Première partie

1.a Soit $j \in [\![1\,;\, n]\!]$. Le complexe x_j étant racine simple de P, ce polynôme est divisible par $(\mathrm{X} - x_j)$ et

$$\frac{\mathrm{P}(\mathrm{X})}{(\mathrm{X} - x_j)} = \prod_{\substack{1 \leqslant \ell \leqslant n \\ \ell \neq j}} (\mathrm{X} - x_\ell) \qquad (\mathbf{1})$$

ce qui est l'expression d'un polynôme de degré $n-1$. De plus, x_j étant une racine de multiplicité égale à 1 de P, on en déduit que $\mathrm{P}'(x_j) \neq 0$. Par conséquent,

L'expression de P_j définit effectivement un polynôme de degré $n-1$.

1.b Pour commencer, on peut établir l'expression du polynôme dérivé P′. Lorsque l'on dérive un produit de n facteurs, on obtient une somme où l'on dérive successivement un et un seul des facteurs, c'est-à-dire :

$$\mathrm{P}'(\mathrm{X}) = \sum_{m=1}^{n} \prod_{\substack{1 \leqslant \ell \leqslant n \\ \ell \neq m}} (\mathrm{X} - x_\ell)$$

Notamment, pour tout $j \in [\![1\,;\, n]\!]$, on a

$$\mathrm{P}'(x_j) = \prod_{\substack{1 \leqslant \ell \leqslant n \\ \ell \neq j}} (x_j - x_\ell)$$

puisque tous les autres termes sont des produits contenant un facteur nul.

Enfin, si l'on évalue l'expression (**1**) en x_k, on obtient deux résultat différents selon que j est égal à k ou non.

- **Si $j = k$**, alors l'expression (**1**) vaut $\displaystyle\prod_{\substack{1 \leqslant \ell \leqslant n \\ \ell \neq k}} (x_k - x_\ell)$, c'est-à-dire qu'elle est égale à $\mathrm{P}'(x_k)$.
- **Si $j \neq k$**, alors l'expression (**1**) contient un facteur nul.

Conclusion : Pour tout $k, \ell \in \mathbb{N}$ $\qquad \mathrm{P}_j(x_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Les polynômes $(\mathrm{P}_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ sont appelés *polynômes élémentaires de Lagrange* associés à la famille $(x_1, \ldots, x_n)$. Ils ont pour expression, équivalente à celle donnée dans l'énoncé,

$$\mathrm{P}_j(\mathrm{X}) = \frac{\displaystyle\prod_{\ell \neq j} (\mathrm{X} - x_\ell)}{\displaystyle\prod_{\ell \neq j} (x_j - x_\ell)}$$

En posant $$\mathrm{L_F} = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{F}(x_j)\,\mathrm{P}_j$$

on obtient, pour tout $k \in [\![1\,;\, n]\!]$:

$$\begin{aligned}\mathrm{L_F}(x_k) &= \sum_{j=1}^{n} \mathrm{F}(x_j)\,\mathrm{P}_j(x_k) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{F}(x_j)\,\delta_{j,k} \\ &= \mathrm{F}(x_k).\end{aligned}$$

Les polynômes F et $\mathrm{L_F}$ prennent les mêmes valeurs en $x_1, \ldots, x_n$.

Le polynôme $\mathrm{L_F}$ est appelé *polynôme interpolateur de Lagrange* associé à F et $(x_1, \ldots, x_n)$.

1.c Notons $\mathrm{C} = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{P}_j - 1$. Alors, d'après la question 1.b, en utilisant le polynôme $\mathrm{F} = 1$, on a

$$\mathrm{C}(x_1) = \mathrm{C}(x_2) = \cdots = \mathrm{C}(x_n) = 0$$

ce qui prouve que C a n racines distinctes. Or C est un polynôme de degré au plus $n-1$, par suite C est le polynôme nul. Conclusion :

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} \mathrm{P}_j = 1}$$

1.d La famille $(\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n)$ est de cardinal $n = \dim \mathcal{E}_{n-1}$. Montrons qu'elle est de plus génératrice.

Soit $\mathrm{F} \in \mathcal{E}_{n-1}$. Construisons le polynôme $\mathrm{L_F}$ comme dans la question 1.b : alors $\mathrm{L_F}$ est combinaison linéaire de $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n$ et prend les mêmes valeurs que F en $x_1, \ldots, x_n$. En d'autre termes, le polynôme $\mathrm{F} - \mathrm{L_F}$ possède n racines distinctes ; or il est de degré au plus $n+1$: il est donc nul. Ceci montre que F est combinaison linéaire de $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n$. Conclusion :

La famille $(\mathrm{P}_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ est une base de $\mathcal{E}_{n-1}$.

On aurait pu tout aussi bien montrer la liberté de la famille $(\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n)$, selon une technique usuelle lorsque l'on utilise la dualité.

Soit $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ une famille de complexes telle que $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\,\mathrm{P}_j = 0$. Pour tout $k \in [\![1\,;\, n]\!]$, évaluons le polynôme nul en x_k :

$$0 = 0(x_k) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\,\mathrm{P}_j(x_k) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \delta_{j,k} = \alpha_k$$

Ainsi, $$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = (0, \ldots, 0)$$

Ceci étant vrai pour tout choix de $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, on a établi la liberté de la famille $(\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n)$.

2 Pour des questions de commodité, notons V_{ij} et B_{ij} les coefficients d'indice (i,j) des matrices V et B, c'est-à-dire que

$$\forall (i,j) \in [\![1\,;\, n]\!]^2 \qquad \mathrm{V}_{ij} = (x_i)^{j-1} \quad \text{et} \quad \mathrm{B}_{ij} = b_{i-1,j}$$

On reconnaît en la matrice V la matrice de Vandermonde associée à la famille $(x_1, \dots, x_n)$, dont le déterminant vaut

$$\det \mathrm{V} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & {x_1}^2 & \cdots & {x_1}^{n-1} \\ 1 & x_2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_2}^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_n & {x_n}^2 & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_i - x_j)$$

et est donc non nul puisque les complexes $x_1, \dots, x_n$ sont deux à deux distincts.

La matrice V est inversible.

Rappelons comment l'on montre la formule du déterminant de Vandermonde, résultat élémentaire qui, bien qu'il ne soit pas explicitement au programme, doit absolument être connu de tous les candidats.

On effectue une récurrence sur le cardinal de la famille et, pour plus de lisibilité, on note

$$\mathrm{V}_n(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & {x_1}^2 & \cdots & {x_1}^{n-1} \\ 1 & x_2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_2}^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & x_n & {x_n}^2 & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{vmatrix}$$

Enfin, on note $\mathscr{P}(n)$ la propriété : « $\mathrm{V}_n(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_i - x_j)$ ».

