

PRÉLIMINAIRES

1-a Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on définit la fonction g_x sur $\mathbb{R}$ par

$$g_x(t) = e^{-t} t^{x-1}$$

Ces fonctions sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0; +\infty[$. On a, d'après le théorème des croissances comparées, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g_x(t) = o_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right)$$

et $t \mapsto 1/t^2$ est une fonction intégrable sur $[1; +\infty[$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g_x(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} t^{x-1}$$

Par équivalence avec une intégrale de Riemann en 0, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction g_x est intégrable sur $]0; 1]$ si et seulement si $x - 1 > -1$, c'est-à-dire, si et seulement si $x > 0$. Ainsi, g_x est intégrable sur $]0; +\infty[$ pour tout $x > 0$, donc

La fonction Γ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

1-b Soit $x > 0$. Calculons $\Gamma(x+1)$ à l'aide d'une intégration par parties. Les fonctions $t \mapsto -e^{-t}$ et $t \mapsto t^x$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, donc de classe $\mathcal{C}^1$. De plus,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} -e^{-t} t^x = \lim_{t \rightarrow +\infty} -e^{-t} t^x = 0$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t} t^x dt \\ &= [-e^{-t} t^x]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x e^{-t} t^{x-1} dt \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} -e^{-t} t^x - \lim_{t \rightarrow 0^+} -e^{-t} t^x + x \Gamma(x) \\ \Gamma(x+1) &= x \Gamma(x) \end{aligned}$$

Pour tout $x > 0$, $\Gamma(x+1) = x \Gamma(x)$.

Soit la propriété définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$\mathcal{P}(n) : \quad \Gamma(n) = (n-1)!$$

Démontrons-la par récurrence.

- $\mathcal{P}(1)$ est vraie : en effet, on a

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \lim_{t \rightarrow +\infty} -e^{-t} + e^0 = 1 = 0!$$

- $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$: Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par l'hypothèse de récurrence et la propriété ci-dessus, on obtient

$$\Gamma(n+1) = n \Gamma(n) = n(n-1)! = n!$$

- Conclusion : D'après le principe de récurrence,

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \Gamma(n) = (n-1)!$$

2-a-i Soit $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de limite nulle. Définissons pour tout entier naturel n la fonction f_n sur $[0; t]$ par

$$\forall u \in [0; t] \quad f_n(u) = |f(t + \eta_n, u) - f(t, u)|$$

La fonction f étant continue sur le pavé $[0; a]^2$ et la suite $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers 0, il s'ensuit que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle. De plus, la fonction f étant continue sur le pavé $[0; a]^2$, $|f|$ y atteint un maximum, noté $\|f\|_\infty$, et f est continue en chacune de ses variables. En particulier, la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues. Alors, pour tout entier naturel n , et pour tout $u \in [0; t]$, on a d'après l'inégalité triangulaire

$$|f_n(u)| \leq 2\|f\|_\infty$$

Or, la fonction $u \mapsto 2\|f\|_\infty$ est intégrable sur l'intervalle borné $[0; t]$. Ainsi le théorème de convergence dominée assure

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} h(\eta_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^t f_n(u) \, du = \int_0^t 0 \, du = 0$$

Ceci étant vrai pour toute suite $(\eta_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la caractérisation séquentielle de la limite nous assure que

$$\boxed{\lim_{\eta \rightarrow 0} h(\eta) = 0}$$

Une version hors programme du théorème de Heine permet de conclure. Ce théorème est en fait vrai en toute dimension finie. On peut donc refaire la preuve de la façon suivante : la fonction f étant continue, définie sur le pavé $[0; a]^2$, le théorème de Heine assure son uniforme continuité sur ce pavé. Soient donc $\varepsilon > 0$ et $t \in [0; a]$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $\eta \in]t - \delta; t + \delta[$, on ait pour tout $u \in [0; a]$

$$|f(t + \eta, u) - f(t, u)| < \varepsilon$$

Ainsi, pour tout $\eta \in]t - \delta; t + \delta[\cap [-t; a - t]$,

$$h(\eta) = \int_0^t |f(t + \eta, u) - f(t, u)| \, du \leq t\varepsilon$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} h(\eta) = 0$$

2-a-ii La fonction f est continue sur $[0; a]^2$. Le théorème de la borne atteinte assure que $|f|$ y atteint un maximum, noté $\|f\|_\infty$. Soit g la fonction définie pour tout $t \in [0; a]$ par

$$g(t) = \int_0^t f(t, u) \, du$$

Soient $t \in [0; a]$ fixé et $\eta \in [-t; a - t]$. D'après l'inégalité triangulaire, on a

$$\begin{aligned} |g(t + \eta) - g(t)| &= \left| \int_0^{t+\eta} f(t + \eta, u) \, du - \int_0^t f(t, u) \, du \right| \\ &\leq \left| \int_0^t (f(t + \eta, u) - f(t, u)) \, du \right| + \left| \int_t^{t+\eta} f(t + \eta, u) \, du \right| \\ &\leq h(\eta) + \int_t^{t+\eta} |f(t + \eta, u)| \, du \\ |g(t + \eta) - g(t)| &\leq h(\eta) + \eta \|f\|_\infty \end{aligned}$$

La question 2-a-i permet alors de conclure par somme de limites que

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} |g(t + \eta) - g(t)| = 0$$

La fonction $t \mapsto \int_0^t f(t, u) \, du$ est continue sur $[0; a]$.

Il est tentant d'essayer d'appliquer le théorème de continuité des fonctions définies par une intégrale à paramètre. Toutefois cette approche est vouée à l'échec. En effet, la borne supérieure de l'intégrale dépend du paramètre. Le même problème apparaîtra plus tard dans le sujet. Il faudra donc faire particulièrement attention.

2-a-iii La question 2-a-ii assure la continuité de la fonction $t \mapsto \int_0^t f(t, u) \, du$ sur l'intervalle $[0; a]$. Le théorème fondamental de l'analyse assure donc que

La fonction F est dérivable et pour tout $x \in [0; a]$, $F'(x) = \int_0^x f(x, u) \, du$.

2-b-i D'après le théorème fondamental de l'analyse,

$$\frac{\partial h}{\partial \alpha}(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta f(t, \alpha) \, dt$$

2-b-ii On va appliquer le théorème de dérivation des fonctions définies par une intégrale à paramètre. Soit $\|f\|_\infty$ le maximum de $|f|$ sur $[0; a]^2$, qui existe puisque la fonction f y est continue.

- Pour tout $u \in [0; a]$ fixé, le théorème fondamental de l'analyse assure que la fonction

$$\beta \in [0; a] \mapsto \int_u^\beta f(t, u) \, dt$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; a]$. En particulier, elle est continue.

- Le théorème fondamental de l'analyse assure de plus que pour $\beta \in [0; a]$,

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\beta \mapsto \int_u^\beta f(t, u) \, dt \right) (u, \beta) = f(\beta, u)$$

On en déduit que cette fonction est continue par morceaux en la variable u .

- La fonction f est continue sur le pavé $[0; a]^2$. En particulier, elle est continue en chacune de ses variables. De surcroît, pour tous $t, u \in [0; a]$, $|f(t, u)| \leq \|f\|_\infty$ et la fonction constante $u \mapsto \|f\|_\infty$ est une fonction intégrable sur le segment $[0; \beta]$. Ainsi, pour β fixé, le théorème de continuité des intégrales à paramètre assure que la fonction définie sur $[0; a]$ par

$$u \mapsto \int_0^\beta f(t, u) \, dt$$

est continue. Par suite, comme

$$\int_u^\beta f(t, u) \, dt = \int_0^\beta f(t, u) \, dt - \int_0^u f(t, u) \, dt$$

et que la question 2-a-ii assure la continuité de

$$u \mapsto \int_0^u f(t, u) \, dt$$

on obtient la continuité de la fonction, à paramètre $\beta \in [0; a]$ fixé, définie par

$$u \in [0; a] \mapsto \int_u^\beta f(t, u) \, dt$$

- Enfin pour tous $u, \beta \in [0; a]$, $|f(\beta, u)| \leq \|f\|_\infty$ et $u \mapsto \|f\|_\infty$ est intégrable sur le segment $[0; \alpha]$.

