Mathématiques 2

PSI

2022

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures Calculatrice autorisée

Objectif

Ce problème propose d'étudier quelques propriétés d'un *opérateur intégral* U défini sur un espace préhilbertien réel E. Cet espace et son produit scalaire sont introduits dans la partie II et l'opérateur U est étudié dans la partie III. Dans la partie IV, on s'intéresse à l'étude d'une famille d'équations différentielles à un paramètre pour lesquelles on recherche des solutions développables en séries entières. Enfin, la partie V fait le lien entre les vecteurs propres de l'endomorphisme U et les solutions des équations différentielles trouvées dans de la partie IV.

Liens entre les différentes parties

— Les parties I et II sont très largement indépendantes à l'exception de la définition de la fonction k_x.

— La partie III utilise les résultats de la partie II ainsi que la condition d'appartenance à E établie dans la partie I.

— La partie IV fait ponctuellement appel à l'espace E défini et étudié dans les parties I et II. Elle est indépendante de la partie III.

— La partie V utilise les résultats des parties III et IV ainsi que le résultat de la question 3.

Notations

On note E l'ensemble des fonctions f continues de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ telles que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f^2(t)\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on note p_α la fonction $\left|\begin{array}{rcl}\mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}\\ t & \mapsto & t^\alpha\end{array}\right.$.

I Préliminaires : étude de quelques éléments de E

I.A – Des fonctions de E utiles pour la suite

Q 1. Montrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, p_α appartient à E.

Q 2. Soit P une fonction polynomiale non identiquement nulle à coefficients réels. Montrer que la restriction de P à $\mathbb{R}_+^*$ appartient à E si et seulement si $P(0) = 0$.

Q 3. Soient a et b deux nombres réels. Montrer que la fonction $\left|\begin{array}{rcl}\mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}\\ t & \mapsto & a\mathrm{e}^t + b\end{array}\right.$ appartient à E si et seulement si $a = b = 0$.

Q 4. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $\left|\begin{array}{rcl}\mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R}\\ t & \mapsto & (\mathrm{e}^t - 1)^2\,\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\end{array}\right.$ est intégrable sur $]0, x]$.

Q 5. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on note $k_x(t) = \mathrm{e}^{\min(x,t)} - 1$ où $\min(x,t)$ désigne le plus petit des réels x et t. Représenter graphiquement la fonction k_x. Montrer que k_x appartient à E.

I.B – Une condition suffisante d'appartenance à E

Dans cette sous-partie, on suppose que f est une fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0,\\ \exists C > 0\ ;\ \forall x > 0, \quad |f'(x)| \leqslant C\dfrac{\mathrm{e}^{x/2}}{\sqrt{x}}.\end{cases}$$

Q 6. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $\Phi(x) = \dfrac{4\sqrt{x}\mathrm{e}^{x/2}}{1+x} - \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{e}^{t/2}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$. Montrer que Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, que $\lim\limits_{x\to 0}\Phi(x) = 0$ et que, pour tout $x > 0$, $\Phi'(x) \geqslant 0$. En déduire que $\Phi(x) \geqslant 0$ pour tout $x > 0$.

Q 7. Montrer que, pour tout $x > 0$, $|f(x)| \leqslant 4C\dfrac{\sqrt{x}\mathrm{e}^{x/2}}{1+x}$.

Q 8. En déduire que $f \in E$.

II Structure préhilbertienne de E

Q 9. Montrer que, si f et g sont deux fonctions de E, alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\,\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

Q 10. En déduire que E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Pour toutes fonctions $f \in E$ et $g \in E$, on pose, $\langle f \mid g\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

Q 11. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.

La norme $\|\cdot\|$ associée à ce produit scalaire est donc définie pour toute fonction $f \in E$ par

$$\|f\| = \left(\int_0^{+\infty} f^2(t)\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}.$$

Q 12. Montrer que $\lim\limits_{x\to 0}\|k_x\| = 0$. On rappelle que, pour tout $x > 0$, $k_x(t) = \mathrm{e}^{\min(x,t)} - 1$.

Q 13. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = k!$.

Q 14. On rappelle que les fonctions p_α ont été définies dans les notations en tête de sujet. La famille $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle une famille orthogonale de E ?

III Un opérateur sur E

À chaque fonction $f \in E$, on associe la fonction $U(f)$ définie pour tout $x > 0$ par

$$U(f)(x) = \langle k_x \mid f\rangle = \int_0^{+\infty} (\mathrm{e}^{\min(x,t)} - 1)f(t)\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

III.A –

Q 15. À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que pour toute fonction $f \in E$,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} U(f)(x) = 0.$$

Q 16. Montrer que pour toute fonction $f \in E$ et pour tout $x > 0$,

$$U(f)(x) = \int_0^x (1 - \mathrm{e}^{-t})\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t + (\mathrm{e}^x - 1)\int_x^{+\infty} f(t)\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Q 17. Soit $f \in E$. Montrer que $U(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie, pour tout $x > 0$,

$$\big(U(f)\big)'(x) = \mathrm{e}^x\int_x^{+\infty} f(t)\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Dans la suite, pour alléger les notations, la dérivée de la fonction $U(f)$ est notée $U(f)'$.

Q 18. Soit $f \in E$. Montrer que $U(f)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que la fonction $U(f)$ est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle

$$y'' - y' = -\frac{f(x)}{x}. \tag{III.1}$$

Q 19. Montrer que pour tout $f \in E$ et pour tout $x > 0$,

$$|U(f)'(x)| \leqslant \mathrm{e}^x\|f\|\left(\int_x^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t\right)^{1/2} \leqslant \|f\|\frac{\mathrm{e}^{x/2}}{\sqrt{x}}.$$

Q 20. Déduire de ce qui précède que U est un endomorphisme de E et que, pour tout $f \in E$ et tout $x > 0$,

$$|U(f)(x)| \leqslant 4\|f\| \frac{\sqrt{x}\,\mathrm{e}^{x/2}}{1+x}$$

Q 21. En déduire que

$$\|U(f)\| \leqslant 4\|f\|.$$

Q 22. Montrer que U est injectif.

Q 23. L'endomorphisme U est-il surjectif ?

III.B – On fixe deux fonctions f et g de E. Pour $x > 0$, on pose

$$F(x) = -U(f)'(x)\mathrm{e}^{-x}.$$

Q 24. Vérifier que F est une primitive de $x \mapsto f(x)\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}$ sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$.

Q 25. Montrer que pour tout $x > 0$, $|F(x)U(g)(x)| \leqslant \dfrac{4\|f\|\|g\|}{1+x}$.

Q 26. Montrer que pour tout $x \in]0,1]$, $|F(x)| \leqslant \|f\|\big(\mathrm{e}^{-1} - \ln(x)\big)^{1/2}$.
On pourra utiliser la question 19.

Q 27. Montrer l'existence et calculer les valeurs des limites en 0 et en $+\infty$ de la fonction $t \mapsto F(t)U(g)(t)$.

Q 28. Montrer que $\langle f \mid U(g)\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} U(f)'(t)U(g)'(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Q 29. En déduire que $\langle f \mid U(g)\rangle = \langle U(f) \mid g\rangle$.