

Nature et calcul d'intégrales impropres

1 _____ (*) _____

Etudier la convergence des intégrales suivantes :

$$(a) \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t} dt \quad (b) \int_0^{+\infty} \ln \operatorname{th} t dt \quad (c) \int_0^1 \frac{\cos \sqrt{t} - \operatorname{ch} \sqrt{t}}{t^{3/2}} dt \quad (d) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{e^{-t} + t^2 e^t}$$

2 _____ (*) _____ **CCP PC 2013**

Nature de $\int_0^1 |\ln t|^b (1-t)^a dt$ en fonction de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$?

3 _____ (*) _____

(a). A quelle condition sur $\alpha \in \mathbb{R}$ l'intégrale $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^\alpha} dx$ est-elle convergente ?

(b). Calculer $I(3/2)$, en admettant (ou en démontrant) que $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

4 _____ (*) _____

Justifier la convergence et calculer la valeur de $\int_0^{\pi/2} \cos x \ln(\tan x) dx$.

5 _____ (*) _____

Justifier la convergence et calculer la valeur de $\int_1^2 \frac{t \ln t}{(t^2-1)^{3/2}} dt$.

6 _____ (*) _____

Calculer $\int_0^1 \frac{dx}{2 + [1/x]}$.

7 _____ (**) _____

(a). Discuter suivant la valeur du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergence de l'intégrale $I(\alpha) = \int_0^{\pi/2} (\tan x)^\alpha dx$.

(b). Etablir une relation entre $I(\alpha)$ et $I(-\alpha)$.

(c). A l'aide du changement de variable $u = \sqrt{\tan x}$, et de la valeur de l'intégrale donnée en 3.(b), calculer $I(1/2)$.

(d). Montrer que $\frac{\pi}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\tan(k\pi/2n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} I(1/2)$.

8 _____ (**) _____ **Mines PC 2013**

Nature et calcul de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{4+t^2}}$?

9 _____ (**) _____ **X PC 2013**

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue, intégrable et dérivable en 0.

(a). Montrer que $x \mapsto f(x)/x$ est intégrable sur $[1; +\infty[$.

(b). Justifier l'existence et donner la valeur en fonction de $\alpha, \beta > 0$ de $\int_{\mathbb{R}^+} \frac{f(\beta t) - f(\alpha t)}{t} dt$.

(c). Calculer $\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} dt$.

10 _____ (***) _____

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + 2\sqrt{u_n}\sqrt{1+u_n}$

Montrer que $\int_{u_n}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x}} = 2 \int_{u_{n+1}}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x}}$ et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4^{-n} u_n$.

Intégrabilité, semi-convergence

11 _____ (**) _____

L'application $t \mapsto \cos^2 t$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}^+$? Même question pour $t \mapsto \frac{\cos^2 t}{t}$ sur $[1; +\infty[$.

12 _____ (*) _____

Etudier l'intégrabilité de $x \mapsto 1 - \operatorname{th}^\alpha x$ sur $]0; +\infty[$ en fonction du réel α .

13 _____ (**) _____

Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x \sin(x^3) dx$ est convergente mais pas absolument convergente.

14 _____ (***) _____

Soit f continue et intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et $\alpha > 0$. On note

$$g : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto f\left(\left|t - \frac{\alpha}{t}\right|\right)$$

Montrer que g est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et que $\int_0^{+\infty} g(t) dt = \int_0^{+\infty} f(t) dt$.

15 _____ (**) _____

Déterminer pour tout $\lambda > 0$ la valeur de $\int_0^\pi \frac{dx}{1 + \lambda \cos^2 x}$ et en déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^3 \cos^2 x}$ converge.

16 _____ (***) _____ **X PC 2013**

Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ de $I = [1; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $(f')^2$ est intégrable sur I . Montrer que $t \mapsto f(t)^2/t^2$ est intégrable sur I et déterminer la limite de $t \mapsto f(t)^2/t$ en $+\infty$.

Fonctions définies par une intégrale

17 _____ (**) _____

Posons
$$f(x) = \int_0^{\pi/2} (\sin t)^x dt \quad \text{et} \quad \forall x > 0, \quad g(x) = xf(x)f(x-1)$$

- Déterminer le domaine de définition de f .
- Montrer que g est 1-périodique.
- Montrer que g admet une limite en $+\infty$. En déduire la valeur de $g(x)$ pour tout $x > 0$.
- Etablir l'équivalent $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$.