Le théorème de dérivation des fonctions définies par une intégrale à paramètre permet alors de conclure que

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial \beta}(\alpha, \beta) = \int_0^\alpha f(\beta, u) \, du}$$

2-b-iii Remarquons que $G(x) = h(x, x)$ pour tout $x \in [0; a]$ et h est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; a]^2$. La fonction identité est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; a]$. La règle de la chaîne appliquée à $x \mapsto h(\text{id}(x), \text{id}(x))$ assure donc que G est dérivable et que pour tout $x \in [0; a]$,

$$G'(x) = \text{id}'(x) \frac{\partial h}{\partial \alpha}(x, x) + \text{id}'(x) \frac{\partial h}{\partial \beta}(x, x) = \frac{\partial h}{\partial \alpha}(x, x) + \frac{\partial h}{\partial \beta}(x, x)$$

En utilisant les questions 2-b-i et 2-b-ii, on calcule

$$G'(x) = \underbrace{\int_x^x f(t, x) \, dt}_{=0} + \int_0^x f(x, u) \, du$$

c'est-à-dire

$$\boxed{G'(x) = \int_0^x f(x, u) \, du}$$

2-c Les questions 2-a-iii et 2-b-iii montrent que

$$\forall x \in [0; a] \quad F'(x) = G'(x)$$

Par suite, la fonction $F - G$ est constante. Or $F(0) = 0 = G(0)$, c'est pourquoi $F = G$, en particulier $F(a) = G(a)$, d'où

$$\boxed{\int_0^a dt \left(\int_0^t f(t, u) \, du \right) = \int_0^a du \left(\int_u^a f(t, u) \, dt \right)}$$

3-a Soient $f, g : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues et $a \in \mathbb{R}_+$. Définissons

$$h_a : \begin{cases} [0; a]^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) \longmapsto f(x-t)g(t) \end{cases}$$

La fonction h_a est continue sur $[0; a]^2$ comme produit de fonctions continues. D'après la question 2-a-ii appliquée à h_a , on obtient que la fonction $f * g : x \mapsto \int_0^x h_a(x, t) dt$ est continue sur $[0; a]$. Ceci étant vrai pour tout réel positif a , on en déduit

La fonction $f * g$ est continue sur $[0; +\infty[$.

Le produit de convolution est une sorte de moyenne pondérée. Il s'agit de mettre pour poids l'autre fonction, mais parcourue en sens inverse.

3-b Soit $x \in [0; +\infty[$. La fonction $u : t \mapsto x-t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; x]$. On peut donc faire ce changement de variable dans le produit de convolution. On obtient, pour tout $x \in [0; +\infty[$,

$$(f * g)(x) = \int_x^0 -f(u)g(x-u) du = \int_0^x g(x-u)f(u) du = (g * f)(x)$$

c'est-à-dire

Le produit de convolution est commutatif.

3-c Soient f, g et h des fonctions continues sur $[0; +\infty[$. On a pour $x \geq 0$,

$$(f * g) * h(x) = \int_0^x (f * g)(x-t)h(t) dt = \int_0^x \left(\int_0^{x-t} f(x-t-u)g(u)h(t) du \right) dt$$

En appliquant le changement de variable affine $v = u + t$ dans l'intégrale intérieure,

$$(f * g) * h(x) = \int_0^x \left(\int_t^x f(x-v)g(v-t)h(t) dv \right) dt$$

La fonction

$$y : \begin{cases} [0; x]^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (t, v) \longmapsto f(x-v)g(v-t)h(t) \end{cases}$$

est continue par opérations usuelles. On peut donc lui appliquer la question 2-c. Ainsi,

$$(f * g) * h(x) = \int_0^x \left(\int_0^t f(x-v)g(v-t)h(t) dt \right) dv = \int_0^x f(x-v)(g * h(v)) dv$$

Autrement dit, $(f * g) * h(x) = f * (g * h)(x)$ pour tout $x \in [0; +\infty[$, c'est-à-dire

Le produit de convolution est associatif.

La linéarité de l'intégrale implique que le produit de convolution est distributif sur l'addition, à gauche comme à droite. Cela permet d'obtenir une structure de pseudo-anneau commutatif (c'est-à-dire un anneau commutatif sans élément neutre pour la multiplication) pour l'ensemble des fonctions continues sur $[0; +\infty[$ et à valeurs réelles. L'absence de neutre pour l'opération $*$ peut être compensée par l'utilisation d'une suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour toute fonction continue $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, la suite $(u_n * f)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f . On appelle une telle suite une approximation de l'unité.

4-a Soient f d'ordre exponentiel et des réels M et r associés. Fixons $s > r$ et considérons la fonction g définie par $g(t) = e^{-st}f(t)$ pour tout $t \in [0; +\infty[$. On a alors pour tout $t \geq 0$,

$$|g(t)| \leq Me^{-(s-r)t}$$

Puisque $s - r > 0$, on reconnaît alors que le majorant est une fonction intégrable sur $[0; +\infty[$. Il s'ensuit alors que la fonction g est elle-même intégrable, c'est-à-dire

La quantité $\mathcal{L}(f)(s)$ est bien définie pour tout $s > r$.

La transformée de Laplace permet de transformer certaines équations différentielles en équations fonctionnelles. Elle est donc très utile pour leur résolution. Ceci s'applique aussi dans le cadre de l'analyse fractionnaire. On verra un exemple en partie C.

4-b Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ d'ordre exponentiel telle que f' soit elle-même d'ordre exponentiel. Soient $M_1 > 0$ et r_1 des réels tels que pour tout réel positif t , $|f(t)| \leq M_1 e^{r_1 t}$. Soient encore $M_2 > 0$ et r_2 des réels tels que pour tout réel positif t , $|f'(t)| \leq M_2 e^{r_2 t}$. Posons alors

$$M = \max(M_1, M_2) \quad \text{et} \quad r = \max(r_1, r_2)$$

si bien que pour tout réel positif t ,

$$|f(t)| \leq Me^{rt} \quad \text{et} \quad |f'(t)| \leq Me^{rt}$$

La question 4-a assure la bonne définition de $\mathcal{L}(f')(s)$ et de $\mathcal{L}(f)(s)$ pour tout $s > r$. Les fonctions f et $t \mapsto e^{-st}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; +\infty[$. De plus $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-st}f(t) = 0$ car $s > r$. On peut donc intégrer par parties et obtenir

$$\mathcal{L}(f')(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f'(t) dt = \underbrace{[e^{-st}f(t)]_0^{+\infty}}_{=0-f(0)} + s \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

ou encore

$$\text{Pour tout } s > r, \mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - f(0).$$

Remarquons qu'il est obligatoire de supposer aussi que f' est d'ordre exponentiel puisque f d'ordre exponentiel ne l'implique pas. Par exemple, la fonction $x \mapsto \cos(e^{e^x})$ est d'ordre exponentiel puisqu'elle est bornée, mais sa dérivée, $x \mapsto -e^x e^{e^x} \sin(e^{e^x})$ ne l'est absolument pas !

4-c De même qu'à la question 4-b, choisissons $M > 0$ et r un réel tels que pour tout réel positif t , $|f(t)| \leq Me^{rt}$ et $|g(t)| \leq Me^{rt}$. Alors, par l'inégalité triangulaire, pour tout $x \geq 0$,

$$|f * g(x)| \leq \int_0^x |f(x-t)||g(t)| dt \leq \int_0^x M^2 e^{r(x-t)} e^{rt} dt \leq M^2 x e^{rx}$$

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \leq e^x$. Par suite,

$$|f * g(x)| \leq M^2 e^{(r+1)x}$$

Ainsi,

Le produit de convolution $f * g$ est d'ordre exponentiel.

4-d D'après la question 4-c, $f * g$ est d'ordre exponentiel pour $r + 1$ si r est associé à f et g . D'après la question 4-a, $\mathcal{L}(f * g)(s)$ est bien défini pour $s > r + 1$. Or,

$$\mathcal{L}(f * g)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} \int_0^t f(t-u)g(u) \, du \, dt$$

en particulier cette intégrale converge. Avec les fonctions $|f|$ et $|g|$ au lieu de f et g , on obtient de même que

$$\mathcal{L}(|f| * |g|)(s) = \int_0^{+\infty} \int_0^t |e^{-st} f(t-u)g(u)| \, du \, dt$$

et en particulier, cette intégrale converge. On peut donc appliquer l'équation (E₂) dans le cas $a = +\infty$ et obtenir

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f * g)(s) &= \int_0^{+\infty} \left(\int_u^{+\infty} e^{-st} f(t-u)g(u) \, dt \right) du \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-su} g(u) \left(\int_u^{+\infty} e^{-s(t-u)} f(t-u) \, dt \right) du \end{aligned}$$

Appliquons le changement de variable affine $v = t - u$ dans l'intégrale intérieure :

$$\mathcal{L}(f * g)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-su} g(u) \int_0^{+\infty} e^{-sv} f(v) \, dv \, du$$

On conclut alors que pour $s > r + 1$,

$$\mathcal{L}(f * g)(s) = \left(\int_0^{+\infty} e^{-su} g(u) \, du \right) \left(\int_0^{+\infty} e^{-sv} f(v) \, dv \right) = \mathcal{L}(f)(s) \mathcal{L}(g)(s)$$

Même si cela y ressemble fortement, la fonctionnelle $\mathcal{L}$ n'est pas linéaire. En effet, l'égalité

$$\mathcal{L}(f)(s) + \mathcal{L}(g)(s) = \mathcal{L}(f + g)(s)$$

n'est valable que pour s assez grand. En particulier, rien n'assure que les trois termes ci-dessus ne soient définis pour les mêmes valeurs de s . La seule chose que l'on sait, c'est qu'ils le sont pour s assez grand. Un exemple simple est la fonction $\exp$ elle-même. Dans ce cas, $\mathcal{L}(\exp)$ est définie exactement sur $]1; +\infty[$ mais $\mathcal{L}(\exp - \exp)$ est définie sur $[0; +\infty[$.

