

I. RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

1 Supposons que $A > 0$, $X \geq 0$ et $X \neq 0$. Soit $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, alors

$$(AX)_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} X_j$$

Par hypothèse $X \neq 0$, donc il existe $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $X_k \neq 0$. De plus, $X \geq 0$ et la matrice A est strictement positive, donc $A_{ik} X_k > 0$ et pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$,

$$A_{ij} X_j \geq 0$$

Ainsi,

$$(AX)_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} X_j \geq A_{ik} X_k$$

$$(AX)_i > 0$$

Finalement,

$$\boxed{\text{Si } A > 0, X \geq 0, \text{ et } X \neq 0, \text{ alors } AX > 0.}$$

Soient $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, alors

$$(|AB|)_{ij} = |(AB)_{ij}| \quad \text{par définition}$$

$$\begin{aligned} &= \left| \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj} \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^n |A_{ik}| |B_{kj}| \quad \text{par inégalité triangulaire.} \\ &\leq \sum_{k=1}^n |A|_{ik} |B|_{kj} \end{aligned}$$

Finalement,

$$(|AB|)_{ij} \leq (|A| |B|)_{ij}$$

si bien que

$$\boxed{\text{Si } A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \text{ alors } |AB| \leq |A| |B|.$$

2 L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne pour tous vecteurs $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,

$$\langle X | Y \rangle \leq \|X\| \|Y\|$$

Ainsi, en posant

$$X = \begin{pmatrix} |z_1| \\ \vdots \\ |z_n| \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} |w_1| \\ \vdots \\ |w_n| \end{pmatrix}$$

on a bien $X, Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\boxed{\sum_{k=1}^n |z_k| |w_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |z_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=1}^n |w_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}}$$

3

Les deux questions suivantes auront pour objectif de montrer que l'on a égalité dans l'inégalité triangulaire si, et seulement si, les images des nombres complexes sont tous sur la même demi-droite partant de l'origine du plan complexe.

On écrit $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$. Supposons que

$$|1 + z| = 1 + |z| \quad (1)$$

On a $|1 + z|^2 = (1 + x)^2 + y^2 = 1 + 2x + x^2 + y^2 = 1 + 2x + |z|^2$

Ainsi, en passant l'égalité (1) au carré, on obtient

$$\begin{aligned} |1+z| = (1+|z|) &\implies |1+z|^2 = (1+|z|)^2 \\ &\implies 1+2x+|z|^2 = 1+2|z|+|z|^2 \\ &\implies 2x = 2|z| \\ |1+z| = (1+|z|) &\implies x = \sqrt{x^2+y^2} \geq 0 \end{aligned}$$

donc $x \geq 0$. De plus, en passant l'égalité au carré,

$$x^2 = x^2 + y^2$$

En conclusion, $y = 0$ de sorte que

$$\boxed{\text{Si } |1+z| = (1+|z|), \text{ alors } z \in \mathbb{R}_+ .}$$

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$, tels que $z \neq 0$ et vérifiant

$$|z+z'| = |z| + |z'|$$

Divisons par $|z|$, il vient

$$\left| 1 + \frac{z'}{z} \right| = 1 + \left| \frac{z'}{z} \right|$$

On reconnaît le cas (1) et on obtient $\frac{z'}{z} \in \mathbb{R}_+$. En posant $\alpha = \frac{z'}{z} \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\boxed{z' = \alpha z}$$

4 Quitte à réindexer, on peut supposer que $z_1 \in \mathbb{C}^*$, car les z_i ne sont pas tous nuls. Soit $k \in \llbracket 2; n \rrbracket$, alors par inégalité triangulaire,

$$\left| \sum_{i=1}^n z_i \right| \leq |z_1 + z_k| + \left| \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq k}}^n z_i \right| \leq |z_1| + |z_k| + \left| \sum_{\substack{i=2 \\ i \neq k}}^n z_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |z_i|$$