- $\mathscr{P}(2)$: on a clairement $\mathrm{V}(x_1, x_2) = x_2 - x_1$.
- $\mathscr{P}(n-1) \Longrightarrow \mathscr{P}(n)$: soit $n \geqslant 3$ et supposons la propriété $\mathscr{P}(n-1)$ vérifiée. Effectuons dans le déterminant $\mathrm{V}_n(x_1, \dots, x_n)$ les opérations sur les colonnes

  $$\mathscr{C}_{j+1} \leftarrow \mathscr{C}_{j+1} - x_n \mathscr{C}_j$$

  pour les valeurs successives de $j = n-1, \dots, 1$. On trouve alors

  $$\mathrm{V}_n = \begin{vmatrix} 1 & (x_1 - x_n) & (x_1 - x_n)\, x_1 & \dots & (x_1 - x_n)\, x_1^{n-2} \\ 1 & (x_2 - x_n) & (x_2 - x_n)\, x_2 & \dots & (x_2 - x_n)\, x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & (x_{n-1} - x_n) & (x_{n-1} - x_n)\, x_{n-1} & \dots & (x_{n-1} - x_n)\, x_{n-1}^{n-2} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

  En développant selon la dernière ligne, on obtient

  $$\mathrm{V}_n(x_1, \dots, x_n) = (x_1 - x_n)(x_2 - x_n) \cdots (x_{n-1} - x_n)\, \mathrm{V}_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})$$

  ce qui, en utilisant la propriété $\mathscr{P}(n-1)$, donne bien la formule attendue.
- Conclusion : la formule $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 2$.

Évaluons maintenant la matrice $\mathrm{V}\cdot\mathrm{B}$. Pour tout couple $(i,j)\in[\![1\,;n]\!]^2$ d'indices,

$$\begin{aligned}(\mathrm{V}\cdot\mathrm{B})_{ij} &= \sum_{k=1}^{n}\mathrm{V}_{ik}\mathrm{B}_{kj} = \sum_{k=1}^{n}(x_i)^{k-1}b_{k-1,j}\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}b_{kj}\,(x_i)^k = \mathrm{P}_j(x_i)\\ (\mathrm{V}\cdot\mathrm{B})_{ij} &= \delta_{ij} = (\mathrm{I}_n)_{ij} \qquad \text{(d'après la question 1.b)}\end{aligned}$$

Ainsi, on a prouvé que $\mathrm{V}\cdot\mathrm{B}=\mathrm{I}_n$ et par suite :

Les matrices V et B sont inverses l'une de l'autre : $\mathrm{V}\cdot\mathrm{B}=\mathrm{B}\cdot\mathrm{V}=\mathrm{I}_n$.

La matrice B est la matrice de passage de la base $(\mathrm{X}^0,\dots,\mathrm{X}^{n-1})$ de $\mathcal{E}_{n-1}$ à la base $(\mathrm{P}_1,\dots,\mathrm{P}_n)$. La matrice V est par conséquent la matrice de passage inverse.

3.a On peut écrire, pour tout $j\in[\![1\,;n]\!]$:

$$\mathrm{P}_j(\mathrm{X}) = \frac{1}{\mathrm{P}'(x_j)}\cdot\prod_{k\neq j}(\mathrm{X}-x_k)$$

qui est un polynôme de coefficient dominant $1/\mathrm{P}'(x_j)$. Par définition du coefficient $b_{n-1,j}$, on a donc montré

$$\boxed{b_{n-1,j} = \frac{1}{\mathrm{P}'(x_j)}}$$

On en déduit
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{(x_k)^j}{\mathrm{P}'(x_k)} &= \sum_{k=1}^{n}b_{n-1,k}\,(x_k)^j\\ &= \sum_{k=1}^{n}\mathrm{B}_{nk}\mathrm{V}_{k,j+1} = (\mathrm{I}_n)_{n,j+1} = \delta_{n,j+1},\end{aligned}$$

c'est-à-dire
$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{(x_k)^j}{\mathrm{P}'(x_k)} = \begin{cases}1 & \text{si } j=n-1\\ 0 & \text{si } 0\leqslant j\leqslant n-2\end{cases}}$$

3.b Développons, dans l'expression demandée, chaque terme $(\mathrm{X}-x_k)^{n-1}$ selon la formule du binôme de Newton. On obtient, en remarquant que l'on peut permuter des sommations sur des ensembles finis :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{(\mathrm{X}-x_k)^{n-1}}{\mathrm{P}'(x_k)} &= \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\mathrm{C}_{n-1}^{j}\mathrm{X}^{n-1-j}(-x_k)^j}{\mathrm{P}'(x_k)}\right)\\ &= \sum_{j=0}^{n-1}\left(\mathrm{C}_{n-1}^{j}\mathrm{X}^{n-1-j}(-1)^j\sum_{k=1}^{n}\frac{(x_k)^j}{\mathrm{P}'(x_k)}\right)\\ &= \sum_{j=0}^{n-1}\mathrm{C}_{n-1}^{j}\mathrm{X}^{n-1-j}(-1)^j\,\delta_{j,n-1}\\ &= \mathrm{C}_{n-1}^{n-1}\mathrm{X}^0(-1)^{n-1} = (-1)^{n-1}\end{aligned}$$

$\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(\mathrm{X}-x_k)^{n-1}}{\mathrm{P}'(x_k)} \text{ est le polynôme constant, égal à } (-1)^{n-1}.}$

Deuxième partie

4.a Rappelons que, pour qu'une application $\mathscr{N} : \mathcal{E}_d \longrightarrow \mathbb{R}$ soit une norme, elle doit vérifier les quatre points suivants :

- elle est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ (et, notamment, elle est toujours bien définie !) ;
- elle ne s'annule qu'en 0 ;
- pour tout complexe λ et tout polynôme P, $\mathscr{N}(\lambda \mathrm{P}) = |\lambda|\,\mathscr{N}(\mathrm{P})$;
- elle vérifie l'inégalité triangulaire :

$$\forall \mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathcal{E}_d \qquad \mathscr{N}(\mathrm{P}+\mathrm{Q}) \leqslant \mathscr{N}(\mathrm{P}) + \mathscr{N}(\mathrm{Q})$$

Vérifions que $\|\cdot\|_{\mathrm{K}}$ est une norme sur $\mathcal{E}_d$.