5-a Par linéarité de l'intégrale généralisée, si f et g sont des fonctions telles que pour tout s assez grand $\mathcal{L}(f)(s) = \mathcal{L}(g)(s)$, alors $\mathcal{L}(f - g)(s) = 0$ pour s assez grand. Ainsi, si $f \neq g$, la fonction nulle possède un antécédent non nul par $\mathcal{L}$. Réciproquement, si $f \neq 0$ est telle que $\mathcal{L}(f) = 0 = \mathcal{L}(t \mapsto 0)$, alors $\mathcal{L}$ n'est pas injective. Par suite,

On peut se ramener à chercher les fonctions f telles que $\mathcal{L}(f)(s) = 0$ pour s assez grand.

Le fait que $\mathcal{L}$ ressemble à une application linéaire se traduit ici par une condition nécessaire et suffisante pour l'injectivité similaire à celle des applications linéaires. Comme pour tout ce que l'on exprime avec $\mathcal{L}$, les propriétés des applications linéaires sont vraies pour $\mathcal{L}$ mais pour s assez grand. En particulier, ici seule la fonction nulle peut annuler $\mathcal{L}$ pour s assez grand.

5-b Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On suppose que pour tout entier $n \geq 0$,

$$\int_a^b x^n f(x) \, dx = 0$$

Soient $\varepsilon > 0$ et $p_\varepsilon \in \mathbb{R}[X]$ donné par le théorème d'approximation de Weierstrass. Notons pour tout $x \in [a; b]$,

$$p_\varepsilon(x) = \sum_{n=0}^d a_n x^n$$

Par linéarité,
$$\int_a^b p_\varepsilon(x) f(x) \, dx = \sum_{n=0}^d a_n \int_a^b x^n f(x) \, dx = 0$$

Puis, en appliquant l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)^2 \, dx &= \left| \int_a^b f(x)^2 \, dx \right| \\ &\leq \int_a^b \underbrace{|(f(x) - p_\varepsilon(x))|}_{\leq \varepsilon} |f(x)| \, dx + \left| \int_a^b p_\varepsilon(x) f(x) \, dx \right| \\ \int_a^b f(x)^2 \, dx &\leq \varepsilon \int_a^b |f(x)| \, dx \end{aligned}$$

Puisque ceci est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on conclut

$$\int_a^b f(x)^2 \, dx \leq 0$$

Or, f^2 est une fonction positive. On a donc

$$\int_a^b f(x)^2 \, dx \geq 0$$

Par suite,

$$\boxed{\int_a^b f(x)^2 \, dx = 0}$$

La fonction f^2 est continue, positive et d'intégrale nulle sur $[a; b]$, elle est donc nulle sur cet intervalle. On en déduit

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in [a; b], f(x) = 0.}$$

Le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions continues sur $[a; b]$ et à valeurs réelles peut être muni du produit scalaire $(\cdot | \cdot)$ défini par

$$(f | g) = \int_a^b f(u)g(u) \, du$$

pour toutes f, g continues sur $[a; b]$. La question que l'on vient de résoudre traduit donc le fait que $\mathbb{R}[X]^\perp = \{0\}$.

5-c Soit $f : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, d'ordre exponentiel et telle que $\mathcal{L}(f)(s) = 0$ pour tout s assez grand. Soit $n_0 \geq 1$ un entier suffisamment grand tel que $\mathcal{L}(f)(n) = 0$ pour tout $n \geq n_0$ et tel qu'il existe $M > 0$ de sorte que

$$\forall t \in [0; +\infty[\quad |f(t)| \leq M e^{n_0 t}$$

À l'aide du changement de variable $u = e^{-t}$, qui est de classe $\mathcal{C}^1$, on obtient pour tout $n \geq n_0$,

$$\mathcal{L}(f)(n) = \int_0^{+\infty} e^{-nt} f(t) dt = \int_1^0 -u^{n-1} f(-\ln u) du = \int_0^1 u^{n-1} f(-\ln u) du$$

Soit g la fonction définie par $g(0) = 0$ et $g(u) = u^{n_0+1} f(-\ln u)$ pour $u \in]0; 1]$. Par définition de n_0 , on a

$$\forall u \in]0; 1] \quad |f(-\ln u)| \leq M e^{-n_0 \ln u} = \frac{M}{u^{n_0}}$$

Or, $u^{n_0+1} = o_{u \rightarrow 0^+}(u^{n_0})$. Par conséquent,

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} g(u) = 0$$

si bien que la fonction g est continue sur $[0; 1]$, avec pour tout entier n ,

$$\int_0^1 u^n g(u) du = \mathcal{L}(f)(n + n_0 + 2) = 0$$

D'après la question 5-b, on en déduit que g est nulle. Par suite, pour tout $u \in]0; 1]$, on a $f(-\ln u) = 0$. La fonction $-\ln$ étant bijective de $]0; 1]$ dans $[0; +\infty[$, il s'ensuit que f est nulle sur $[0; +\infty[$. D'après la question 5-a,

La fonctionnelle $\mathcal{L}$ est injective.

A. INTÉGRATION FRACTIONNAIRE

6 Soit $x > 0$. On a

$$I^2(f)(x) = \int_0^x I(f)(t) dt = \int_0^x \left(\int_0^t f(u) du \right) dt$$

Posons $g(t, u) = f(u)$ pour $t, u \in]0; x]$. Par hypothèse sur f , la fonction $u \mapsto g(t, u)$ est intégrable en 0 pour tout $t \in]0; x]$. On applique donc (E₂) dans le cas $a = x$ et on obtient

$$I^2(f)(x) = \int_0^x \left(\int_u^x f(u) dt \right) du$$

ou encore

$$\forall x > 0 \quad I^2(f)(x) = \int_0^x (x - u) f(u) du$$

Soit $\mathcal{I}$ l'ensemble des fonctions continues sur $]0; +\infty[$ et intégrables en 0. Définissons pour $n \geq 1$ la propriété suivante :

$$\mathcal{P}(n) : \quad \forall x > 0 \quad \forall f \in \mathcal{I} \quad I^n(f)(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t) dt$$

Démontrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

- $\mathcal{P}(1)$ est vraie par définition de I.
- $\mathcal{P}(2)$ est vraie par le raisonnement ci-dessus.

- $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+2)$: Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. On a d'après $\mathcal{P}(2)$

$$I^{n+2}(f)(x) = I^2(I^n(f))(x) = \int_0^x (x-t) I^n(f)(t) dt$$

Puis, d'après l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} I^{n+2}(f)(x) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x \left(\int_0^t (x-t)(t-u)^{n-1} f(u) du \right) dt \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x \left(\int_u^x (x-t)(t-u)^{n-1} f(u) dt \right) du \quad (\text{d'après (E}_2\text{)}) \\ I^{n+2}(f)(x) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x \left(f(u) \int_u^x (x-t)(t-u)^{n-1} dt \right) du \end{aligned}$$

En intégrant par parties dans l'intégrale intérieure, on obtient

$$\begin{aligned} I^{n+2}(f)(x) &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x \left(f(u) \left(\underbrace{\left[(x-t) \frac{(t-u)^n}{n} \right]_{t=u}}_{=0} + \int_u^x \frac{(t-u)^n}{n} dt \right) \right) du \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x \left(f(u) \left[\frac{(t-u)^{n+1}}{n(n+1)} \right]_{t=u}^{t=x} \right) du \\ I^{n+2}(f)(x) &= \frac{1}{(n+1)!} \int_0^x (x-u)^{n+1} f(u) du \end{aligned}$$

- Conclusion : D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

$$\boxed{\forall n \geq 1 \quad I^n(f)(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t) dt}$$

7-a Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction Φ_α est de classe $\mathcal{C}^\infty$. L'expression usuelle de la dérivée donne, pour tout $t \in]0; +\infty[$ et tout $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$,

$$\Phi_\alpha'(t) = (\alpha-1) \frac{t^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha)}$$

D'après le résultat de la question 1-b dont l'énoncé admet le prolongement sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$, on sait que $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$. Par suite, pour tout $t \in]0; +\infty[$

$$\Phi_\alpha'(t) = \frac{t^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} = \Phi_{\alpha-1}(t)$$

Maintenant si $\alpha \in \mathbb{Z}^-$, alors $\alpha-1 \in \mathbb{Z}^-$ et $\Phi_\alpha = \Phi_{\alpha-1} = 0$, puis $\Phi_\alpha' = 0$. Ainsi,

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \Phi_\alpha' = \Phi_{\alpha-1} \quad (*)$$

Soit $\mathcal{P}(m)$ la propriété définie pour tout $m \in \mathbb{N}$ par

$$\mathcal{P}(m) : \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \Phi_\alpha^{(m)} = \Phi_{\alpha-m}$$

Démontrons-la par récurrence sur m .