Les termes extrêmes de l'encadrement sont égaux par hypothèse, donc l'inégalité est une égalité et

$$|z_1 + z_k| = |z_1| + |z_k|$$

Puisque $z_1 \neq 0$, d'après la question 3, il existe $\alpha_k \in \mathbb{R}_+$ tel que $z_k = \alpha_k z_1$. En écrivant $z_1 = e^{i\theta} |z_1|$, on obtient

$$e^{i\theta} |z_k| = e^{i\theta} |\alpha_k z_1| = \alpha_k e^{i\theta} |z_1| = \alpha_k z_1 = z_k$$

et

$$z_k = e^{i\theta} |z_k| \text{ pour tout } k \in \llbracket 2; n \rrbracket$$

De plus, l'égalité ci-dessus est vraie pour $k = 1$ par définition de θ . Il en découle que

$$\boxed{\exists \theta \in \mathbb{R} \quad \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad z_k = e^{i\theta} |z_k|}$$

II. MATRICES STRICTEMENT POSITIVES DE $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

5 La matrice A est de taille 2, son polynôme caractéristique χ_A est donc

$$\chi_A = X^2 - \text{Tr}(A)X + \det(A)$$

soit

$$\chi_A = X^2 - (a+d)X + ad - bc$$

6 Le discriminant Δ de χ_A vaut

$$\begin{aligned}\Delta &= (a+d)^2 - 4(ad - bc) \\ &= a^2 + d^2 + 2ad - 4ad + 4bc \\ &= a^2 + d^2 - 2ad + 4bc \\ &= (a-d)^2 + 4bc \\ &\geq 4bc\end{aligned}$$

$$\Delta > 0$$

car b et c sont strictement positifs.

Ainsi, χ_A a deux racines réelles distinctes λ, μ . Quitte à les échanger, supposons $\lambda < \mu$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_A(A) = 0$. Par conséquent, A est annulée par un polynôme scindé à racines simples. Elle est donc diagonalisable et ses valeurs propres sont les racines de χ_A . Ainsi,

$$\text{Il existe } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ vérifiant } \lambda < \mu \text{ tels que la matrice } A \text{ soit semblable à } \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

7 Par hypothèse, $\mu > \lambda$. De plus, deux matrices semblables ont la même trace, donc

$$\text{Tr}(A) = \lambda + \mu = a + d$$

Or, a et d sont strictement positifs d'après la question précédente, donc

$$\lambda + \mu = a + d > 0 \quad \text{et} \quad \mu > -\lambda$$

Finalement,

$$\mu > |\lambda|$$

8 D'après la question 6, il existe une matrice $P \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$A = P \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} P^{-1}$$

Une récurrence immédiate montre que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$A^k = P \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^k P^{-1} = P \begin{pmatrix} \mu^k & 0 \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix} P^{-1}$$

Prouvons d'abord l'implication réciproque et supposons que $\mu = 1$. D'après la question précédente $|\lambda| < 1$, donc $\lambda^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ si bien que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

L'application $\varphi_P : M \mapsto PMP^{-1}$ est continue car linéaire en dimension finie, donc

$$A^k = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix} P^{-1} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} L = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

La matrice L est non nulle, car elle est semblable à une matrice de rang 1, donc la suite $(A^k)_k$ converge vers une matrice non nulle L .

Réciproquement, supposons que $A^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} L$, où L est une matrice non nulle. Trois cas sont possibles : $\mu < 1$, $\mu > 1$, et $\mu = 1$.

- Si $\mu < 1$, alors $1 > \mu > |\lambda| \geq 0$ d'après la question 7, donc

$$\begin{pmatrix} \mu^k & 0 \\ 0 & \lambda^k \end{pmatrix} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$$

et à nouveau, on conclut par continuité de φ_P que

$$A^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$$

Finalement, par unicité de la limite, $L = 0$. Ceci contredit l'hypothèse.