- Si $\mathrm{Q} \in \mathcal{E}_d$, alors Q est continue sur le compact K, donc est bornée sur K. Par conséquent, $\|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{K}}$ est bien définie.
- Si $\mathrm{Q} \in \mathcal{E}_d$ vérifie $\|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{K}} = 0$, alors Q s'annule en tout point de K. Puisque K contient au moins $d+1$ éléments, on en déduit que Q possède au moins $d+1$ racines ; ainsi, Q est le polynôme nul.
- Si $\mathrm{Q} \in \mathcal{E}_d$ et $\lambda \in \mathrm{C}$, on a bien sûr

$$\sup_{z\in\mathrm{K}} \big|\lambda\,\mathrm{Q}(z)\big| = |\lambda| \sup_{z\in\mathrm{K}} \big|\mathrm{Q}(z)\big|,$$

  et la troisième propriété s'ensuit.
- Enfin, soient P et Q deux polynômes de $\mathcal{E}_d$. Pour tout $z \in \mathrm{K}$, on a

$$\begin{aligned} \big|\mathrm{P}(z)+\mathrm{Q}(z)\big| &\leqslant \big|\mathrm{P}(z)\big| + \big|\mathrm{Q}(z)\big| \quad \text{(inégalité triangulaire)} \\ &\leqslant \|\mathrm{P}\|_{\mathrm{K}} + \|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{K}} \quad \text{(par définition de } \|\cdot\|_{\mathrm{K}}\text{)} \end{aligned}$$

  ce qui montre, en passant à la borne supérieure sur z, que

$$\|\mathrm{P}+\mathrm{Q}\|_{\mathrm{K}} \leqslant \|\mathrm{P}\|_{\mathrm{K}} + \|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{K}}$$

Ainsi, $\boxed{\|\cdot\|_{\mathrm{K}} \text{ est une norme sur } \mathcal{E}_d.}$

L'application N est une norme bien connue (la démonstration étant immédiate). Enfin, $\mathcal{E}_d$ étant un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie,

$\boxed{\text{Les normes } \|\cdot\|_{\mathrm{K}} \text{ et N sont équivalentes.}}$

> La question 5 permettra de prouver constructivement cette équivalence, c'est-à-dire de trouver des constantes α et β telles que
>
> $$\alpha\|\cdot\|_{\mathrm{K}} \leqslant \mathrm{N} \leqslant \beta\|\cdot\|_{\mathrm{K}}$$

4.b Puisque l'application $\|\cdot\|_{\mathrm{K}}$ est une norme, elle vérifie la seconde inégalité triangulaire :

$$\forall \mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathcal{E}_d \qquad \big|\|\mathrm{P}\|_{\mathrm{K}} - \|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{K}}\big| \leqslant \|\mathrm{P}-\mathrm{Q}\|_{\mathrm{K}}$$

On en déduit que l'application $\|\cdot\|_{\mathrm{K}}$ est 1-lipschitzienne, et par conséquent :

$\boxed{\text{L'application } \|\cdot\|_{\mathrm{K}} \text{ est continue sur } \big(\mathcal{E}, \|\cdot\|_{\mathrm{K}}\big).}$

> On a en fait montré que toute norme N sur un espace vectoriel E est une application continue sur (E, N).

Rappelons comment l'on démontre la seconde inégalité triangulaire. Considérons une norme $\|\cdot\|$ quelconque sur un espace vectoriel E, et choisissons deux vecteurs quelconques x et y. Pour tout $(a,b)\in \mathrm{E}^2$, une simple inégalité triangulaire permet d'écrire :

$$\|a-b\|\leqslant \|a\|+\|b\|$$

donc
$$\|a-b\|-\|b\|\leqslant \|a\|$$

En appliquant cette formule avec les valeurs $a=x+y$ et $b=y$, on obtient

$$\|x\|-\|y\|\leqslant \|x+y\|$$

En prenant $a=x+y$ et $b=x$, il vient

$$\|y\|-\|x\|\leqslant \|x+y\|$$

et ces deux dernières équations sont bien équivalentes à

$$\big|\|x\|-\|y\|\big|\leqslant \|x+y\|$$

5.a Soit $\mathrm{Q}\in\mathcal{E}_d$ un polynôme non nul. Puisque Q est une fonction continue sur le compact K, elle atteint son maximum en (au moins) un point $z_0\in\mathrm{K}$. Alors

$$\begin{aligned}\|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{K}} &= \sup_{z\in\mathrm{K}}\big|\mathrm{Q}(z)\big| = \big|\mathrm{Q}(z_0)\big| \\ &= \left|\sum_{i=0}^{d} a_i z_0^i\right| \leqslant \sum_{i=0}^{d}|a_i|\,|z_0|^i \leqslant \mathrm{N}(\mathrm{Q})\cdot\sum_{i=0}^{d}\rho^i\end{aligned}$$

Ainsi,
$$\frac{\mathrm{N}(\mathrm{Q})}{\|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{K}}}\leqslant\sum_{i=0}^{d}\rho^i$$

Ceci étant valable pour tout choix du polynôme $\mathrm{Q}\in\mathcal{E}_d$, on peut passer à la borne supérieure pour obtenir :

$$\boxed{\sup_{\substack{\mathrm{Q}\in\mathcal{E}_d\\ \mathrm{Q}\neq 0}}\frac{\mathrm{N}(\mathrm{Q})}{\|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{K}}}\leqslant\sum_{i=0}^{d}\rho^i}$$

5.b Soit $\mathrm{Q}\in\mathcal{E}_d$ un polynôme non nul. Posons $n=d+1$.

Notons A le vecteur colonne dont la j^{e} ligne est a_{j-1} et M celui dont la j^{e} ligne est $\mathrm{M}(x_j)$:

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}a_0\\ \vdots\\ a_{n-1}\end{pmatrix}=(\mathrm{A}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}\qquad\text{et}\qquad \mathrm{M}=\begin{pmatrix}\mathrm{Q}(x_1)\\ \vdots\\ \mathrm{Q}(x_n)\end{pmatrix}=(\mathrm{M}_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$$

Pour tout $k\in[\![\,1\,;\,n\,]\!]$, on a

$$\mathrm{M}_k=\mathrm{Q}(x_k)=\sum_{j=0}^{n-1}a_j\,(x_k)^j=\sum_{j=1}^{n}\mathrm{V}_{k,j}\,a_{j-1}=(\mathrm{V}\cdot\mathrm{A})_k$$

c'est-à-dire que $\mathrm{M}=\mathrm{VA}$. En utilisant toujours les notations de la question 2 et en utilisant le fait que l'inverse de V est B, on a donc $\mathrm{A}=\mathrm{BM}$. Pour tout indice j, on a alors

$$\begin{aligned}|\mathrm{A}_j|=|a_{j-1}| &= \left|\sum_{k=1}^{n}\mathrm{B}_{j,k}\mathrm{M}_k\right|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|\mathrm{B}_{j,k}|\cdot|\mathrm{M}_k| \\ &\leqslant n\beta\max_{k\in[\![\,1\,;\,n\,]\!]}|\mathrm{M}_k|\leqslant(d+1)\beta\,\|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{K}}.\end{aligned}$$

En passant à la borne supérieure sur l'indice j, on obtient

$$\mathrm{N}(\mathrm{Q}) \leqslant \beta(d+1)\,\|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{K}}$$

et, ceci étant vrai pour tout $\mathrm{Q} \in \mathcal{E}_d$ non nul,

$$\boxed{\sup_{\substack{\mathrm{Q}\in\mathcal{E}_d \\ \mathrm{Q}\neq 0}} \frac{\|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{K}}}{\mathrm{N}(\mathrm{Q})} \leqslant \beta(d+1)}$$