18 _____ (**) _____

Donner le domaine de définition, puis étudier la continuité et la dérivabilité de $f : x \mapsto \int_0^x \sin(1/t) dt$.

19 _____ (**) _____

Soit f définie par
$$f(x) = e^{x^2} \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$$

Justifier que f est définie pour tout réel x , puis donner un développement asymptotique à tout ordre en $+\infty$ de f .

20 _____ (**) _____

Soit φ définie par
$$\varphi(x) = \int_x^{x^4} \frac{\arccos t}{\arcsin t} dt$$

- Donner le domaine de définition de φ .
- Déterminer un équivalent simple de $\varphi(x)$ en 0.

21

(**)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et 1-périodique.

(a). Montrer que pour tout $\lambda > 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t) dt$ converge.

(b). Déterminer $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(t) dt$.

Indications

- 1** (a) Utiliser des arguments de comparaison par $o(\cdot)$ et de prolongement par continuité.
 (b) Utiliser les comparaisons par équivalent en 0 et $+\infty$ à l'aide du développement limité de $\tanh$ en ces bornes.
 (c) Utiliser des comparaisons par équivalent en 0.
 (d) Utiliser des comparaisons par $o(\cdot)$ en $+\infty$ et $-\infty$.
- 3** Pour calculer $I(3/2)$, effectuer une intégration par parties puis un changement de variable.
- 4** Faire une intégration par parties sur un segment.
- 5** Faire une intégration par parties sur un segment puis un changement de variable.
- 6** Calculer $\int_{1/n}^1 \frac{dx}{2 + \lfloor 1/x \rfloor}$ en utilisant Chasles et un découpage judicieux de l'intégrale.
- 7** (b) Utiliser un changement de variable.
 (d) Utiliser la croissance de $x \mapsto \sqrt{\tan x}$ pour encadrer $\sqrt{\tan(k/n)}$ entre 2 intégrales.
- 8** Pour le calcul, poser $t = 2\sinh u$.
- 9** (b) Pour déterminer la valeur de l'intégrale, intégrer sur un segment pour séparer les intégrales et faire des changements de variables.
 (c) Effectuer un changement de variable pour se ramener au cas précédent.
- 10** Remarquer que $f : x \mapsto 2x + 2\sqrt{x}\sqrt{1+x}$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même.
- 11** Utiliser une primitive de $t \mapsto \cos(t)^2$. Pour la seconde fonction, utiliser une comparaison série-intégrale.
- 12** En $+\infty$, chercher un développement asymptotique de $\tanh$.
- 13** Poser $I_n = \int_{(n\pi)^{1/3}}^{((n+1)\pi)^{1/3}} |x \sin(x^3)| dx$ et justifier à l'aide d'une minoration que $\sum_{n \geq 0} I_n$ diverge.
- 14** Etudier l'intégrabilité de g sur $]0; \sqrt{a}]$ et sur $[\sqrt{a}; +\infty[$ à l'aide d'un changement de variable.
- 15** Pour calculer $I(\lambda)$, faire un changement de variable. Pour la convergence, utiliser la comparaison série-intégrale.
- 16** On pourra effectuer une intégration par parties de $\int_1^x \frac{f(t)^2}{t^2} dt$ puis utiliser Cauchy-Schwarz.
- 17** (a) Effectuer une intégration par parties sur la quantité $f(x+1)$ pour $x > 0$.
 (b) En utilisant la décroissance de f , donner un encadrement de $g(x)$ impliquant $g(\lfloor x \rfloor)$ et $g(\lfloor x \rfloor + 1)$.
 En déduire que g est constante.
 (c) Utiliser un encadrement de $f(x)$ impliquant g .
- 18** Pour l'étude en 0, on pourra utiliser une intégration par parties. Pour l'existence en $x \neq 0$, utiliser un changement de variable ou un théorème de comparaison.
- 19** Pour le développement asymptotique, faire des intégrations par parties successives.
- 20** Pour le (b), faire un développement limité généralisé de $\arccos(t)/\arcsin(t)$ en 0.
- 21** (a) Justifier que f est bornée sur $\mathbb{R}_+$.
 (b) Utiliser la 1-périodicité de f et le changement de variable $u = t + 1$.