- Si $\mu > 1$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} \text{Tr}(A^k) &= \mu^k + \lambda^k \\ &= \mu^k \left(1 + \frac{\lambda^k}{\mu^k} \right) \\ &\geq \mu^k \left(1 - \frac{|\lambda^k|}{\mu^k} \right) \\ \text{Tr}(A^k) &\geq \mu^k \left(1 - \left(\frac{|\lambda|}{\mu} \right)^k \right) \end{aligned}$$

Or, d'après la question 7, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\left(\frac{|\lambda|}{\mu} \right)^k \leq \frac{|\lambda|}{\mu} < 1$$

donc

$$\text{Tr}(A^k) \geq \mu^k \left(1 - \frac{|\lambda|}{\mu} \right) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} +\infty$$

Or, la trace est une application linéaire en dimension finie donc continue. Par conséquent,

$$\text{Tr}(A^k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \text{Tr}(L) < \infty$$

ce qui constitue une contradiction. On a ainsi prouvé que $\mu = 1$.

En conclusion,

La suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une matrice non nulle si, et seulement si, $\mu = 1$.

En cas de convergence, on a montré de surcroît que

$$L = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$$

Comme deux matrices semblables ont le même rang,

La matrice L est de rang 1.

En outre,

$$L^2 = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = L$$

Finalement,

La matrice L est la matrice d'un projecteur de $\mathbb{R}^2$.

Ce dernier résultat était plus que prévisible. En effet, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si l'on suppose que

$$M^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

alors en particulier $M^{2k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} L$. Or, par continuité de l'application $X \mapsto X^2$, on a $M^{2k} = (M^k)^2 \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} L^2$ et par unicité de la limite $L^2 = L$. Ceci montre que L est la matrice d'un projecteur de $\mathbb{K}^n$.

9 Déterminons le polynôme caractéristique χ_B de B . Pour cela, calculons la trace et le déterminant de la matrice B :

$$\text{Tr}(B) = 1 - \alpha + 1 - \beta = 2 - \alpha - \beta$$

$$\text{et} \quad \det(B) = (1 - \alpha)(1 - \beta) - \beta\alpha = 1 - \alpha - \beta + \beta\alpha - \beta\alpha = 1 - \alpha - \beta$$

En procédant comme à la question 5, on trouve

$$\chi_B = X^2 - (2 - \alpha - \beta)X + 1 - \alpha - \beta$$

Remarquons que 1 est une racine évidente de χ_B . De plus, le produit des racines de χ_B vaut $1 - \alpha - \beta$. Ainsi,

$$\chi_B = (X - 1)(X - (1 - \alpha - \beta))$$

Les réels α et β sont strictement positifs donc $1 \neq 1 - \alpha - \beta$. Par conséquent, χ_B est scindé à racines simples et finalement,

La matrice B est semblable à la matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - \alpha - \beta \end{pmatrix}$.

Posons
$$S = \begin{pmatrix} \beta & 1 \\ \alpha & -1 \end{pmatrix}$$

La matrice S est inversible, car son déterminant vaut $-\beta - \alpha \neq 0$. De plus,

$$\begin{aligned} BS &= B \begin{pmatrix} \beta & 1 \\ \alpha & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \beta & 1 - \alpha - \beta \\ \alpha & \alpha + \beta - 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \beta & 1 \\ \alpha & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - \alpha - \beta \end{pmatrix} \\ BS &= SD \end{aligned}$$

Finalement,

$B = SDS^{-1}$ où $S = \begin{pmatrix} \beta & 1 \\ \alpha & -1 \end{pmatrix}$.

Si la matrice S paraît parachutée, il n'en est rien. Pour diagonaliser une matrice, il faut trouver une base de vecteurs propres de cette matrice. Dans le cas de la matrice S , il suffit d'expliciter un vecteur propre associé à la valeur propre 1 et un vecteur propre associé à la valeur propre $1 - \alpha - \beta$, en l'occurrence :

$$X = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

10 Les réels α et β sont dans $]0; 1[$, donc $1 - \alpha - \beta \in]-1; 1[$ de sorte que

$$D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1 - \alpha - \beta)^k \end{pmatrix} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, à nouveau par continuité de φ_S

$$B^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} S \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S^{-1}$$

Calculons S^{-1} . Puisque $\det(S) = -(\alpha + \beta)$, on a

$$\begin{aligned} S^{-1} &= -\frac{1}{\alpha + \beta} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -\alpha & \beta \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & -\beta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} S \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S^{-1} &= \frac{1}{\alpha + \beta} S \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & -\beta \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\alpha + \beta} S \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ S \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S^{-1} &= \frac{1}{\alpha + \beta} \begin{pmatrix} \beta & \beta \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a finalement,

$$B^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \Lambda \text{ où } \Lambda = S \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S^{-1}$$

La matrice B est telle que la somme des coefficients de chacune de ses colonnes est égale à 1. Ainsi, sa transposée est une matrice positive telle que la somme des coefficients de chacune de ses lignes vaut 1. Une telle matrice est appelée une matrice stochastique. Les matrices stochastiques revêtent une importance capitale en probabilité.

