

1 _____ (*) _____ **X PC 2014**

Déterminer le nombre de diviseurs dans $\mathbb{N}^*$ de 1000000.

L'entier 1000000 admet la décomposition en facteurs premiers $1000000 = 2^6 \cdot 5^6$. Dès lors, l'ensemble de ses diviseurs est

$$\{2^i \cdot 5^j, i, j \in [0; 6]\}$$

En particulier,

L'entier 1000000 admet $7 \cdot 7 = 49$ diviseurs.

2 _____ (**) _____

Soient n et m deux entiers. Déterminer successivement :

- le nombre d'applications strictement croissantes de $[1; n]$ dans $[1; m]$
- le nombre d'applications croissantes de $[1; n]$ dans $[1; m]$
- le nombre de solutions dans $(\mathbb{N}^*)^n$ de l'équation $u_1 + u_2 + \dots + u_n \leq m$
- le nombre de solutions dans $\mathbb{N}^n$ de l'équation $u_1 + u_2 + \dots + u_n \leq m$
- le nombre de solutions dans $(\mathbb{N}^*)^n$ de l'équation $u_1 + u_2 + \dots + u_n = m$
- le nombre de solutions dans $\mathbb{N}^n$ de l'équation $u_1 + u_2 + \dots + u_n = m$

Dans tout l'exercice, on notera

- $\mathcal{E}_{n,m}$ (resp. $\mathcal{E}_{n,m}^*$) l'ensemble des applications croissantes (resp. strictement croissante) de $[1; n]$ dans $[1; m]$.
- $\mathcal{S}_{n,m}$ (resp. $\mathcal{S}_{n,m}^*$) l'ensemble des solutions de l'équation $u_1 + \dots + u_n = m$ d'inconnues $(u_1, \dots, u_n)$ appartenant à $\mathbb{N}^n$ (resp. $(\mathbb{N}^*)^n$).
- $\mathcal{I}_{n,m}$ (resp. $\mathcal{I}_{n,m}^*$) l'ensemble des solutions de l'inéquation $u_1 + \dots + u_n \leq m$ d'inconnues $(u_1, \dots, u_n)$ appartenant à $\mathbb{N}^n$ (resp. $(\mathbb{N}^*)^n$).

On détermine les cardinaux de ces six ensembles successivement.

- Soit $\mathcal{P}_n([1; m])$ l'ensemble des parties à n éléments de $[1; m]$. A toute fonction f de $\mathcal{E}_{n,m}^*$, on peut associer l'ensemble $X = \{f(1), \dots, f(n)\} \in \mathcal{P}_n([1; m])$ de ses valeurs. Notons que cette correspondance est bijective. Si X est une partie quelconque à n éléments de $[1; m]$, on ordonne ses éléments en notant $X = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ et on définit une fonction f strictement croissante qui à $i \in [1; n]$ associe α_i . Alors, les applications $X \mapsto f$ et $f \mapsto X$ sont réciproques l'une de l'autre. Ainsi, le cardinal de $\mathcal{E}_{n,m}^*$ est égal à celui de $\mathcal{P}_n([1; n])$ soit

$$\text{card}(\mathcal{E}_{n,m}^*) = \binom{m}{n}$$

- Soit f croissante de $[1; n]$ dans $[1; m]$. On définit alors

$$\begin{aligned} g_f : [1; n] &\longrightarrow [1; m+n-1] \\ i &\longmapsto f(i) + i - 1 \end{aligned}$$

L'application g_f est alors strictement croissante puisque f étant croissante, pour tout $i \in [1; n]$,

$$g_f(i+1) - g_f(i) = f(i+1) + i - (f(i) + i - 1) = f(i+1) - f(i) + 1 \geq 1$$

Notons que $g : f \mapsto g_f$ est bijective de $\mathcal{E}_{n,m}$ dans $\mathcal{E}_{n,m+n-1}^*$. En effet, sa réciproque est donnée par $g \mapsto f_g$ avec pour tout $i \in [1; n]$,