Troisième partie

6.a Pour tout $\mathrm{Q} \in \mathcal{E}_d$, $\|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{K}} \geqslant 0$; en passant à la borne inférieure sur Q, on obtient

$$m \geqslant 0$$

Par ailleurs, notons $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^d$. P est unitaire et de degré d, c'est par conséquent un élément de $\mathcal{U}_d$. De plus, pour tout $z \in \mathrm{K}$, $\big|\mathrm{P}(z)\big| = |z|^d \leqslant \rho^d$, donc $\|\mathrm{P}\|_{\mathrm{K}} \leqslant \rho^d$. Alors

$$m = \inf_{\mathrm{Q}\in\mathcal{U}_d} \|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{K}} \leqslant \|\mathrm{P}\|_{\mathrm{K}} \leqslant \rho^d$$

Conclusion : $\boxed{0 \leqslant m \leqslant \rho^d}$

6.b Notons $\mathcal{U}'_d = \big\{\mathrm{Q} \in \mathcal{U}_d \mid \|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{K}} \leqslant \rho^d\big\}$

puis $m = \inf_{\mathrm{Q}\in\mathcal{U}_d} \|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{K}}$ et $m' = \inf_{\substack{\mathrm{Q}\in\mathcal{U}_d \\ \|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{K}}\leqslant\rho^d}} \|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{K}} = \inf_{\mathrm{Q}\in\mathcal{U}'_d} \|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{K}}$

De l'inclusion $\mathcal{U}'_d \subset \mathcal{U}_d$

on tire l'inégalité $m \leqslant m'$

En outre, on remarque que le polynôme $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^d$ appartient à l'ensemble $\mathcal{U}'_d$, ce qui montre que

$$m \leqslant m' \leqslant \rho^d$$

Réciproquement, si $\mathrm{Q} \in \mathcal{U}_d$, deux cas se présentent :

- **si $\|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{K}} > \rho^d$**, alors la majoration précédente permet de dire que $\|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{K}} > m'$;
- **si $\|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{K}} \leqslant \rho^d$**, alors Q′ appartient à $\mathcal{U}'_d$ et donc, par définition de la borne inférieure, $\|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{K}} \geqslant m'$.

Ainsi, pour tout $\mathrm{Q} \in \mathcal{U}_d$, on a $\|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{K}} \geqslant m'$. En passant à la borne inférieure, on obtient

$$m = \inf_{\mathrm{Q}\in\mathcal{U}_d} \|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{K}} \geqslant m'$$

On a donc montré que $m = m'$:

$$\boxed{\inf_{\mathrm{Q}\in\mathcal{U}_d} \|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{K}} = \inf_{\substack{\mathrm{Q}\in\mathcal{U}_d \\ \|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{K}}\leqslant\rho^d}} \|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{K}}}$$

6.c Notons $\overline{\mathcal{B}}$ la boule fermée de $\mathcal{E}_d$, de centre 0 et de rayon ρ^d, pour la norme $\|\cdot\|_{\mathrm{K}}$:

$$\overline{\mathcal{B}} = \left\{ \mathrm{Q} \in \mathcal{E}_d \ ; \ \|\mathrm{Q}\| \leqslant \rho^d \right\}$$

Avec les notations de la question précédente, on a donc

$$\mathcal{U}'_d = \mathcal{U}_d \cap \overline{\mathcal{B}}$$

Montrons que $\mathcal{U}'_d$ est compact.

- Tout d'abord, la boule $\overline{\mathcal{B}}$ est fermée et bornée.
- De plus, $\mathcal{U}_d$ est également fermée. En effet, soit $(\mathrm{Q}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes à valeurs dans $\mathcal{U}_d$ et convergeant vers une limite Q au sens de la norme $\|\cdot\|_{\mathrm{K}}$. On sait qu'elle converge également vers Q au sens de la norme N, puisque ces normes sont équivalentes d'après la question 4.a. Si l'on note a le coefficient de X^d dans le polynôme Q, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

  $$|a - 1| \leqslant \mathrm{N}(\mathrm{Q}_n - \mathrm{Q})$$

  ce qui montre que $a = 1$ et donc que $\mathrm{Q} \in \mathcal{U}_d$. Par caractérisation séquentielle des fermés, $\mathcal{U}_d$ est bien fermé.
- Il s'ensuit que $\mathcal{U}'_d = \mathcal{U}_d \cap \overline{\mathcal{B}}$ est fermé et borné dans un espace vectoriel de dimension finie : il est donc compact.

Enfin, l'application $\mathrm{Q} \longmapsto \|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{K}}$ est continue sur $\left(\mathcal{E}_d, \|\cdot\|_{\mathrm{K}}\right)$, donc atteint son minimum sur le compact $\mathcal{U}'_d$: il existe par conséquent $\mathrm{Q}_0 \in \mathcal{U}'_d$ tel que $m = \|\mathrm{Q}_0\|_{\mathrm{K}}$. Puisque $\mathcal{U}'_d$ est inclus dans $\mathcal{U}_d$, on a prouvé :

$$\boxed{\text{Il existe } \mathrm{Q}_0 \in \mathcal{U}_d \text{ tel que } \|\mathrm{Q}_0\|_{\mathrm{K}} = m.}$$

Quatrième partie

7 Notons ρ le module de c_k, et θ l'unique réel de $[\,0\,;2\pi\,[$ tel que $c_k = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. Posons

$$z = z_0 + \frac{1}{\rho^{1/k}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/k}$$

Alors
$$c_k(z - z_0)^k = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \cdot \frac{1}{\rho}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} = 1$$

ce qui montre que
$$\mathrm{Q}(z_0) = 1 \quad \text{et} \quad \mathrm{Q}(z) = 2$$

$$\boxed{\text{On a donc trouvé un complexe } z \text{ tel que } \left|\mathrm{Q}(z)\right| > \left|\mathrm{Q}(z_0)\right|.}$$

8.a Puisque $\mathrm{Q}(z_0) = 1$, le polynôme $\mathrm{Q}(\mathrm{X}) - 1$ est divisible par $\mathrm{X} - z_0$. Notons k la multiplicité de z_0 en tant que racine de $\mathrm{Q}(\mathrm{X}) - 1$: ***k* est donc un entier supérieur ou égal à 1**. Il existe alors un polynôme $\mathrm{T} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ tel que

$$\mathrm{Q}(\mathrm{X}) - 1 = (\mathrm{X} - z_0)^k\ \mathrm{T}(\mathrm{X})$$

Notons $$c_k = \mathrm{T}(z_0)$$

Alors, par définition de la multiplicité d'une racine : $\boldsymbol{c_k}$ **est non nul**.