Si A est une matrice stochastique, son rayon spectral vaut 1. De plus, un produit de matrices stochastiques est une matrice stochastique et la limite de matrices stochastiques est une matrice stochastique. Ainsi, les résultats obtenus dans cette question étaient prévisibles.

On peut montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice stochastique strictement positive, alors $A^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} L$ où L est une matrice de la forme

$$L = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

où les α_i sont positifs et vérifient $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$.

III. NORMES SOUS-MULTIPLICATIVES SUR $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$; RAYON SPECTRAL

11 Montrons dans un premier temps que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- Homogénéité: Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Alors

$$\begin{aligned}\|\lambda A\|_\infty &= \max_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} \sum_{j=1}^n |\lambda A_{ij}| \\ &= \max_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} |\lambda| \sum_{j=1}^n |A_{ij}| \\ \|\lambda A\|_\infty &= |\lambda| \|A\|_\infty \quad \text{car } |\lambda| \geq 0.\end{aligned}$$

- Séparation des points: Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $\|A\|_\infty = 0$. Soit $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. On a donc

$$\sum_{j=1}^n |A_{ij}| \leq \|A\|_\infty = 0$$

C'est une somme négative de termes tous positifs, donc tous les termes sont nuls. Ceci étant vrai pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on en déduit que

$$\forall i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad |A_{ij}| = 0 \quad \text{soit} \quad A = 0$$

- Inégalité triangulaire: Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$,

$$\sum_{j=1}^n |A_{ij} + B_{ij}| \leq \sum_{j=1}^n (|A_{ij}| + |B_{ij}|) = \sum_{j=1}^n |A_{ij}| + \sum_{j=1}^n |B_{ij}| \leq \|A\|_\infty + \|B\|_\infty$$

Ceci étant vrai pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, il en découle que

$$\|A + B\|_\infty \leq \|A\|_\infty + \|B\|_\infty$$

Ainsi, $\|\cdot\|_\infty$ définit bien une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Montrons que c'est une norme sous-multiplicative. Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n |(AB)_{ij}| &= \sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj} \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |A_{ik}| |B_{kj}| \quad \text{par inégalité triangulaire} \\ &\leq \sum_{k=1}^n |A_{ik}| \sum_{j=1}^n |B_{kj}| \\ &\leq \sum_{k=1}^n |A_{ik}| \|B\|_\infty \\ &\leq \|A\|_\infty \|B\|_\infty\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on obtient

$$\|AB\|_\infty \leq \|A\|_\infty \|B\|_\infty$$

Finalement,

$$\boxed{\|\cdot\|_\infty \text{ définit une norme sous-multiplicative sur } \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).}$$

12 Pour tous $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, posons $X = \begin{pmatrix} A_{i1} \\ \vdots \\ A_{in} \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} B_{1j} \\ \vdots \\ B_{nj} \end{pmatrix}$ et appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on obtient

$$\left(\sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj} \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n A_{ik}^2 \right) \left(\sum_{\ell=1}^n B_{\ell j}^2 \right)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\|AB\|_2 &= \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ((AB)_{ij})^2 \right)^{1/2} \\
&= \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n A_{ik} B_{kj} \right)^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n A_{ik}^2 \right) \left(\sum_{\ell=1}^n B_{\ell j}^2 \right) \right)^{1/2} \\
&\leq \left(\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n A_{ik}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{\ell=1}^n \sum_{j=1}^n B_{\ell j}^2 \right)^{1/2} \\
\|AB\|_2 &\leq \|A\|_2 \|B\|_2
\end{aligned}$$