$$f_g(i) = g(i) - i + 1$$

Avec cette définition, on a $f_g(0) = g(0) \geq 1$ et $f_g(n) = g(n) - n + 1 \leq m$. On vérifie comme pour g_f que f_g est croissante (au sens large). Ainsi définie, on a clairement $g \mapsto f_g$ et $f \mapsto g_f$ réciproques l'une de l'autre. Cette bijection assure que $\mathcal{E}_{n,m}$ et $\mathcal{E}_{n,m+n-1}^*$ ont même cardinal. D'après le (a),

$$\text{card}(\mathcal{E}_{n,m}) = \binom{m+n-1}{n}$$

Remarque : A partir de maintenant, nous nous contentons de donner les définitions des bijections permettant de déterminer les cardinaux des ensembles à partir de ceux déjà trouvés. Nous laissons le soin au lecteur de vérifier que les applications sont bien définies et bijectives.

(c) Pour tout élément $U = (u_1, \dots, u_n)$ de $\mathcal{I}_{n,m}^*$, on définit un élément f de $\mathcal{E}_{n,m}^*$ par

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad f(i) = \sum_{k=1}^i u_k$$

On vérifie facilement que cette application $U \mapsto f$ est bijective. Par conséquent,

$$\text{card}(\mathcal{I}_{n,m}^*) = \binom{m}{n}$$

(d) Pour tout élément $U = (u_1, \dots, u_n)$ de $\mathcal{I}_{n,m}$, on définit cette fois un élément f de $\mathcal{E}_{n,m+1}$ par

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad f(i) = 1 + \sum_{k=1}^i u_k$$

On vérifie facilement que cette application $U \mapsto f$ est bijective. Par conséquent,

$$\text{card}(\mathcal{I}_{n,m}) = \binom{m+n}{n}$$

(e) On peut trouver le résultat par deux méthodes distinctes :

• **Méthode 1 :**

Il suffit de remarquer que

$$S_{n,m}^* = I_{n,m}^* \setminus I_{n,m-1}$$

En passant aux cardinaux, il vient

$$\text{Card}(S_{n,m}^*) = \binom{m}{n} - \binom{m-1}{n}$$

soit par la formule du triangle de Pascal,

$$\text{card}(S_{n,m}^*) = \binom{m-1}{n-1}$$

• **Méthode 2 :** A tout élément $(u_1, \dots, u_n)$ de $S_{n,m}^*$, on peut associer l'élément $(u_1, \dots, u_{n-1})$ qui appartient à $I_{n,m-1}^*$. L'application ainsi définie est bijective entre les deux ensembles, donc les cardinaux sont égaux. Ainsi, il vient à nouveau

$$\text{card}(S_{n,m}^*) = \binom{m-1}{n-1}$$

(f) Il n'y a qu'à reprendre le raisonnement de la question précédente. Par la méthode 2 par exemple, on obtient une bijection entre $S_{n,m}$ et $I_{n-1,m}$ et donc

$$\text{card}(S_{n,m}) = \binom{m+n-1}{n-1}$$

3 _____ (**) _____

- (a). Montrer que l'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$ est dénombrable.
 (b). Montrer que l'ensemble des bijections de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ n'est pas dénombrable.

(a). Il suffit de remarquer que l'ensemble E des parties finies de $\mathbb{N}$ coïncide avec

$$F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}(\llbracket 0; n \rrbracket)$$

En effet,

- Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, tout partie de $\llbracket 0; n \rrbracket$ est une partie finie de $\mathbb{N}$; ainsi F est inclus dans E .
- Si X est un élément de E , donc une partie finie de $\mathbb{N}$, il admet un plus grand élément m , et alors, X est une partie de $\llbracket 0; m \rrbracket$ par définition de m . Ainsi, X est dans $\mathcal{P}(\llbracket 0; m \rrbracket)$ donc dans F .

Notons maintenant que pour tout entier n , $\mathcal{P}(\llbracket 0; n \rrbracket)$ est un ensemble fini (de cardinal 2^{n+1}). Ainsi, E est une réunion dénombrable d'ensembles finis, donc un ensemble dénombrable.