De plus, le polynôme $\mathrm{T}(\mathrm{X}) - c_k$ admet z_0 pour racine : il existe donc un polynôme $\mathrm{R}^* \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ tel que

$$\mathrm{T}(\mathrm{X}) - c_k = (\mathrm{X} - z_0)\,\mathrm{R}^*(\mathrm{X})$$

Si maintenant on pose $\mathrm{R}(\mathrm{X}) = \mathrm{R}^*(\mathrm{X})/c_k$, on obtient $\mathrm{T} = c_k + c_k(\mathrm{X} - z_0)\,\mathrm{R}(\mathrm{X})$, c'est-à-dire

$$\boxed{\mathrm{Q}(\mathrm{X}) = 1 + c_k(\mathrm{X} - z_0)^k + c_k(\mathrm{X} - z_0)^{k+1}\,\mathrm{R}(\mathrm{X})}$$

8.b Soit r un réel strictement positif. Comme dans la question 7, notons $c_k = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, avec $\rho = |c_k| > 0$ et $\theta \in [\,0\,;2\pi\,[$. Posons enfin

$$z = z_0 + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/k}$$

Alors $|z - z_0| = r$ et, en utilisant la formule de la question 8.a :

$$\begin{aligned}\mathrm{Q}(z) &= 1 + \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,r^k\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} + \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,r^k\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}(z - z_0)\,\mathrm{R}(z)\\ &= 1 + \rho^k r^k + \rho^k r^k (z - z_0)\,\mathrm{R}(z)\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{Q}(z) = 1 + |c_k|\,|z - z_0|^k + |c_k|\,|z - z_0|^k\,(z - z_0)\,\mathrm{R}(z)}$$

8.c Soit r un réel strictement positif. On sait que

$$\lim_{w \to z_0} (w - z_0)\,\mathrm{R}(w) = 0$$

et donc qu'il existe un réel $\eta > 0$ tel que, pour tout complexe w vérifiant $|w - z_0| \leqslant \eta$, on ait $\big|(w - z_0)\,\mathrm{R}(w)\big| < 1$. Posons alors

$$r^* = \min(\eta, r)$$

D'après la question 8.b, il existe un complexe z tel que $|z - z_0| = r^* \leqslant r$ et vérifiant

$$\mathrm{Q}(z) = 1 + |c_k|\,|z - z_0|^k \Big(1 + (z - z_0)\,\mathrm{R}(z)\Big)$$

La partie réelle de $(z - z_0)\,\mathrm{R}(z)$ appartient à $]\,-1\,;1\,[$, donc

$$\mathrm{Re}\,\Big(1 + (z - z_0)\,\mathrm{R}(z)\Big) > 0$$

et par suite, $$\mathrm{Re}\,\big(\mathrm{Q}(z)\big) > 1$$

Notamment, $$\big|\mathrm{Q}(z)\big| > 1 = \big|\mathrm{Q}(z_0)\big|$$

$$\boxed{\text{On a donc trouvé } z \in \mathbb{C} \text{ tel que } |z - z_0| \leqslant r \text{ et } \big|\mathrm{Q}(z)\big| > \big|\mathrm{Q}(z_0)\big|.}$$

9.a Soit $\mathrm{Q} \in \mathcal{E}_d$ un polynôme non constant. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$.

Deux cas se présentent :

- **Si $\mathbf{Q}(\boldsymbol{z_0}) = \mathbf{0}$** : pour tout réel $r > 0$, le polynôme Q n'est pas identiquement nul sur la boule de centre z_0 et de rayon r, sans quoi ce serait le polynôme nul ; il suffit alors de choisir un point z tel que $|z - z_0| \leqslant r$ et $\mathrm{Q}(z) \neq 0$.

- **Si $\mathbf{Q(z_0) \neq 0}$** : on pose $Q^*(X) = Q(X)/Q(z_0)$. Alors $Q^*(z_0) = 1$ et on peut appliquer la résultat de la question 8.c : pour tout réel $r > 0$, il existe un complexe z tel que $|z - z_0| \leqslant r$ et tel que

$$\big|Q^*(z)\big| > \big|Q^*(z_0)\big|$$

d'où

$$\big|Q(z)\big| > \big|Q(z_0)\big|$$

On peut montrer de la même façon, en adaptant légèrement la démonstration précédente, qu'il existe un complexe z tel que

$$\big|Q(z)\big| < \big|Q(z_0)\big|$$

Pour cela, il faut, dans la question 8.b, poser $z = z_0 + r\,e^{i(\theta+\pi)/k}$ et prendre z suffisamment proche de z_0 dans la question 8.c.

Cette propriété remarquable permet de démontrer, de manière entièrement analytique, le théorème fondamental de l'algèbre, ou théorème de d'Alembert-Gauss : tout polynôme non constant admet au moins une racine sur $\mathbb{C}$.

Soit en effet P un polynôme complexe non constant.

En factorisant le terme dominant, on montre aisément que $\big|P(z)\big|$ tend vers $+\infty$ lorsque $|z|$ tend vers $+\infty$. Notamment, en posant $A = \big|P(0)\big|$, on peut trouver un réel $d > 0$ tel que

$$\forall z \in \mathbb{C} \qquad |z| \geqslant d \Longrightarrow \big|P(z)\big| \geqslant A$$

Sur la boule fermée $\mathcal{B}$ de centre 0 et de rayon d, qui est compacte, la fonction continue $|P|$ admet donc un minimum m en un point $z_0 \in \mathcal{B}$. Ce minimum est de plus un minimum absolu sur $\mathbb{C}$ puisque, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{B}$, on a

$$\big|P(z)\big| \geqslant A = \big|P(0)\big| \geqslant \big|P(z_0)\big|$$

Raisonnons par l'absurde et supposons que $m > 0$. Alors on peut, comme on l'a noté, trouver au voisinage de z_0 un complexe z tel que $\big|Q(z)\big| < \big|Q(z_0)\big|$, ce qui contredit le fait que z_0 est un minimum global.

Ainsi, P s'annule en z_0.

9.b Soit $Q \in \mathcal{E}_d$. Tout d'abord notons que, par inclusion du cercle unité dans la boule unité fermée, on a

$$\sup_{|z|=1} \big|Q(z)\big| \leqslant \sup_{|z|\leqslant 1} \big|Q(z)\big| \qquad (\mathbf{2})$$

La boule unité fermée de $\mathbb{C}$ est compacte et l'application $z \longmapsto \big|Q(z)\big|$ est continue: elle atteint donc son maximum sur cette boule. Ainsi, il existe un complexe z_0 tel que

$$|z_0| \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad \sup_{|z|\leqslant 1} \big|Q(z)\big| = \big|Q(z_0)\big|$$

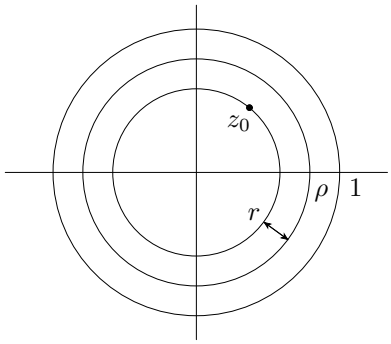
Démontrons maintenant par l'absurde que z_0 appartient au cercle unité.