Par conséquent,

L'application $\|\cdot\|_2$ définit bien une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

13 Montrons d'abord que ν est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

- Homogénéité: Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Puisque N est une norme, on peut écrire

$$\nu(\lambda A) = N(S^{-1}(\lambda A)S) = N(\lambda S^{-1}AS) = |\lambda| N(S^{-1}AS) = |\lambda| \nu(A)$$

- Séparation des points: Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $\nu(A) = 0$. Alors par définition de ν , $N(S^{-1}AS) = 0$. Puisque N est une norme, $S^{-1}AS = 0$. De ce fait, on obtient $A = SOS^{-1} = 0$.
- Inégalité triangulaire: Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

$$\begin{aligned}
\nu(A+B) &= N(S^{-1}(A+B)S) \\
&= N(S^{-1}AS + S^{-1}BS) \\
&\leq N(S^{-1}AS) + N(S^{-1}BS) \\
\nu(A+B) &\leq \nu(A) + \nu(B)
\end{aligned}$$

Ainsi, ν est bien une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. L'application N est une norme sous-multiplicative, donc

$$\nu(AB) = N(S^{-1}ABS) = N(S^{-1}ASS^{-1}BS) \leq N(S^{-1}AS)N(S^{-1}BS) = \nu(A)\nu(B)$$

En conclusion,

L'application ν définit une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

14 La matrice A appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, donc son spectre est non vide. Il en va de même pour $S^{-1}AS$. Par ailleurs, deux matrices semblables ont même spectre. Par conséquent,

$$\forall S \in GL_n(\mathbb{C}) \quad \rho(A) = \rho(S^{-1}AS)$$

15 Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable. En particulier,

La matrice A est trigonalisable.

Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ les valeurs propres de A comptées avec multiplicité. Il existe donc une matrice $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & * \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$$

On en déduit que

$$A^k = P \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & & * \\ & \lambda_2^k & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n^k \end{pmatrix} P^{-1}$$

et les valeurs propres de A^k sont $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$ comptées avec multiplicité. Or, la fonction puissance $x \mapsto x^k$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc

$$\max_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} |\lambda_i|^k = \left(\max_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} |\lambda_i| \right)^k$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\rho(A^k) = \rho(A)^k}$$

Par ailleurs, la fonction linéaire $x \mapsto |\alpha| x$ est croissante sur $\mathbb{R}$, donc

$$\max_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} |\alpha \lambda_i| = |\alpha| \max_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} |\lambda_i|$$

Or, les valeurs propres de αA sont les $\alpha \lambda_1, \dots, \alpha \lambda_n$. En conclusion,

$$\boxed{\rho(\alpha A) = |\alpha| \rho(A)}$$

16 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Soit $\lambda \in \text{sp}(A)$ tel que $|\lambda| = \rho(A)$. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ . Soit $H = \begin{pmatrix} X & \cdots & X \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice dont toutes les colonnes sont égales à X . La matrice H est non nulle, car X est non nul et

$$AH = \begin{pmatrix} AX & \cdots & AX \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} X & \cdots & X \end{pmatrix} = \lambda H$$

Ainsi,

$$N(A)N(H) \geq N(AH) = N(\lambda H) = |\lambda| N(H)$$

La matrice H étant non nulle, $N(H) \neq 0$, d'où $N(A) \geq |\lambda|$ et donc

$$\boxed{\rho(A) \leq N(A)}$$

17 Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$, la matrice MD se calcule en multipliant la j -ème colonne de M par d_j . La matrice DM s'obtient en multipliant la i -ème ligne de M par d_i .