L'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

- (b). On rappelle que l'ensemble des bijections d'un ensemble E est noté $\sigma(E)$. On sait que $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ n'est pas dénombrable. Utilisons ce résultat pour construire une partie de $\sigma(\mathbb{N})$ non dénombrable, ce qui suffira pour conclure. A toute suite $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, on associe la bijection σ_u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie de la manière suivante :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad (\sigma_u(2k), \sigma_u(2k+1)) = \begin{cases} (2k, 2k+1) & \text{si } u_k = 0 \\ (2k+1, 2k) & \text{si } u_k = 1 \end{cases}$$

Autrement dit, quel que soit l'entier k , la permutation σ_u permute les entiers $2k$ et $2k+1$ si u_k vaut 0 et les laisse fixe sinon. Il est clair que l'application $u \mapsto \sigma_u$ est injective et induit une bijection entre $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ et son image par u . Cette dernière est donc une partie non dénombrable de $\sigma(\mathbb{N})$. Puisque $\sigma(\mathbb{N})$ contient un sous-ensemble non dénombrable, il est non dénombrable.

L'ensemble des bijections de $\mathbb{N}$ est un ensemble non dénombrable.

4

(**)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application croissante. Montrer que l'ensemble des réels en lequel f n'est pas continue est au plus dénombrable.

Soit x un point en lequel f n'est pas continue. Puisque f est croissante, elle admet une limite à gauche et une limite à droite en x . De plus,

$$\lim_{x^-} f \leq f(x) \leq \lim_{x^+} f$$

et l'une des deux égalités est stricte au moins sans quoi f serait continue en x . L'intervalle $\left] \lim_{x^-} f; \lim_{x^+} f \right[$ est donc un intervalle non réduit à un point de $\mathbb{R}$, qui contient ainsi au moins un rationnel que l'on note r_x .

Notons que l'application $x \mapsto r_x$ est injective. En effet, si y est un autre point de discontinuité de f , on peut sans perdre de généralité supposer $x < y$ et alors

$$\lim_{x^-} f \leq f(x) \leq \lim_{x^+} f \leq \lim_{y^-} f \leq f(y) \leq \lim_{y^+} f$$

et en particulier,

$$\left] \lim_{x^-} f; \lim_{x^+} f \right[\cap \left] \lim_{y^-} f; \lim_{y^+} f \right[= \emptyset \quad \text{d'où} \quad r_x \neq r_y$$

Puisque $x \mapsto r_x$ est injective, elle induit une bijection entre les points de discontinuité de f et un sous-ensemble de $\mathbb{Q}$. Mais $\mathbb{Q}$ étant dénombrable, il vient que

L'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.

5

(***)

Soit E et F deux ensembles. On suppose que E (resp. F) est de cardinal inférieur ou égal à celui de F (resp. E), c'est à dire qu'il existe une injection f de E dans F et une injection g de F dans E . On veut prouver que E et F ont même cardinal, c'est-à-dire qu'il existe alors une bijection de E dans F (**théorème de Cantor-Bernstein**).

Lorsqu'un élément $y \in F$ a un antécédent par f , alors cet antécédent est unique puisque f est injective. On le note alors $f^{-1}(y)$. De même, un antécédent de $x \in E$ par g s'il existe est noté $g^{-1}(x)$. On considère pour chaque $x \in E$ la suite

$$(x, \quad g^{-1}(x), \quad f^{-1}(g^{-1}(x)), \quad g^{-1}(f^{-1}(g^{-1}(x))), \quad \text{etc} \dots)$$

Cette suite peut être finie ou infinie (elle s'arrête lorsque l'on tombe sur un élément qui n'a pas d'antécédent par f ou g). Son dernier élément peut être dans E ou dans F . Soit maintenant A le sous ensemble de E des éléments pour lesquels la suite est finie et dont le dernier élément est dans E .

- (a). Montrer que si $x \notin A$, alors $g^{-1}(x)$ existe.
 (b). Montrer que la fonction $h : E \rightarrow F$ définie par

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ g^{-1}(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

est une bijection de E dans F .

- (a). Cette première question sert essentiellement à justifier que h est bien définie. Si $g^{-1}(x)$ n'existe pas, alors la suite finit dès le premier élément qui est dans E donc $x \in A$. Par contraposée,

Si $x \notin A$, $g^{-1}(x)$ est bien défini.

(b). Montrons maintenant que h est bien bijective. Il faut montrer qu'elle est surjective (1) et injective (2).