- $\mathcal{P}(0)$ énonce le fait que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\Phi_\alpha = \Phi_\alpha$, ce qui est vrai.

- $\mathcal{P}(m) \implies \mathcal{P}(m+1)$: Supposons $\mathcal{P}(m)$ vraie pour un certain entier $m \in \mathbb{N}$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors, d'après la propriété (*), $\Phi_\alpha' = \Phi_{\alpha-1}$. Appliquons $\mathcal{P}(m)$ au réel $\alpha - 1$. On obtient donc

$$\Phi_{\alpha-1}^{(m)} = \Phi_{\alpha-1-m}$$

puis
$$\Phi_\alpha^{(m+1)} = \Phi_{\alpha-1}^{(m)} = \Phi_{\alpha-1-m} = \Phi_{\alpha-(m+1)}$$

Ceci étant vrai pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la propriété $\mathcal{P}(m+1)$ est vraie.

- Conclusion : D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}(m)$ est vraie pour tout entier $m \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire

Pour tout entier naturel m , pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $\Phi_\alpha^{(m)} = \Phi_{\alpha-m}$.

7-b Soient $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $x > 0$. On a

$$\Phi_\alpha * \Phi_\beta(x) = \int_0^x \Phi_\alpha(x-t) \Phi_\beta(t) dt = \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1} t^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} dt$$

Avec le changement de variable linéaire $u = t/x$, on obtient

$$\Phi_\alpha * \Phi_\beta(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 (x-xu)^{\alpha-1} (xu)^{\beta-1} x du = \frac{x^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1} du$$

En appliquant maintenant l'identité (E₁) au cas $p = \alpha$ et $q = \beta$, on déduit alors que pour tout réel $x > 0$,

$$\Phi_\alpha * \Phi_\beta(x) = \frac{x^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \Phi_{\alpha+\beta}(x)$$

Donc

Pour tous $\alpha, \beta > 0$, $\Phi_\alpha * \Phi_\beta = \Phi_{\alpha+\beta}$.

7-c Soit $\alpha > 0$. Remarquons que Φ_α est continue sur $]0; +\infty[$ et intégrable en 0 d'après le critère de Riemann ($\alpha - 1 > -1$). Si $\alpha \geq 1$, elle est d'ordre exponentiel puisque pour tout $x > 0$, $x > \ln x$ et donc par croissance de la fonction exponentielle,

$$\left| \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \right| = \left| \frac{e^{(\alpha-1) \ln x}}{\Gamma(\alpha)} \right| \leq \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \right| e^{(\alpha-1)x}$$

Si $\alpha \in]0; 1[$, l'inégalité précédente n'est plus satisfaite car $\alpha - 1 < 0$. On remarque dans ce cas que Φ_α ne vérifie pas la définition d'une fonction d'ordre exponentiel introduite à la question 4, car $\lim_{t \rightarrow 0^+} \Phi_\alpha(t) = +\infty$. Ainsi, quand l'énoncé précise que le candidat pourra utiliser les résultats des questions préliminaires dans le cas de fonctions uniquement intégrables en 0, cela sous-entend que la définition d'ordre exponentiel a été adaptée dans ce cadre.

Pour s'en sortir, remarquons que dans les questions traitées jusqu'ici, l'hypothèse « être d'ordre exponentiel » n'était utilisée que pour étudier le comportement au voisinage de l'infini des fonctions concernées. On généralise alors naturellement la définition en ne vérifiant l'inégalité qu'à partir d'un certain rang $t_0 > 0$. Autrement dit, si f désigne une fonction continue sur $]0; +\infty[$ et intégrable en 0, on dira qu'elle est d'ordre exponentiel s'il existe trois réels $r, M > 0$ et $t_0 > 0$ tels que

$$\forall t \geq t_0 \quad |f(t)| \leq M e^{rt}$$

En particulier, si $\alpha \in]0; 1[$, la fonction Φ_α devient d'ordre exponentiel avec cette définition en posant $t_0 = 1$, $M = 1/\Gamma(\alpha)$ et $r = 0$. Enfin, le lecteur pourra vérifier que cette généralisation permet effectivement d'étendre les résultats du préliminaire dans ce cadre moins restrictif.

Ainsi, d'après le résultat généralisé de la question 4-a, pour tout $\alpha > 0$, $\mathcal{L}(\Phi_\alpha)(s)$ est bien défini pour s assez grand. En utilisant le changement de variable linéaire $u = st$,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\Phi_\alpha)(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} dt \\ &= \frac{1}{s^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\alpha-1} du\end{aligned}$$

$$\boxed{\mathcal{L}(\Phi_\alpha)(s) = \frac{1}{s^\alpha}} \quad (\text{car } \alpha > 0)$$

Si $\alpha \leq 0$, on a un problème de définition. En particulier, l'intégrale évoquée dans le calcul ci-dessus diverge. Rappelons en effet que le début de l'énoncé admet que l'identité

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt$$

n'est valable que pour $\alpha > 0$.

8-a Si $\alpha = 0$, alors J^α est l'opérateur identité. Ainsi,

$$\forall \beta \geq 0 \quad J^\alpha \circ J^\beta = J^\beta = J^{\alpha+\beta}$$

Si maintenant $\beta = 0$, alors J^β est l'opérateur identité. Ainsi,

$$\forall \alpha \geq 0 \quad J^\alpha \circ J^\beta = J^\alpha = J^{\alpha+\beta}$$

Soient alors α et β des réels strictement positifs. On a pour toute fonction f continue sur $]0; +\infty[$ et intégrable en 0,

$$J^\alpha \circ J^\beta(f) = \Phi_\alpha * (\Phi_\beta * f) \underset{\text{question 3-c}}{=} (\Phi_\alpha * \Phi_\beta) * f \underset{\text{question 7-b}}{=} \Phi_{\alpha+\beta} * f = J^{\alpha+\beta}(f)$$

Finalement,

$$\boxed{\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+ \quad J^\alpha \circ J^\beta = J^{\alpha+\beta}}$$

8-b Soit $\alpha > 0$. Comme évoqué à la question 7-c, Φ_α est d'ordre exponentiel. La question 4-c assure alors que $J^\alpha(f)$ est elle-même d'ordre exponentiel. Ainsi,

Pour tout $\alpha > 0$, la quantité $\mathcal{L}(J^\alpha(f))(s)$ est bien définie pour s assez grand.

De plus, d'après la question 4-d, pour s assez grand,

$$\mathcal{L}(J^\alpha(f))(s) = \mathcal{L}(\Phi_\alpha * f)(s) = \mathcal{L}(\Phi_\alpha)(s) \mathcal{L}(f)(s)$$

Le résultat de la question 7-c permet alors de conclure que

$$\boxed{\text{Pour tout } s \text{ assez grand, } \mathcal{L}(J^\alpha(f))(s) = s^{-\alpha} \mathcal{L}(f)(s).}$$

8-c D'après la question 7-b, on obtient directement

$$\boxed{\forall \alpha, \gamma \in \mathbb{R}_+^* \quad J^\alpha(\Phi_\gamma) = \Phi_\alpha * \Phi_\gamma = \Phi_{\alpha+\gamma} = \Phi_{\gamma+\alpha}}$$

8-d Soient $\alpha > 0$ et f d'ordre exponentiel. Alors d'après les questions 5-a et 8-b,

$$\begin{aligned} J^\alpha(f) = 0 &\iff \exists s_0 > 0 \quad \forall s \geq s_0 \quad \frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L}(f)(s) = 0 \\ &\iff \exists s_0 > 0 \quad \forall s \geq s_0 \quad \mathcal{L}(f)(s) = 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall \alpha > 0 \quad J^\alpha(f) = 0 \iff f = 0} \quad (\text{question 5-c})$$

Cette question permet d'assurer qu'il n'existe pas de pseudo-primitive de la fonction nulle, s'annulant en 0, autre qu'elle-même. Pour être exact, il n'existe pas de telle primitive qui soit d'ordre exponentiel.

On pourrait en fait le démontrer sans utiliser l'hypothèse « f d'ordre exponentiel ». Faisons-le. Supposons donc $J^\alpha(f) = 0$. Soit $\lceil \alpha \rceil$ l'unique entier tel que $\lceil \alpha \rceil - 1 < \alpha \leq \lceil \alpha \rceil$. D'après la question 8-a,

$$J^{\lceil \alpha \rceil}(f) = J^{\lceil \alpha \rceil - \alpha} \circ J^\alpha(f) = J^{\lceil \alpha \rceil - \alpha}(0) = 0$$

Comme $J^{\lceil \alpha \rceil}$ est l'opérateur d'intégration itéré $\lceil \alpha \rceil$ fois, en dérivant $\lceil \alpha \rceil$ fois cette dernière identité, on obtient $f = 0$.