Supposons en effet que $|z_0| < 1$. Choisissons un réel ρ strictement compris entre $|z_0|$ et 1, par exemple

$$\rho = \frac{1 + |z_0|}{2}$$

et notons

$$r = \rho - |z_0| = \frac{1 - |z_0|}{2} > 0$$



D'après la question 9.a, on peut trouver un complexe w tel que $|w - z_0| \leqslant r$ et vérifiant

$$\big|\mathrm{Q}(w)\big| > \big|\mathrm{Q}(z_0)\big|$$

De plus,

$$|w| \leqslant |w - z_0| + |z_0| \leqslant r + |z_0| = \rho < 1$$

ce qui montre que w appartient à la boule unité fermée et que

$$\big|\mathrm{Q}(w)\big| \leqslant \sup_{|z|\leqslant 1} \big|\mathrm{Q}(z)\big| = \big|\mathrm{Q}(z_0)\big|$$

On obtient donc une contradiction.

Par conséquent, $|z_0| = 1$. On en déduit que

$$\sup_{|z|\leqslant 1} \big|\mathrm{Q}(z)\big| = \big|\mathrm{Q}(z_0)\big| \leqslant \sup_{|z|=1} \big|\mathrm{Q}(z)\big| \qquad (\mathbf{3})$$

En conclusion, les inégalités (**2**) et (**3**) donnent

$$\boxed{\sup_{|z|\leqslant 1} \big|\mathrm{Q}(z)\big| = \sup_{|z|=1} \big|\mathrm{Q}(z)\big|}$$

> Ce résultat est un cas particulier d'un théorème appelé « théorème du maximum », qui stipule qu'une fonction développable en série entière sur le disque unité complexe n'admet pas de maximum dans la boule ouverte, mais que ce maximum est obligatoirement sur le bord, c'est-à-dire sur le cercle unité.

9.c Soit $\mathrm{Q} \in \mathcal{E}_d$. Remarquons tout d'abord que

$$\sup_{|z|=1} \left|\frac{\mathrm{Q}(z)}{z^d}\right| = \sup_{|z|=1} \big|\mathrm{Q}(z)\big|$$

Si l'on note $\mathrm{Q}(\mathrm{X}) = a_0 + a_1\,\mathrm{X} + a_2\,\mathrm{X}^2 + \cdots + a_n\,\mathrm{X}^n$

posons $$\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^d \cdot \mathrm{Q}\left(\frac{1}{\mathrm{X}}\right)$$

c'est-à-dire $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = a_n + a_{n-1}\,\mathrm{X} + \cdots + a_1\,\mathrm{X}^{n-1} + a_0\,\mathrm{X}^n$

que l'on appelle *polynôme aux inverses*.

On a alors, pour tout complexe z non nul, $\dfrac{\mathrm{Q}(z)}{z^d} = \mathrm{P}\left(\dfrac{1}{z}\right)$ et on peut écrire

$$\begin{aligned}
\sup_{|z|=1}\left|\mathrm{Q}(z)\right| &= \sup_{|z|=1}\left|\frac{\mathrm{Q}(z)}{z^d}\right| \\
&= \sup_{|z|=1}\left|\mathrm{P}\left(\frac{1}{z}\right)\right| \\
&= \sup_{|w|=1}\left|\mathrm{P}(w)\right| && \text{(en posant } w = 1/z\text{)} \\
&= \sup_{|w|\leqslant 1}\left|\mathrm{P}(w)\right| && \text{(d'après la question 9.b)} \\
&= \sup_{\substack{|w|\leqslant 1\\ w\neq 0}}\left|\mathrm{P}(w)\right| && \text{(par continuité de P)} \\
&= \sup_{|z|\geqslant 1}\left|\mathrm{P}\left(\frac{1}{z}\right)\right| && \text{(en posant } z = 1/w\text{)}
\end{aligned}$$

$$\sup_{|z|=1}\left|\mathrm{Q}(z)\right| = \sup_{|z|\geqslant 1}\left|\frac{\mathrm{Q}(z)}{z^d}\right|$$

Conclusion : $\boxed{\displaystyle\sup_{|z|=1}\left|\mathrm{Q}(z)\right| = \sup_{|z|\geqslant 1}\left|\frac{\mathrm{Q}(z)}{z^d}\right|}$

9.d On prend ici $\mathrm{K} = \left\{z \in \mathbb{C}\ ;\ |z| \leqslant 1\right\}$ et on pose $\mathrm{Q}_0(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^d$. Alors

$$\|\mathrm{Q}_0\|_{\mathrm{K}} = \sup_{z\in\mathrm{K}}\left|\mathrm{Q}(z)\right| = \sup_{|z|\leqslant 1}\left|z^d\right| = 1$$

Comme Q_0 appartient à $\mathcal{U}_d$, on en déduit que

$$m = \inf_{\mathrm{Q}\in\mathcal{U}_d}\|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{K}} \leqslant 1$$

Soit $\mathrm{Q} \in \mathcal{U}_d$ un polynôme unitaire de degré d. On peut écrire

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{K}} &= \sup_{|z|\leqslant 1}\left|\mathrm{Q}(z)\right| \\
&= \sup_{|z|=1}\left|\mathrm{Q}(z)\right| && \text{(grâce à la question 9.b)}
\end{aligned}$$

$$\|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{K}} = \sup_{|z|\geqslant 1}\left|\frac{\mathrm{Q}(z)}{z^d}\right| \qquad \text{(grâce à la question 9.c)}$$

Or, Q étant unitaire, on en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{Q}(x)}{x^d} = 1$$

ce qui montre que $\displaystyle\sup_{|z|\geqslant 1}\left|\frac{\mathrm{Q}(z)}{z^d}\right| \geqslant 1$

et donc $\|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{K}} \geqslant 1$

Par suite, en passant à la borne inférieure sur $\mathrm{Q} \in \mathcal{U}_d$, on obtient

$$m = \inf_{\mathrm{Q}\in\mathcal{U}_d}\|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{K}} \geqslant 1$$

Ainsi, $m = 1$ et $\boxed{\|\mathrm{Q}_0\|_{\mathrm{K}} = m}$

Cinquième partie

10 Développons

$$|z_0+z_1|^2=(z_0+z_1)\times(\overline{z_0+z_1})=|z_0|^2+|z_1|^2+2\,\mathrm{Re}\,(z_0\overline{z_1})$$

ce qui donne $\quad |z_0+z_1|^2-\big(|z_0|+|z_1|\big)^2=-2\,|z_0|\,|z_1|+2\,\mathrm{Re}\,(z_0\,\overline{z_1})$

Supposons que cette quantité est nulle ; alors

$$\mathrm{Re}\,(z_0\overline{z_1})=|z_0|\,|z_1|=|z_0\,\overline{z_1}|$$

ce qui implique que $z_0\,\overline{z_1}$ est réel, donc que z_0 et z_1 ont le même argument : il existe par conséquent un réel λ tel que $z_1=\lambda z_0$. Puisque la partie réelle de $z_0\overline{z_1}$ est strictement positive, on en déduit que $\lambda>0$.