(1) Soit $y \in F$. Notons $x = g(y)$. On distingue deux cas :

- si $x \in A$, la suite $(x, g^{-1}(x) = y, \dots)$ est finie et son dernier élément est dans E . En particulier, $y \in F$ n'est pas le dernier élément ce qui prouve que $f^{-1}(y)$ est bien défini. Notons $z \in E$ cet élément. Alors, la suite $(z, g^{-1}(z), \dots)$ est la suite $(x, g^{-1}(x) = y, \dots)$ privée de ses deux premiers éléments donc elle est finie et son dernier élément est dans E (et peut très bien être z au passage). Par définition, $h(z) = f(z) = y$. Donc y a un antécédent.
- Si $x \notin A$, alors c'est plus simple : par définition, $h(x) = g^{-1}(x) = y$ donc y a bien un antécédent.

Finalement, tout élément a un antécédent donc h est surjective.

(2) Pour prouver l'injectivité, prenons $x, y \in E$ tels que $h(x) = h(y)$ et distinguons trois cas.

- si $x \in A$ et $y \in A$, alors $h(x) = f(x)$ et $h(y) = f(y)$. On a donc $f(x) = f(y)$ d'où par injectivité de f , $x = y$.
- si $x \notin A$ et $y \notin A$, alors $h(x) = g^{-1}(x)$ et $h(y) = g^{-1}(y)$. En composant par g , on a immédiatement $x = y$.
- supposons $x \in A$ et $y \notin A$ (l'autre cas est similaire). Considérons la suite $(y, g^{-1}(y), f^{-1}(g^{-1}(y)), \dots)$. On sait que $g^{-1}(y)$ existe et de plus, $h(x) = h(y)$ donc $f(x) = g^{-1}(y)$. Cela prouve que le troisième élément de la suite est en réalité x .

On arrive alors à une absurdité car x est dans A donc la suite $(x, g^{-1}(x), \dots)$ est finie avec un dernier élément dans E , ce qui prouve que $(y, g^{-1}(y), x, g^{-1}(x), \dots)$ se finit également avec un dernier élément dans E et contredit l'hypothèse $y \notin A$. Ce dernier cas est donc impossible.

Finalement, on a prouvé que $h(x) = h(y)$ implique $x = y$ donc h est injective.

On a donc bien prouvé que

L'application h est bijective.

6 _____ (*) _____

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé.

- Soient A et B deux évènements indépendants avec $A \subset B$. Montrer que $P(A) = 0$ ou $P(B) = 1$.
- Soit A un évènement indépendant de lui-même. Montrer que $P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$.
- Montrer que si $P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$, alors A est indépendant de tout évènement. Etudier la réciproque.

- Puisque A est inclus dans B , on a $A \cap B = A$ et donc $P(A \cap B) = P(A)$. Mais puisque A et B sont indépendants,

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) \quad \text{d'où} \quad P(A) = P(A) \cdot P(B) \quad \text{soit} \quad P(A)(1 - P(B)) = 0$$

et finalement

$$P(A) = 0 \text{ ou } P(B) = 1$$

- Si A est indépendant de lui-même, alors, $P(A \cap A) = P(A)^2$ soit $P(A) = P(A)^2$ et nécessairement

$$P(A) = 0 \text{ ou } P(A) = 1$$

- Soit X un évènement quelconque. On suppose que $P(A) = 0$. Alors, $A \cap X \subset A$ donc $P(A \cap X) \leq P(A)$. Puisque $P(A)$ est nul, il vient

$$P(A \cap X) = 0 = P(A) \cdot P(X)$$

Supposons maintenant que $P(A) = 1$. Notons B le complémentaire de A . Alors, $P(B) = 0$ et ainsi, B est indépendant de X . On en déduit aussitôt que son complémentaire A est également indépendant de X . Finalement, dans les deux cas,

Lorsque $P(A) \in \{0, 1\}$, A est indépendant de tout évènement.

Réciproquement, si A est indépendant de tout évènement, alors il est indépendant de lui-même notamment. La question (b) assure qu'alors $P(A) \in \{0, 1\}$.

Réciproquement, toute partie A indépendante de tout évènement est de probabilité 0 ou 1.