B. DÉRIVÉES FRACTIONNAIRE

9 Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété définie pour $n \in \mathbb{N}$ suivante :

$$\mathcal{P}(n): \text{ « Pour } f \text{ dérivable } n \text{ fois, on a } J^n \circ D^n(f)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} \text{ » }$$

On montre par récurrence que cette propriété est vraie pour tout entier naturel n .

- $\mathcal{P}(0)$ énonce que $f = f$, ce qui est vrai.
- $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$: Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie. Soit f une fonction dérivable $n+1$ fois. Appliquons l'hypothèse de récurrence à la fonction f' . On a donc pour tout $x > 0$,

$$J^n \circ D^{n+1}(f)(x) = J^n \circ D^n(f')(x) = f'(x) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k+1)}(0) \frac{x^k}{k!}$$

Puis, d'après la définition de J et la linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned} J^{n+1} \circ D^{n+1}(f)(x) &= \int_0^x f'(t) dt - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k+1)}(0) \int_0^x \frac{t^k}{k!} dt \\ &= f(x) - f(0) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k+1)}(0) \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \\ J^{n+1} \circ D^{n+1}(f)(x) &= f(x) - \sum_{\ell=0}^n f^{(\ell)}(0) \frac{x^\ell}{\ell!} \quad (\text{avec } \ell = k+1) \end{aligned}$$

- Conclusion : Le principe de récurrence assure alors que la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

$$\boxed{\text{Pour tout } f \text{ dérivable } n \text{ fois et tout } x > 0, J^n \circ D^n(f)(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} .}$$

10-a Pour $\alpha > 0$ et m l'unique entier tel que $m - 1 < \alpha \leq m$, on a

$$D^\alpha \circ J^\alpha = D^m \circ J^{m-\alpha} \circ J^\alpha \underset{\text{question 8-a}}{=} D^m \circ J^m$$

Ainsi

$$\boxed{\forall \alpha > 0 \quad D^\alpha \circ J^\alpha = \text{id.}}$$

10-b Soit $\alpha > 0$. Si α est un entier alors $D^\alpha \mathbb{1} = 0$. On supposera désormais que α n'est pas un entier. Soit m l'unique entier tel que $m - 1 < \alpha < m$, et soit $t > 0$. On a

$$D^\alpha \mathbb{1}(t) = D^m \left(t \mapsto \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{du}{(t-u)^{\alpha+1-m}} \right) (t)$$

Avec le changement de variable $v = t - u$, cela devient

$$D^\alpha \mathbb{1}(t) = D^m \left(t \mapsto \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{dv}{v^{\alpha+1-m}} \right) (t) = D^m(J(\Phi_{m-\alpha}))(t)$$

D'après la question 8-c, $D^\alpha \mathbb{1}(t) = D^m(\Phi_{m-\alpha+1})(t)$

Puis d'après la question 7-a, $D^\alpha \mathbb{1} = \Phi_{1-\alpha}$

Ainsi,

$$D^\alpha \mathbb{1} = \begin{cases} \Phi_{1-\alpha} & \text{si } \alpha \notin \mathbb{N} \\ 0 & \text{si } \alpha \in \mathbb{N}^* \\ \mathbb{1} & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}$$

Comme $\Phi_n = 0$ pour $n \in \mathbb{Z}^-$, on peut réécrire

$$D^\alpha \mathbb{1} = \begin{cases} \Phi_{1-\alpha} & \text{si } \alpha \neq 0 \\ \mathbb{1} & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}$$

Toutefois, rappelons que $\Phi_n = 0$ n'est qu'une convention. En particulier, il n'y a pas de « continuité » dans l'expression ci-dessus.

En particulier,

$$\boxed{D^\alpha \mathbb{1} = 0 \iff \alpha \in \mathbb{N}^*}$$

10-c Soient $\alpha > 0$ et $\gamma > 0$. Si α est un entier naturel, alors la question 7-a permet de conclure. Supposons donc que α ne soit pas un entier et considérons l'entier m tel que $m - 1 < \alpha < m$. Alors pour tout $t > 0$,

$$\begin{aligned} D^\alpha(\Phi_\gamma)(t) &= D^m \circ J^{m-\alpha}(\Phi_\gamma)(t) \\ &= D^m(\Phi_{m-\alpha+\gamma})(t) \end{aligned} \quad (\text{question 8-c})$$

$$D^\alpha(\Phi_\gamma)(t) = \Phi_{\gamma-\alpha}(t) \quad (\text{question 7-a})$$

On obtient donc

$$\boxed{\forall \alpha, \gamma \in \mathbb{R}_+^* \quad D^\alpha \Phi_\gamma = \Phi_{\gamma-\alpha}.$$

10-d Soient $\alpha > 0$ et f d'ordre exponentiel. On note encore m l'unique entier tel que $m - 1 < \alpha \leq m$. On a

$$D^\alpha(f) = 0 \iff D^m \circ J^{m-\alpha}(f) = 0$$

En particulier, $J^{m-\alpha}(f)$ est de dérivée m -ième nulle. Il s'agit donc d'un polynôme de degré au plus $m - 1$. En l'exprimant sous sa forme de Taylor en 0, on obtient

$$\begin{aligned} D^\alpha(f) = 0 &\iff \forall x > 0 \quad J^{m-\alpha}(f)(x) = \sum_{k=0}^{m-1} D^k(J^{m-\alpha}(f))(0) \frac{x^k}{k!} \\ &\iff J^{m-\alpha}(f) = \sum_{k=0}^{m-1} D^k(J^{m-\alpha}(f))(0) \Phi_{k+1} \end{aligned} \quad (\text{question 1-b})$$

Avec le changement d'indice $j = m - k$, on obtient

$$D^\alpha(f) = 0 \iff J^{m-\alpha}(f) = \sum_{j=1}^m D^{m-j}(J^{m-\alpha}(f))(0)\Phi_{m-j+1}$$

Si $m = \alpha$, alors $J^{m-\alpha}(f) = f$ et il s'agit exactement du résultat attendu. Dans le cas contraire, on a $0 < m - \alpha < 1$ et, d'après la question 7-b,

$$\Phi_{m-j+1} = \Phi_{m-\alpha} * \Phi_{\alpha-j+1}$$

La linéarité à droite de $*$ découlant de celle de l'intégrale, on obtient

$$\begin{aligned} D^\alpha(f) = 0 &\iff J^{m-\alpha}(f) = \Phi_{m-\alpha} * \left(\sum_{j=1}^m D^{m-j}(J^{m-\alpha}(f))(0)\Phi_{\alpha-j+1} \right) \\ &\iff J^{m-\alpha}(f) = J^{m-\alpha} \left(\sum_{j=1}^m D^{m-j}(J^{m-\alpha}(f))(0)\Phi_{\alpha-j+1} \right) \\ &\iff J^{m-\alpha} \left(f - \sum_{j=1}^m D^{m-j}(J^{m-\alpha}(f))(0)\Phi_{\alpha-j+1} \right) = 0 \\ D^\alpha(f) = 0 &\iff f = \sum_{j=1}^m D^{m-j}(J^{m-\alpha}(f))(0)\Phi_{\alpha-j+1} \quad (\text{question 8-d}) \end{aligned}$$

Dans tous les cas, on a donc

$$D^\alpha(f) = 0 \iff f = \sum_{j=1}^m D^{m-j}(J^{m-\alpha}(f))(0)\Phi_{\alpha-j+1}$$

En posant $c_j = D^{m-j}(J^{m-\alpha}(f))(0)/\Gamma(\alpha - j + 1)$ pour tout $j \in \llbracket 1; m \rrbracket$, on obtient

$$D^\alpha(f) = 0 \iff \left(\forall x > 0 \quad f(x) = \sum_{j=1}^m c_j x^{\alpha-j} \right)$$

On vient de généraliser le fait que $f^{(m)} = 0$ si et seulement si f est une fonction polynomiale de degré au plus $m - 1$.

11-a Soient $\alpha = \beta = 1/2$ et $f = \Phi_{1/2}$. D'une part, d'après la question 7-a,

$$D^{\alpha+\beta}(f) = D(f) = \Phi_{-1/2}$$

D'autre part, d'après la question 10-c,

$$D^\beta(f) = \Phi_{1/2-1/2} = \Phi_0 = 0$$

D'où

$$D^\alpha \circ D^\beta(f) = 0$$

La question 10-c ne peut s'appliquer deux fois de suite pour conclure à l'égalité des deux fonctions. En effet, il faudrait l'appliquer avec $\gamma = 0$ la deuxième fois, ce qui n'est pas autorisé.