Ainsi, pour tous $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a

$$(D_\tau^{-1} T D_\tau)_{ij} = (D_\tau^{-1})_{ii} t_{ij} (D_\tau)_{jj}$$

Or,

$$D_\tau^{-1} = \text{diag}(1, \tau^{-1}, \dots, \tau^{1-n})$$

donc

$$\boxed{(D_\tau^{-1} T D_\tau)_{ij} = \tau^{j-i} t_{ij}}$$

18 D'après la question 17, on a pour tout $\tau \in]0; 1[$, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$,

$$\sum_{j=1}^n |(D_\tau^{-1}TD_\tau)_{ij}| = \sum_{j=1}^n |\tau^{j-i}t_{ij}|$$

Or, la matrice T est triangulaire supérieure. Par conséquent, pour tout $i, j \in \llbracket 1; n \rrbracket$,

$$i > j \implies t_{ij} = 0$$

Ainsi,

$$\sum_{j=1}^n |(D_\tau^{-1}TD_\tau)_{ij}| = \sum_{j=i}^n |\tau^{j-i}t_{ij}| = |t_{ii}| + \tau \sum_{j=i+1}^n \tau^{j-i} |t_{ij}| \leq |t_{ii}| + \tau \sum_{j=1}^n |t_{ij}|$$

La matrice T étant triangulaire supérieure, on a aussi

$$\text{sp}(T) = \{t_{ii}, i \in \llbracket 1; n \rrbracket\}$$

d'où,

$$\rho(T) = \max_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket} |t_{ii}|$$

et

$$\sum_{j=1}^n |(D_\tau^{-1}TD_\tau)_{ij}| \leq \rho(T) + \tau \sum_{j=1}^n |t_{ij}|$$

En prenant le maximum pour i parcourant $\llbracket 1; n \rrbracket$ dans l'inégalité ci-dessus, on obtient

$$\|D_\tau^{-1}TD_\tau\|_\infty \leq \rho(T) + \tau \|T\|_\infty$$

Posons $\delta = \frac{\varepsilon}{\|T\|_\infty + 1}$, pour tout $\tau \in]0; \delta[$, il vient

$$\|D_\tau^{-1}TD_\tau\|_\infty \leq \rho(T) + \varepsilon$$

En conclusion, $\boxed{\exists \delta > 0 \quad \forall \tau \in]0; \delta[\quad \|D_\tau^{-1}TD_\tau\|_\infty \leq \rho(T) + \varepsilon}$

19 D'après la question 15, A est trigonalisable. Il existe donc une matrice T triangulaire supérieure et une matrice inversible $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ vérifiant

$$A = PTP^{-1}$$

D'après la question 14,

$$\rho(T) = \rho(A)$$

De plus, d'après la question 18, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $\tau \in]0; \delta[$,

$$\|D_\tau^{-1}TD_\tau\|_\infty \leq \rho(T) + \varepsilon$$

D'après la question 11, $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sous-multiplicative. Par ailleurs, la matrice PD_τ est inversible comme produit de deux matrices inversibles. Les conditions de la question 13 sont vérifiées et $N : M \mapsto \|(PD_\tau)^{-1}MPD_\tau\|_\infty$ définit bien une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. De plus,

$$N(A) = \|D_\tau^{-1}P^{-1}APD_\tau\|_\infty = \|D_\tau^{-1}TD_\tau\|_\infty$$

Finalement,

Pour tous $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $\varepsilon > 0$, il existe une norme N sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $N(A) \leq \rho(A) + \varepsilon$.

20 | Nul besoin de préciser la norme pour laquelle la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge, car en dimension finie toutes les normes sont équivalentes, et $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{C})) < \infty$.

Montrons tout d'abord l'implication directe. Pour cela, supposons que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ tende vers 0. Par définition, $\|A^k\|_\infty \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$. D'après la question 11, l'application $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sous-multiplicative donc d'après la question 16, on a

$$\|A\|_\infty \geq \rho(A)$$

Or, d'après la question 15,

$$\rho(A)^k = \rho(A^k) \leq \|A^k\|_\infty \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$$

donc $\rho(A)^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$. Ceci n'est possible que si $\rho(A) < 1$.

Réciproquement, supposons que $\rho(A) < 1$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\rho(A) + \varepsilon < 1$ (on peut prendre par exemple $\varepsilon = (1 - \rho(A))/2$). D'après la question 19, il existe une norme N sous-multiplicative telle que

$$N(A) \leq \rho(A) + \varepsilon < 1$$

Puisque N est sous-multiplicative,

$$N(A^k) \leq N(A)^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$$

donc $A^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$. Finalement,

La suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle si, et seulement si, $\rho(A) < 1$.