7 _____ (*) _____

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'évènements d'un espace probabilisable. $(\Omega, \mathcal{T})$. On définit la limite inférieure B et la limite supérieure C de la suite par

$$B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m=n}^{+\infty} A_m \quad \text{et} \quad C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m=n}^{+\infty} A_m$$

- (a). Décrire B et C en langage probabiliste.
 (b). Montrer que ce sont des événements et que B est inclus dans C .

- (a). Soit $\omega \in \Omega$. On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned}\omega \in B &\iff \exists n \in \mathbb{N}, \quad \omega \in \bigcap_{m=n}^{+\infty} A_m \\ &\iff \exists n \in \mathbb{N}, \quad \forall m \geq n, \quad \omega \in A_m\end{aligned}$$

Ainsi, $\omega \in B$ si et seulement si il appartient à tous les $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à partir d'un certain rang, soit encore s'il appartient à tous les $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sauf éventuellement à un nombre fini.

De la même manière,

$$\begin{aligned}\omega \in C &\iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad \omega \in \bigcup_{m=n}^{+\infty} A_m \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists m \geq n, \quad \omega \in A_m\end{aligned}$$

La négation de cette équivalence s'écrit

$$\omega \notin C \iff \exists n \in \mathbb{N}, \quad \forall m \geq n, \quad \omega \notin A_m$$

et par suite, $\omega \notin C$ si et seulement si ω n'appartient à aucun ensemble A_n à partir d'un certain rang, soit s'il appartient seulement à un nombre fini de ces ensembles. On déduit que $\omega \in \Omega$ si et seulement si il appartient à une infinité des $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Pour conclure,

L'évènement B se traduit par « tous les événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont réalisés, sauf un nombre fini d'entre eux » tandis que l'évènement C se traduit par « une infinité des $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont réalisés ».

- (b). Soit $n \in \mathbb{N}$. L'élément

$$B_n = \bigcap_{m \geq n} A_m$$

est un événement car intersection dénombrable d'éléments de $\mathcal{T}$. Il est donc de même de B , puisque c'est l'union dénombrable de ces ensembles. On justifie de même que C est un événement en introduisant

$$C_n = \bigcup_{m \geq n} A_m$$

L'inclusion $B \subset C$ se déduit immédiatement de la question (a).

8 _____ (**) _____

Soit Ω un ensemble infini et non dénombrable.

- (a). On note $\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{P}(\Omega), A \text{ ou } \bar{A} \text{ est au plus dénombrable}\}$. Montrer que $\mathcal{T}$ est une tribu sur Ω .
 (b). On note $\mathcal{U} = \{A \in \mathcal{P}(\Omega), A \text{ ou } \bar{A} \text{ est fini}\}$. Montrer que $\mathcal{U}$ n'est pas une tribu sur Ω .
 (c). Montrer que la fonction $P : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall A \in \mathcal{T}, \quad P(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ est au plus dénombrable} \\ 1 & \text{si } \bar{A} \text{ est au plus dénombrable} \end{cases}$$

définit une probabilité sur $\mathcal{T}$. On justifiera que P est bien définie.

- (a). Il est clair que $\mathcal{T}$ contient l'ensemble vide (qui est de cardinal fini nul), et qu'il est stable par passage au complémentaire par définition. Reste à montrer la σ -additivité. Soit donc $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$. Montrons que l'union dénombrable de ces parties appartient à $\mathcal{T}$. On distingue pour cela deux cas :

- Si pour tout entier n , A_n est au plus dénombrable, alors $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ l'est également car réunion dénombrable d'ensembles au plus dénombrable.
- S'il existe un entier p tel que A_p ne soit pas dénombrable, alors $\bar{A}_p$ l'est par définition de $\mathcal{T}$. Dès lors,

$$\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bar{A}_n \subset \bar{A}_p$$

ce qui prouve que $\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n}$ est au plus dénombrable comme sous-partie d'un ensemble au plus dénombrable.

Cela achève la preuve de la σ -additivité, et permet de conclure que

L'ensemble $\mathcal{T}$ est une tribu sur Ω .

(b). Commençons par exhiber une suite d'éléments deux à deux distincts de Ω .

- Puisque Ω est infini, il admet au moins un élément x_0 .
- Supposons construits $x_0, \dots, x_n$ deux à deux distincts. Puisque Ω est infini, on a notamment $\Omega \neq \{x_0, \dots, x_n\}$ et il existe $x_{n+1} \in \Omega$ tel que $x_{n+1} \notin \{x_0, \dots, x_n\}$.