11-b Soient $g = \Phi_{3/2}$, $\alpha = 1/2$ et $\beta = 3/2$. Alors, d'après les questions 10-c et 7-a,

$$D^\beta \circ D^\alpha(g) = D^\beta(\Phi_1) = \Phi_{-1/2} \quad \text{et} \quad D^{\alpha+\beta}(g) = D^2(g) = \Phi_{-1/2}$$

De plus, $D^\beta(g) = \Phi_0 = 0$, puis

$$D^\alpha \circ D^\beta(g) = 0$$

11-c Soient $\gamma \geq 0$ et $[\gamma]$ l'unique entier tel que $[\gamma] - 1 < \gamma \leq [\gamma]$. Alors

$$D^\gamma(f) = D^{[\gamma]} \circ J^{[\gamma]-\gamma}(f)$$

Pour tout $t \in [0; R[$, calculons tout d'abord

$$J^{[\gamma]-\gamma}(f)(t) = \int_0^t \Phi_{[\gamma]-\gamma}(t-u) u^\lambda \eta(u) du = \int_0^t \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \Phi_{k+1}(u) u^\lambda \Phi_{[\gamma]-\gamma}(t-u) du$$

Justifions que l'on peut permuter la série et l'intégrale. Posons, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $u \in [0; t]$,

$$f_k(u) = \alpha_k \Phi_{k+1}(u) u^\lambda \Phi_{[\gamma]-\gamma}(t-u)$$

Chaque fonction f_k est continue et intégrable sur $]0; t[$ car $\lambda > -1$ et $[\gamma] - \gamma - 1 > -1$. De plus, comme $t < R$ et que, en tant que série entière, la série définissant η converge normalement sur tout segment fermé de $[0; R[$, la série $\sum f_k$ converge normalement sur tout segment fermé de $]0; t[$ vers la fonction $u \mapsto u^\lambda \eta(u) \Phi_{[\gamma]-\gamma}(u)$. Elle converge donc simplement vers cette dernière sur l'intervalle $]0; t[$.

On fait bien attention à exclure 0 et t car 0^λ ou $\Phi_{[\gamma]-\gamma}(t-t)$ pourraient ne pas avoir de sens.

La somme d'une série entière étant continue sur son disque ouvert de convergence, par opérations usuelles, la fonction $u \mapsto u^\lambda \eta(u) \Phi_{[\gamma]-\gamma}(u)$ est continue sur cet intervalle. Considérons $t \in [0; R[$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, majorons l'intégrale

$$\int_0^t |f_k(u)| du = \left| \alpha_k \frac{\Gamma(\lambda + k + 1)}{k!} \right| \int_0^t \Phi_{\lambda+k+1}(u) \Phi_{[\gamma]-\gamma}(t-u) du$$

On reconnaît ici un produit de convolution. D'après la question 7-b, on obtient, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \int_0^t |f_k(u)| du &= \left| \alpha_k \frac{\Gamma(\lambda + k + 1)}{k!} \right| \Phi_{[\gamma]-\gamma+\lambda+k+1}(t) \\ &= \left| \alpha_k \frac{\Gamma(\lambda + 1)}{k!} \right| \underbrace{\left(\prod_{i=1}^k \frac{\lambda + i}{[\gamma] - \gamma + \lambda + i} \right)}_{\in [0; 1]} \frac{t^{[\gamma]-\gamma+\lambda}}{\Gamma([\gamma] - \gamma + \lambda + 1)} t^k \\ \int_0^t |f_k(u)| du &\leq \left| \alpha_k \frac{\Gamma(\lambda + 1)}{k!} \right| \Phi_{[\gamma]-\gamma+\lambda+1}(t) t^k \quad (\text{car } [\gamma] - \gamma \geq 0) \end{aligned}$$

Comme $t < R$, la série de terme général $\Gamma(\lambda + 1) \Phi_{[\gamma]-\gamma+\lambda+1}(t) \alpha_k (t^k/k!)$ est absolument convergente. Il s'ensuit que la série

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \int_0^t |f_k(u)| du$$

converge. Le théorème de permutation série-intégrale s'applique donc et on obtient

$$J^{[\gamma]-\gamma}(f)(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^t f_k(u) du$$

Or, $\forall k \in \mathbb{N} \quad \int_0^t f_k(u) du = \alpha_k \frac{\Gamma(\lambda + k + 1)}{k!} \Phi_{[\gamma]-\gamma+\lambda+k+1}(t)$

donc
$$J^{[\gamma]-\gamma}(f)(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \frac{\Gamma(\lambda + k + 1)}{k!} \Phi_{[\gamma]-\gamma+\lambda+k+1}(t)$$

Pour déterminer $D^\gamma(f) = D^{\lceil\gamma\rceil} \circ J^{\lceil\gamma\rceil-\gamma}(f)$, il nous reste donc à dériver $\lceil\gamma\rceil$ fois la série de fonctions précédente. Définissons alors pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$g_k(t) = \alpha_k \frac{\Gamma(\lambda + k + 1)}{k!} \Phi_{\lceil\gamma\rceil-\gamma+\lambda+k+1}(t)$$

Les fonctions g_k sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0; R[$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $j \leq \lceil\gamma\rceil$, d'après la question 7-a,

$$\begin{aligned} g_k^{(j)}(t) &= \alpha_k \frac{\Gamma(\lambda + k + 1)}{k!} \Phi_{\lceil\gamma\rceil-j-\gamma+\lambda+k+1}(t) \\ &= \alpha_k \frac{\Gamma(\lambda + k + 1)}{k! \Gamma(\lceil\gamma\rceil - j - \gamma + \lambda + k + 1)} t^{\lceil\gamma\rceil-j-\gamma+\lambda+k} \\ g_k^{(j)}(t) &= \frac{\alpha_k}{k!} \frac{\Gamma(-j + \lambda + k + 1)}{\Gamma(\lceil\gamma\rceil - j - \gamma + \lambda + k + 1)} \left(\prod_{i=1}^j (-i + \lambda + k + 1) \right) t^{\lceil\gamma\rceil-j-\gamma+\lambda+k} \end{aligned}$$

Pour tout $k \geq \lceil\gamma\rceil + 1$, on a $k \geq j + 1$ et donc

$$1 < \lceil\gamma\rceil - j - \gamma + \lambda + k + 1 \leq \lceil\gamma\rceil - j - \gamma + \lambda + k + 1$$

De plus, pour tous réels x et y tels que $1 \leq x \leq y$, et tout $t > 0$,

$$0 < e^{-tx-1} \leq e^{-ty-1}$$

Par croissance de l'intégrale, pour tous réels x et y tels que $1 \leq x \leq y$,

$$1 = \Gamma(1) \leq \Gamma(x) \leq \Gamma(y)$$

En particulier, $1 \leq \Gamma(-j + \lambda + k + 1) \leq \Gamma(\lceil\gamma\rceil - j - \gamma + \lambda + k + 1)$

D'où, pour tout $k \geq \lceil\gamma\rceil + 1$,

$$|g_k^{(j)}(t)| \leq \frac{|\alpha_k|}{k!} \left| \prod_{i=1}^j (-i + \lambda + k + 1) \right| t^{\lceil\gamma\rceil-j-\gamma+\lambda+k}$$

Or, un polynôme étant équivalent, en l'infini, à son terme de plus haut degré,

$$\prod_{i=1}^j (-i + \lambda + k + 1) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} k^j$$

On veut maintenant obtenir le rayon de convergence de la série entière $\sum k^j \alpha_k t^k / k!$ pour tout $j \in \mathbb{N}$. Soit alors la propriété

$\mathcal{P}(j)$: « Les séries entières $\sum \alpha_k \frac{t^k}{k!}$ et $\sum k^j \alpha_k \frac{t^k}{k!}$ ont même rayon de convergence. »

Montrons-la par récurrence sur j .

- $\mathcal{P}(0)$ énonce que la série $\sum \alpha_k t^k / k!$ a le même rayon de convergence qu'elle-même, ce qui est vrai.
- $\mathcal{P}(j) \implies \mathcal{P}(j+1)$: Soit $j \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(j)$ soit vraie. D'après le cours, les séries entières $\sum k^j \alpha_k t^k / k!$ et $\sum k k^j \alpha_k t^k / k!$ ont le même rayon de convergence. Ainsi $\mathcal{P}(j+1)$ est vraie.
- **Conclusion** : Le principe de récurrence assure que la propriété $\mathcal{P}(j)$ est vraie pour tout $j \in \mathbb{N}$.