La réciproque est immédiate.

$$\boxed{|z_0+z_1|=|z_0|+|z_1| \text{ si, et seulement si, il existe } \lambda>0 \text{ tel que } z_1=\lambda z_0.}$$

11.a Les cas $t=0$ et $t=1$ étant évidents, choisissons $t\in\,]\,0\,;1\,[$ et considérons

$$\mathrm{Q}_t=t\,\mathrm{Q}_1+(1-t)\,\mathrm{Q}_0$$

Remarquons que Q_t est un polynôme unitaire de degré d, donc un élément de $\mathcal{U}_d$. Or, m est la borne inférieure, évaluée sur l'ensemble des polynômes $\mathrm{Q}\in\mathcal{U}_d$, de $\|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{K}}$, donc on a

$$\|\mathrm{Q}_t\|_{\mathrm{K}}\geqslant m$$

Pour tout $z\in\mathrm{K}$, on peut écrire

$$\big|\mathrm{Q}_t(z)\big|\leqslant t\underbrace{\big|\mathrm{Q}_1(z)\big|}_{\leqslant m}+(1-t)\underbrace{\big|\mathrm{Q}_0(z)\big|}_{\leqslant m}$$

et donc, puisque t et $1-t$ sont positifs,

$$\big|\mathrm{Q}_t(z)\big|\leqslant m$$

Ceci étant vrai pour tout z dans K, on a donc montré que

$$\|\mathrm{Q}_t\|(z)\leqslant m$$

Conclusion : $\boxed{\forall t\in[\,0\,;1\,]\qquad \|\mathrm{Q}_t\|_{\mathrm{K}}=m}$

11.b Soient $t\in\,]\,0\,;1\,[$ et $z\in\mathcal{M}(\mathrm{Q}_t)$. Par définition de $\mathcal{M}(\mathrm{Q}_t)$, on a donc

$$\|\mathrm{Q}_t\|_{\mathrm{K}}=\big|\mathrm{Q}_t(z)\big|=m$$

On peut alors écrire

$$\begin{aligned}m=\big|\mathrm{Q}_t(z)\big|&=\big|t\,\mathrm{Q}_1(z)+(1-t)\,\mathrm{Q}_0(z)\big|\\&\leqslant t\underbrace{\big|\mathrm{Q}_1(z)\big|}_{\leqslant m}+(1-t)\underbrace{\big|\mathrm{Q}_0(z)\big|}_{\leqslant m}\leqslant m\end{aligned}$$

De plus, t et $1-t$ étant strictement positifs, la dernière inégalité serait stricte dès lors que $\big|\mathrm{Q}_0(z)\big| < m$ ou $\big|\mathrm{Q}_1(z)\big| < m$, ce qui mènerait à une contradiction.

Par conséquent, on a $\big|\mathrm{Q}_0(z)\big| = \big|\mathrm{Q}_1(z)\big| = m$ et donc

$$\boxed{z \in \mathcal{M}(\mathrm{Q}_0) \qquad \text{et} \qquad z \in \mathcal{M}(\mathrm{Q}_1)}$$

Puisque $$m = t\big|\mathrm{Q}_1(z)\big| + (1-t)\,\big|\mathrm{Q}_0(z)\big|$$

on en déduit $$\big|t\,\mathrm{Q}_1(z) + (1-t)\,\mathrm{Q}_0(z)\big| = t\,\big|\mathrm{Q}_1(z)\big| + (1-t)\,\big|\mathrm{Q}_0(z)\big|$$

D'après la question 10, il existe donc un réel $\lambda > 0$ tel que

$$(1-t)\,\mathrm{Q}_0(z) = \lambda t\,\mathrm{Q}_1(t)$$

ce qui permet d'écrire, en prenant le module de chaque membre et en se souvenant que t et $1-t$ sont tous deux strictement positifs :

$$1 - t = \lambda t$$

et par conséquent $$\boxed{\mathrm{Q}_0(z) = \mathrm{Q}_1(z)}$$

11.c Soit $t \in \,]\,0\,;1\,[$. La question 11.b montre que tout élément z de $\mathcal{M}(\mathrm{Q}_t)$ est tel que $\mathrm{Q}_0(z) = \mathrm{Q}_1(z)$, donc est racine du polynôme $\mathrm{Q}_0 - \mathrm{Q}_1$. Or, Q_0 et Q_1 sont unitaires, donc ont le même coefficient dominant : $\mathrm{Q}_0 - \mathrm{Q}_1$ est donc de degré au plus $d-1$ et possède au maximum $d-1$ racines distinctes. Ainsi,

$$\boxed{\text{Card}\,\big(\mathcal{M}(\mathrm{Q}_t)\big) < d}$$

12.a Notons $n = \text{Card}\,\big(\mathcal{M}(\mathrm{Q})\big)$ et $\mathcal{M}(\mathrm{Q}) = \{x_1, \ldots, x_n\}$. On utilise les notations de la question 1, et l'on pose

$$\mathrm{L} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Q}(x_i)\,\mathrm{P}_i$$

Le polynôme L étant une combinaison linéaire de polynômes de degré au plus $n \leqslant d-1$, il est lui-même de degré au plus $d-1$, donc

$$\boxed{\mathrm{L} \in \mathcal{E}_{d-1} \qquad \text{et} \qquad \forall z \in \mathcal{M}(\mathrm{Q}) \quad \mathrm{L}(z) = \mathrm{Q}(z)}$$

12.b Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Le polynôme Q étant unitaire de degré d et le polynôme L étant de degré au plus $d-1$, on en déduit que Q_p est également unitaire de degré d, donc

$$\mathrm{Q}_p \in \mathcal{U}_d$$

Par conséquent $\|\mathrm{Q}_p\|_{\mathrm{K}} = \sup\limits_{z\in\mathrm{K}} \big|\mathrm{Q}_p(z)\big| \geqslant m$. Or, cette borne inférieure est atteinte sur le compact K, autrement dit,

$$\boxed{\text{Il existe un complexe } z_p \in \mathrm{K} \text{ tel que } \big|\mathrm{Q}_p(z_p)\big| = \|\mathrm{Q}_p\|_{\mathrm{K}} \geqslant m = \|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{K}}.} \qquad (\mathbf{5})$$

12.c On admet qu'il existe une sous-suite $(z_{n_p})_{p\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un élément ℓ de K.