Par récurrence, on construit donc une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de Ω deux à deux distincts. Notons alors que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \{x_n\} \in \mathcal{T} \quad \text{mais} \quad X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x_n\} = \{x_n, n \in \mathbb{N}\} \notin \mathcal{T}$$

En effet, $\{x_n\}$ est un ensemble fini pour tout n donc un élément de $\mathcal{T}$. En revanche, X est infini (car les éléments de la suite sont deux à deux distincts). Il est par ailleurs dénombrable, ce qui impose que son complémentaire $\overline{X}$ ne soit pas fini, sans quoi Ω serait dénombrable car réunion de X dénombrable et $\overline{X}$ fini.

L'axiome de σ -additivité n'est pas vérifié. Par conséquent,

L'ensemble $\mathcal{U}$ n'est pas une tribu sur Ω .

(c). Soit X un élément de $\mathcal{T}$. Par définition de $\mathcal{T}$, au moins un des ensembles X ou $\overline{X}$ est au plus dénombrable. Si les deux étaient au plus dénombrables, alors Ω le serait également car $\Omega = X \cup \overline{X}$. L'un des deux ensembles n'est donc pas dénombrable, ce qui prouve que $P(X)$ est bien défini.

Il est clair que $P(\Omega) = 1$ car $\overline{\Omega} = \emptyset$ est de cardinal fini. Il ne reste plus qu'à montrer l'axiome de σ -additivité. On raisonne comme au (b). Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$ deux à deux incompatibles.

- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n est dénombrable, alors par union dénombrable $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ l'est également et

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = 0 = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

- Supposons qu'il existe un entier p tel que A_p n'est pas au plus dénombrable, auquel cas $\overline{A_p}$ l'est et $P(A_p) = 1$ tandis que $P(\overline{A_p}) = 0$. Notons que pour tout $n \geq p$, les événements A_p et A_n sont incompatibles d'où $A_n \subset \overline{A_p}$. En particulier, A_n est au plus dénombrable comme sous-partie d'un ensemble au plus dénombrable et donc $P(A_n) = 0$ pour tout $n \neq p$. Ainsi,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = P(A_p) = 1$$

Par ailleurs, puisque $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ contient A_p qui n'est pas dénombrable, il ne l'est pas non plus et

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = 1 = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

La propriété de σ -additivité est donc vérifiée, ce qui valide la preuve.

L'application P définie une probabilité sur $\mathcal{T}$.

9

(*)

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements presque sûrs d'un espace probabilisé. Montrer que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ et $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ sont presque sûrs.

Dans un premier temps, on a $A_0 \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ donc par croissance de P ,

$$1 \geq P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \geq P(A_0) = 1 \quad \text{d'où} \quad P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = 1$$

Par ailleurs, en passant au complémentaire, on a

$$P\left(\overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n}\right) = P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{A_n}\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(\overline{A_n})$$

Pour tout entier n , A_n est presque sûr par hypothèse donc $P(\overline{A_n}) = 1 - P(A_n) = 0$. Il s'ensuit que

$$P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = 0 \quad \text{d'où} \quad P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = 1$$

Finalement,

Les évènements $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ et $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ sont presque sûrs.

10

(**)

Pour tout $a > 1$, on note

$$\zeta(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^a}$$

On munit $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$ d'une probabilité (appelée **loi de Zipf**) en posant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(\{n\}) = \frac{1}{\zeta(a) \cdot n^a}$$

- (a). Pour tout entier $m \geq 1$, on note $m\mathbb{N}^* = \{mk, k \in \mathbb{N}^*\}$. Calculer $P(m\mathbb{N}^*)$.
- (b). Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les entiers p et q pour que $p\mathbb{N}^*$ et $q\mathbb{N}^*$ soit indépendants.
- (c). (**Application**) On note $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des nombres premiers ($p_0 = 2, p_1 = 3, p_2 = 5$, etc) puis C_n l'ensemble des entiers qui ne sont divisibles par aucun des entiers $p_0, \dots, p_n$.
- (i) Calculer la probabilité $P(C_n)$.
- (ii) Déterminer $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$.
- (iii) En déduire le développement eulérien de la fonction ζ :

$$\zeta(a) = \prod_{n=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{(p_n)^a}\right)^{-1}$$