Comme $t < R$, on en déduit que chaque série de fonctions $\sum_{k \geq [\gamma]+1} g_k^{(j)}$ converge uniformément sur tout segment de $]0; R[$. Le réel γ étant fixé, il en va donc de même pour la série de fonctions $\sum_{k \geq 0} g_k^{(j)}$. Le théorème de dérivation d'une série de fonctions donne alors

$$D^\gamma(f)(t) = D^{[\gamma]} \circ J^{[\gamma]-\gamma}(f)(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} g_k^{([\gamma])}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \frac{\Gamma(\lambda+k+1)}{k!} \Phi_{-\gamma+\lambda+k+1}(t)$$

$$\text{En particulier, } D^{\alpha+\beta}(f)(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \frac{\Gamma(\lambda+k+1)}{k!} \Phi_{-\alpha-\beta+\lambda+k+1}(t)$$

et pour $\gamma = \beta$,

$$D^\beta(f)(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \frac{\Gamma(\lambda+k+1)}{k!} \Phi_{-\beta+\lambda+k+1}(t) = t^{-\beta+\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\alpha_k}{k!} \frac{\Gamma(\lambda+k+1)}{\Gamma(-\beta+\lambda+k+1)} t^k$$

Comme précédemment, pour $k \geq \beta+1$, on a

$$\left| \frac{\Gamma(\lambda+k+1)}{\Gamma(-\beta+\lambda+k+1)} \right| \leq 1$$

Par comparaison de séries entières, la série ci-dessus a un rayon de convergence supérieur ou égal à R . Comme $-\beta+\lambda > -1$, on peut réappliquer le cas $\gamma = \alpha$ à cette nouvelle fonction et obtenir

$$D^\alpha \circ D^\beta(f)(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k \frac{\Gamma(\lambda+k+1)}{k!} \Phi_{-\alpha-\beta+\lambda+k+1}(t)$$

$$\text{Par suite, } \boxed{\forall \alpha \geq 0 \quad \forall \beta \in [0; \lambda+1[\quad D^\alpha \circ D^\beta(f) = D^{\alpha+\beta}(f)}$$

12-a Supposons $D_*^\alpha(f) = 0$. Alors $J^\alpha \circ D_*^\alpha(f) = 0$, et donc

$$(J^\alpha \circ J^{m-\alpha}) \circ D^m(f) = 0$$

D'après la question 8-a, on a donc $J^m \circ D^m(f) = 0$. La question 9 permet alors de conclure que

$$f(x) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} = 0$$

En particulier,

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est un polynôme de degré au plus } m-1.}$$

On a en réalité une équivalence. En effet, si f est un polynôme de degré au plus $m-1$ alors $D^m(f) = 0$. Il s'ensuit $J^{m-\alpha} \circ D^m(f) = 0$. Ainsi, $D_*^\alpha(f) = 0$ si et seulement si f est un polynôme de degré au plus $m-1$.

12-b Juste avant l'énoncé de la question 10-a, le sujet dispense le candidat de vérifier l'existence de $D^{1-\alpha}(f) = D \circ J^\alpha(f)$. Ici, on pourrait tout de même le vérifier facilement avec le théorème de dérivation des intégrales à paramètre. On l'utilisera directement dans la réponse qui suit.

Soit $0 < \alpha < 1$. On calcule

$$\begin{aligned}
 J \circ J^\alpha \circ D(f) &= J^\alpha \circ J \circ D(f) && \text{(question 8-a)} \\
 &= J^\alpha(f - f(0)) && \text{(question 9)} \\
 &= J^\alpha(f - f(0)\Phi_1) \\
 &= J^\alpha(f) - f(0)J^\alpha(\Phi_1) && \text{(linéarité de } J^\alpha) \\
 J \circ J^\alpha \circ D(f) &= J \circ D \circ J^\alpha(f) - f(0)J^\alpha(\Phi_1)
 \end{aligned}$$

Donc par linéarité de D ,

$$D \circ J \circ J^\alpha \circ D(f) = D \circ J \circ D \circ J^\alpha(f) - f(0)D \circ J^\alpha(\Phi_1)$$

D'après la question 10-a, $D \circ J = \text{id}$ et, par suite,

$$J^\alpha \circ D(f) = D \circ J^\alpha(f) - f(0)D \circ J^\alpha(\Phi_1)$$

Enfin, comme $0 < 1 - \alpha < 1$, on a $D^{1-\alpha} = D \circ J^{1-(1-\alpha)} = D \circ J^\alpha$, d'où

$$J^\alpha \circ D(f) = D \circ J^\alpha(f) - f(0)D^{1-\alpha}(\Phi_1)$$

D'après la question 10-c,

$$J^\alpha \circ D(f) = D \circ J^\alpha(f) - f(0)\Phi_\alpha$$

ou encore

$$D \circ J^\alpha(f) = J^\alpha \circ D(f) + f(0)\Phi_\alpha$$

12-c Soit $\mathcal{P}(k)$ la propriété définie pour $k \in \llbracket 1; m \rrbracket$ par

$$\mathcal{P}(k): D^k \circ J^{m-\alpha}(f) = J^{m-\alpha} \circ D^k(f) + \sum_{j=0}^{k-1} f^{(j)}(0)\Phi_{m-k-\alpha+1+j}$$

Démontrons par récurrence que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout $k \in \llbracket 1; m \rrbracket$.

- $\mathcal{P}(1)$ est vraie car c'est le résultat de la question 12-b appliquée à f et $m - \alpha$.
- $\mathcal{P}(k) \implies \mathcal{P}(k+1)$: Soit $k < m$ tel que $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Alors en appliquant l'hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned}
 D^{k+1} \circ J^{m-\alpha}(f) &= D \left(J^{m-\alpha} \circ D^k(f) + \sum_{j=0}^{k-1} f^{(j)}(0)\Phi_{m-k-\alpha+1+j} \right) \\
 &= D \circ J^{m-\alpha} \circ D^k(f) + \sum_{j=0}^{k-1} f^{(j)}(0)D(\Phi_{m-k-\alpha+1+j})
 \end{aligned}$$

D'après la question 12-b appliquée à $D^k(f)$ et $m - \alpha$,

$$D^{k+1} \circ J^{m-\alpha}(f) = J^{m-\alpha} \circ D^{k+1}(f) + D^k(f)(0)\Phi_{m-\alpha} + \sum_{j=0}^{k-1} f^{(j)}(0)D(\Phi_{m-k-\alpha+1+j})$$

Puis d'après la question 7-a,

$$\begin{aligned}
 D^{k+1} \circ J^{m-\alpha}(f) &= J^{m-\alpha} \circ D^{k+1}(f) + D^k(f)(0)\Phi_{m-\alpha} + \sum_{j=0}^{k-1} f^{(j)}(0)\Phi_{m-k-\alpha+j} \\
 &= J^{m-\alpha} \circ D^{k+1}(f) + \sum_{j=0}^k f^{(j)}(0)\Phi_{m-k-\alpha+j}
 \end{aligned}$$

- Conclusion: Le principe de récurrence assure que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout entier $k \in \llbracket 1; m \rrbracket$.

En particulier, on obtient pour $k = m$

$$D^\alpha(f) = D_*^\alpha(f) + \sum_{j=0}^{m-1} f^{(j)}(0) \Phi_{j-\alpha+1}$$

c'est-à-dire que

$$\forall x \geq 0 \quad D^\alpha(f)(x) = D_*^\alpha(f)(x) + \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0) \frac{x^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}$$

12-d La fonctionnelle D^α étant linéaire, on a

$$D^\alpha \left(f - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0) \Phi_{k+1} \right) = D^\alpha(f) - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0) D^\alpha(\Phi_{k+1})$$

Donc, d'après la question 12-c,

$$D^\alpha \left(f - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0) \Phi_{k+1} \right) = D_*^\alpha(f) + \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0) \Phi_{k-\alpha+1} - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0) D^\alpha \Phi_{k+1}$$

Les deux dernières sommes se simplifient d'après la question 10-c, d'où

$$D^\alpha \left(f - \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(0) \Phi_{k+1} \right) = D_*^\alpha(f)$$

C. DEUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES FRACTIONNAIRES

13-a Par définition, pour tout $t \geq 0$, $J^\alpha(g)(t) = f(t)$. D'après la question 10-a, on obtient après composition par D^α à gauche

$$g = D^\alpha(f)$$

13-b D'après la question 13-a et la définition de D^α , on a pour tout s assez grand,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(g)(s) &= \mathcal{L}(D \circ J^{1-\alpha}(f))(s) & (0 < \alpha < 1) \\ &= s \mathcal{L}(J^{1-\alpha}(f))(s) - J^{1-\alpha}(f)(0) & (\text{question 4-b}) \\ \mathcal{L}(g)(s) &= s s^{\alpha-1} \mathcal{L}(f)(s) - \underbrace{J^{1-\alpha}(f)(0)}_{=0} & (\text{question 8-b}) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\mathcal{L}(g)(s) = s^\alpha \mathcal{L}(f)(s) \text{ pour } s \text{ assez grand.}$$

