors $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = f(1)$ directement.
- Si le rayon de convergence vaut 1, on est dans un cas de convergence au bord et f est définie et continue au bord : le résultat est à nouveau valable.

Il reste maintenant à calculer f ce qui revient à faire l'exact inverse d'un développement en série : exprimer la somme d'une série entière à l'aide de fonctions usuelles. Ce n'est pas toujours possible, il n'y a pas de méthode générale donc on se contente d'exemples.

• Coefficients polynomiaux :

Pour toute série entière de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} P(n)z^n$ où P est un polynôme, on décompose dans P la base $\left(\binom{X+k}{k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}[X]$. De la même manière, on utilisera cette fois la base $(X(X-1)\cdots(X-k+1))_{k \in \mathbb{N}}$ pour une série de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} P(n)z^n/n!$ avec $P \in \mathbb{K}[X]$.

Exemple 10

$$\forall x \in]-1; 1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} (2n-1)^2 x^n = \frac{9x^2 - 2x + 1}{(1-x)^3}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n!} x^n = (x+1)^2 e^x$$

• Equation différentielle :

On fait l'inverse de ce qui a été fait à la partie précédente. Etant donné la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on cherche une relation de récurrence satisfaite par cette suite que l'on traduit par une équation différentielle. Il ne reste plus qu'à résoudre cette dernière.

• Bidouillage

Exercice 4 (Mines)

Déterminer le rayon de convergence et calculez la somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{(n+2)n!}$.

Appliquons maintenant la méthode sur l'exemple suivant.

Exercice 5

Montrer que pour tout $\theta \in]0; 2\pi[$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} = -\ln(2 \sin(\theta/2)) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} = \frac{\pi - \theta}{2}$$

6.3 Calculs de suites récurrentes

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels ou complexes définie par une relation de récurrence quelconque. On cherche à déterminer une expression de u_n en fonction de n . A cet effet,

- On introduit la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ appelée série génératrice (ordinaire) de la suite, (ou dans certains cas la série exponentielle $\sum_{n \geq 0} a_n x^n / n!$);
- On utilise la relation de récurrence pour en déduire une équation (algébrique ou différentielle) satisfaite par la somme f de cette série entière;
- On résout l'équation pour trouver une expression de f ;
- On développe f en série entière pour retrouver l'expression de ses coefficients et conclure.

Exercice 6

Pour tout entier n , on appelle B_n le n -ième nombre de Bell, qui énumère le nombre de partitions de $\{1, 2, \dots, n\}$, c'est-à-dire de décompositions de cet ensemble en parties non vides et deux à deux disjointes.

Montrer que la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k}$$

et en déduire que

$$B_n = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n^k}{k!}$$