> Cette propriété est en fait caractéristique des compacts dans des espaces vectoriels normés ; c'est même ainsi que l'on peut les définir en dimension quelconque : une partie K de E est compacte si et seulement si toute suite à valeurs dans E admet une sous-suite convergente dans E.

On sait déjà, par définition de la norme $\|\cdot\|_{\mathrm{K}}$, que

$$\big|\mathrm{Q}(\ell)\big| \leqslant \|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{K}}$$

De plus, pour tout entier p non nul, on a

$$\big|\mathrm{Q}_p(z_{n_p})\big| \geqslant \|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{K}} \qquad (\mathbf{6})$$

Or, $$\mathrm{Q}_{n_p}(z_{n_p}) = \mathrm{Q}(z_{n_p}) - \frac{1}{n_p}\,\mathrm{L}(z_{n_p})$$

La continuité des applications polynomiales Q et L permet d'affirmer que

$$\lim_{p\to\infty} \mathrm{Q}(z_{n_p}) = \mathrm{Q}(\ell) \qquad \text{et} \qquad \lim_{p\to\infty} \mathrm{L}(z_{n_p}) = \mathrm{L}(\ell)$$

En outre, $$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{n_p} = 0$$

et par suite $$\lim_{p\to\infty} \mathrm{Q}_{n_p}(z_{n_p}) = \mathrm{Q}(\ell)$$

En passant à la limite dans l'équation (**6**), on obtient donc

$$\big|\mathrm{Q}(\ell)\big| \geqslant \|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{K}}$$

Conclusion : $$\boxed{\big|\mathrm{Q}(\ell)\big| = \|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{K}}}$$

Ainsi, par définition de l'ensemble $\mathcal{M}(\mathrm{Q})$, on en déduit que $\ell \in \mathcal{M}(\mathrm{Q})$ et, d'après la construction du polynôme L faite à la question 12.a :

$$\boxed{\mathrm{Q}(\ell) = \mathrm{L}(\ell)}$$

12.d La question précédente a permis de montrer que

$$\mathrm{Q}(\ell) = \|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{K}} > 0$$

puisque Q, étant unitaire, est nécessairement non nul.

On peut donc poser, pour tout entier naturel p :

$$\boxed{\varepsilon_p = \frac{\mathrm{Q}(z_{n_p})}{\mathrm{Q}(\ell)} - 1}$$

Alors, la suite de terme général $\mathrm{Q}(z_{n_p})$ convergeant vers $\mathrm{Q}(\ell)$, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{p\to\infty} \varepsilon_p = 0}$$

De plus, on a $$\boxed{\forall p \in \mathbb{N} \qquad |1+\varepsilon_p| = \left|\frac{\mathrm{Q}(z_{n_p})}{\mathrm{Q}(\ell)}\right| = \frac{\big|\mathrm{Q}(z_{n_p})\big|}{\|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{K}}} \leqslant 1}$$

Enfin, posons, pour tout entier naturel p suffisamment grand pour que $|\varepsilon_p| \leqslant \dfrac{1}{2}$ donc pour que $1+\varepsilon_p$ soit toujours non nul,

$$\boxed{\varepsilon'_p = \frac{\mathrm{L}(z_{n_p})}{\mathrm{Q}(\ell)(1+\varepsilon_p)} - 1}$$

Puisque $$\lim_{p\to\infty} \mathrm{L}(z_{n_p}) = \mathrm{L}(\ell) = \mathrm{Q}(\ell)$$

on a $$\boxed{\lim_{p\to\infty} \varepsilon'_p = 0}$$

Par construction, on a bien les deux formules demandées :

$$\mathrm{Q}(z_{n_p}) = \mathrm{Q}(\ell)\,(1+\varepsilon_p) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{L}(z_{n_p}) = \mathrm{Q}(\ell)\,(1+\varepsilon_p)(1+\varepsilon'_p)$$

On peut maintenant calculer, pour tout entier p :

$$\mathrm{Q}_{n_p}(z_{n_p}) = \mathrm{Q}(z_{n_p}) - \frac{1}{n_p}\,\mathrm{L}(z_{n_p}) = \mathrm{Q}(\ell)(1+\varepsilon_p)\left[1 - \frac{1}{n_p}(1+\varepsilon'_p)\right]$$

d'où
$$\begin{aligned}
\frac{\left|\mathrm{Q}_{n_p}(z_{n_p})\right|}{\|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{K}}} = \frac{\left|\mathrm{Q}_{n_p}(z_{n_p})\right|}{\left|\mathrm{Q}(\ell)\right|} &= \left|1+\varepsilon_p\right| \times \left|1 - \frac{1+\varepsilon'_p}{n_p}\right| \\
&\leqslant \left|1 - \frac{1+\varepsilon'_p}{n_p}\right| = \left|1 - \frac{1}{n_p} - \frac{\varepsilon'_p}{n_p}\right| \\
&\leqslant \left|1 - \frac{1}{n_p}\right| + \frac{\left|\varepsilon'_p\right|}{n_p} \\
\frac{\left|\mathrm{Q}_{n_p}(z_{n_p})\right|}{\|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{K}}} &\leqslant 1 - \frac{1}{n_p} + \frac{\left|\varepsilon'_p\right|}{n_p}
\end{aligned}$$

Or, pour p suffisamment grand, on a $\left|\varepsilon'_p\right| < 1$, donc

$$\boxed{\text{Pour } p \text{ suffisamment grand,} \quad \left|\mathrm{Q}_{n_p}(z_{n_p})\right| < \|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{K}}.} \qquad (\mathbf{7})$$

13 Il est maintenant temps de conclure. Supposons qu'il n'y ait pas unicité du polynôme unitaire de norme minimale. Choisissons alors Q_0 et Q_1 deux polynômes distincts vérifiant tous les deux

$$\|\mathrm{Q}_0\|_{\mathrm{K}} = \|\mathrm{Q}_1\|_{\mathrm{K}} = m$$

Notons alors, par exemple,

$$\mathrm{Q} = \mathrm{Q}_{1/2} = \frac{1}{2}\big[\mathrm{Q}_0 + \mathrm{Q}_1\big]$$

D'après la question 11.a, on a $\|\mathrm{Q}\|_{\mathrm{K}} = m$. D'après la question 11.c, on a de plus $\mathrm{Card}\,\big(\mathcal{M}(\mathrm{Q})\big) < d$.

La question 12 permet alors d'obtenir une contradiction entre les inégalités (**5**) et (**7**).

$$\boxed{\text{Il y a donc unicité du polynôme } \mathrm{Q}_0 \in \mathcal{U}_d \text{ tel que } \|\mathrm{Q}_0\|_{\mathrm{K}} = m.}$$