14-a Par définition, pour $|\theta| < 1$,

$$E_0(\theta) = \sum_{k=0}^{+\infty} \theta^k = \frac{1}{1-\theta}$$

car on reconnaît la série géométrique de raison θ et de premier terme 1. D'après la question 1-b, on obtient pour $\theta \in \mathbb{R}$

$$E_1(\theta) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\theta^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\theta^k}{k!} = e^\theta$$

et enfin
$$E_2(-\theta^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k}}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{\theta^{2k}}{(2k)!} = \cos \theta$$

En conclusion,
$$E_0(\theta) = \frac{1}{1-\theta}, \quad E_1(\theta) = e^\theta \quad \text{et} \quad E_2(-\theta^2) = \cos \theta$$

14-b Soit R_α le rayon de convergence de E_α . Alors, en utilisant la règle de d'Alembert, on a sous réserve d'existence

$$\frac{1}{R_\alpha} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left| \frac{\Gamma(1+\alpha k)}{\Gamma(1+\alpha(k+1))} \right| = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(1+\alpha k)}{\Gamma(1+\alpha(k+1))}$$

avec la convention $R_\alpha = +\infty$ si cette limite est nulle. Si $\alpha = 0$ alors $R_\alpha = 1$. Sinon, d'après l'équation (E₁), toujours sous réserve d'existence,

$$\frac{1}{R_\alpha} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{B(\alpha, 1+\alpha k)}{\Gamma(\alpha)} = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\alpha k} du$$

Définissons pour $k \in \mathbb{N}$ et $u \in [0; 1[$

$$f_k(u) = (1-u)^{\alpha-1} u^{\alpha k}$$

Ces fonctions sont continues. La suite de fonctions $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0; 1[$. De plus, pour $u \in [0; 1[$ et $k \in \mathbb{N}$,

$$|f_k(u)| \leq (1-u)^{\alpha-1}$$

Au changement de variable $v = 1-u$ près, on reconnaît une intégrale de Riemann avec $\alpha-1 > -1$. L'hypothèse de domination du théorème de convergence dominée est donc satisfaite. Enfin, la fonction nulle est continue. Ainsi, le théorème de convergence dominée assure

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-u)^{\alpha-1} u^{\alpha k} du = \int_0^1 0 du = 0$$

Ainsi,

$$R_\alpha = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = 0 \\ +\infty & \text{si } \alpha > 0 \end{cases}$$

En particulier,

Le rayon de convergence de la série entière E_α est strictement positif.

14-c On suppose $\alpha > 0$ car $e_0(t)$ n'est pas défini. En effet, la définition donnerait

$$e_0(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k$$

ce qui n'existe pas au sens usuel de convergence des séries.

On a

$$e_\alpha(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \Phi_{1+\alpha k}(t)$$

On prend $\alpha > 0$. Commençons par montrer que $\mathcal{L}(e_\alpha)(s)$ est bien défini pour $s > 1$. Soit $s > 1$. Par définition, sous réserve d'existence,

$$\mathcal{L}(e_\alpha)(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \Phi_{1+\alpha k}(t) dt$$

On va obtenir l'existence de cette quantité pour $s > 1$ grâce à une permutation série-intégrale. Notons pour $k \in \mathbb{N}$ et $t > 0$

$$g_k(t) = (-1)^k e^{-st} \Phi_{1+\alpha k}(t)$$

Les fonctions g_k sont continues et intégrables sur $]0; +\infty[$. De plus,

$$t \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} g_k(t) = e^{-st} e_\alpha(t)$$

est une fonction continue sur $]0; +\infty[$ car pour $\alpha > 0$, le rayon de convergence de E_α est infini d'après la question 14-b. Enfin,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} |g_k(t)| \, dt &= \int_0^{+\infty} e^{-st} \Phi_{1+\alpha k}(t) \, dt \\ &= \mathcal{L}(\Phi_{1+\alpha k})(s) \\ &= \frac{1}{s^{1+\alpha k}} \quad (\text{question 7-c}) \\ \int_0^{+\infty} |g_k(t)| \, dt &= \frac{1}{s} \left(\frac{1}{s^\alpha} \right)^k \end{aligned}$$

Pour $s > 1$ et $\alpha > 0$, $s^\alpha > 1$, et on reconnaît alors le terme général d'une série géométrique convergente. Ainsi, d'après le théorème de permutation série-intégrale, la quantité $\mathcal{L}(e_\alpha)(s)$ est définie pour tout $s > 1$ et

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(e_\alpha)(s) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} (-1)^k e^{-st} \Phi_{1+\alpha k}(t) \, dt \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \mathcal{L}(\Phi_{1+\alpha k})(s) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{1}{s^{1+\alpha k}} \\ \mathcal{L}(e_\alpha)(s) &= \frac{1}{s} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{s^\alpha} \right)^k \end{aligned}$$

On reconnaît à nouveau une série géométrique convergente. On connaît donc sa somme. Plus précisément,

$$\forall s > 1 \quad \mathcal{L}(e_\alpha)(s) = \frac{1}{s} \frac{s^\alpha}{s^\alpha + 1}$$

ou encore

$$\boxed{\forall s > 1 \quad \mathcal{L}(e_\alpha)(s) = \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha + 1}}$$

14-d Soient $k \in \mathbb{N}$ et s suffisamment grand. Alors,

$$\mathcal{L}(u_k)(s) = \mathcal{L}(J^k e_\alpha)(s)$$

La fonction e_α est d'ordre exponentiel. On peut donc appliquer le résultat de la question 8-b et obtenir $\mathcal{L}(u_k)(s) = s^{-k} \mathcal{L}(e_\alpha)(s)$, puis d'après la question 14-c,

$$\boxed{\mathcal{L}(u_k)(s) = \frac{s^{\alpha-k-1}}{s^\alpha + 1}}$$

15 Soit $\lceil \alpha \rceil$ l'entier tel que $\lceil \alpha \rceil - 1 < \alpha \leq \lceil \alpha \rceil$. Alors, d'après la question 8-a,

$$J^\alpha \circ D_*^\alpha(u) = J^\alpha \circ J^{\lceil \alpha \rceil - \alpha} \circ D^{\lceil \alpha \rceil}(u) = J^{\lceil \alpha \rceil} \circ D^{\lceil \alpha \rceil}(u)$$

Maintenant, d'après la question 9,

$$J^\alpha \circ D_*^\alpha(u) = u - \sum_{k=0}^{\lceil \alpha \rceil - 1} u^{(k)}(0) \Phi_{k+1}$$

Ainsi, en partant de l'équation $D_*^\alpha(u) = -u$, on obtient

$$u - \sum_{k=0}^{\lceil \alpha \rceil - 1} u^{(k)}(0) \Phi_{k+1} = J^\alpha \circ D_*^\alpha(u) = J^\alpha(-u) = -J^\alpha(u)$$

c'est-à-dire pour tout $t \geq 0$

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\lceil \alpha \rceil - 1} c_k \frac{t^k}{k!} - J^\alpha(u)(t) \quad \text{avec} \quad \forall k \in \llbracket 0; \lceil \alpha \rceil - 1 \rrbracket \quad c_k = u^{(k)}(0)$$

16 D'après la question 15, on a

$$u = \sum_{k=0}^{\lceil \alpha \rceil - 1} c_k \Phi_{k+1} - J^\alpha(u)$$

Alors, par linéarité de la transformée de Laplace, pour tout s suffisamment grand,

$$\mathcal{L}(u)(s) = \sum_{k=0}^{\lceil \alpha \rceil - 1} c_k \mathcal{L}(\Phi_{k+1})(s) - \mathcal{L}(J^\alpha(u))(s)$$

$$\text{D'après la question 7-c,} \quad \forall s > k \quad \mathcal{L}(\Phi_{k+1})(s) = \frac{1}{s^{k+1}}$$

et d'après la question 8-b, pour s suffisamment grand,

$$\mathcal{L}(J^\alpha(u))(s) = \frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L}(u)(s)$$

et donc

$$\mathcal{L}(u)(s) = \sum_{k=0}^{\lceil \alpha \rceil - 1} \frac{c_k}{s^{k+1}} - \frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L}(u)(s)$$

puis

$$\mathcal{L}(u)(s) = \frac{s^\alpha}{s^\alpha + 1} \sum_{k=0}^{\lceil \alpha \rceil - 1} \frac{c_k}{s^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\lceil \alpha \rceil - 1} c_k \frac{s^{\alpha-k-1}}{s^\alpha + 1}$$

D'après la question 14-d, pour tout s suffisamment grand,

$$\mathcal{L}(u)(s) = \mathcal{L}\left(\sum_{k=0}^{\lceil \alpha \rceil - 1} c_k u_k\right)(s)$$

La question 5 permet enfin de conclure que

$$u = \sum_{k=0}^{\lceil \alpha \rceil - 1} c_k u_k$$