- (a). En écrivant $m\mathbb{N}^*$ comme la réunion disjointe de ses singletons, il vient

$$P(m\mathbb{N}^*) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(\{mk\}) = \frac{1}{\zeta(a)} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(mk)^a} = \frac{1}{\zeta(a)} \frac{1}{m^a} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^a}$$

et donc par définition de ζ

$$P(m\mathbb{N}^*) = \frac{1}{m^a}$$

- (b). Les parties $p\mathbb{N}^*$ et $q\mathbb{N}^*$ sont indépendantes si et seulement si

$$P(p\mathbb{N}^* \cap q\mathbb{N}^*) = P(p\mathbb{N}^*)P(q\mathbb{N}^*) \quad \text{soit} \quad P(p\mathbb{N}^* \cap q\mathbb{N}^*) = \frac{1}{p^a} \cdot \frac{1}{q^a}$$

Les éléments de $p\mathbb{N}^* \cap q\mathbb{N}^*$ sont les entiers divisibles à la fois par p et q , c'est-à-dire ceux divisibles par leur ppcm. Ainsi,

$$P(p\mathbb{N}^* \cap q\mathbb{N}^*) = P(\text{ppcm}(p, q)\mathbb{N}^*) = \frac{1}{\text{ppcm}(p, q)^a}$$

On cherche donc une condition nécessaire et suffisante pour que $\text{ppcm}(p, q) = p \cdot q$, ce qui n'a lieu que si p et q sont premiers entre eux. Par suite,

Les parties $p\mathbb{N}^*$ et $q\mathbb{N}^*$ sont indépendantes si et seulement si p et q sont premiers entre eux.

- (c.i). Par définition,

$$C_n = \bigcap_{i \in [0; n]} \overline{p_i \mathbb{N}^*}$$

Une preuve similaire à la précédente montre que les évènements $p_i \mathbb{N}^*$ sont deux à deux indépendants. Il en est donc de même de leurs complémentaires, et par conséquent,

$$P(C_n) = \prod_{i=0}^n P(\overline{p_i \mathbb{N}^*}) = \prod_{i=0}^n (1 - P(p_i \mathbb{N}^*))$$

soit pour conclure, en vertu du résultat de la question (a),

$$P(C_n) = \prod_{k=0}^n \left(1 - \frac{1}{p_k^a}\right)$$

- (c.ii). Par définition, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$ est l'ensemble des entiers qui ne sont divisibles par aucun nombre premier. Seul l'entier 1 satisfait cette propriété. Par conséquent,

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n = \{1\}$$

- (c.iii). La suite $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante pour l'inclusion, donc d'après la propriété de continuité décroissante,

$$P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(C_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=0}^n \left(1 - \frac{1}{p_k^a}\right) = \prod_{k=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{p_k^a}\right)$$

Mais d'après la question précédente,

$$P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n\right) = P(\{1\}) = \frac{1}{\zeta(a)}$$

11

(**)

Soit $(\Omega, \mathcal{T})$ un espace probabilisable et P une fonction de $\mathcal{T}$ dans $\mathbb{R}_+$ telle que

$$P(\Omega) = 1 \quad \text{et} \quad \forall (A, B) \in \mathcal{T}, \quad A \cap B = \emptyset \implies P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

On suppose également que P vérifie la propriété de continuité croissante. Montrer que P est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$.

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements deux à deux incompatibles. Une récurrence immédiate montre, à l'aide de la seconde propriété de l'énoncé, que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) = \sum_{k=0}^n P(A_k)$$

Notons $B_n = \bigcup_{k \in [0; n]} A_k$ pour tout entier n . La suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante ce qui permet de lui appliquer la propriété de continuité croissante. Ainsi,

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n P(A_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(A_k)$$

Il ne reste plus qu'à remarquer pour conclure que

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \quad \text{et ainsi} \quad P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

Finalement, P vérifie la propriété de σ -additivité et donc

$$P \text{ est une probabilité sur } (\Omega, \mathcal{T}).$$

12

(**)

- (a). (**Lemme préliminaire**) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $[0; 1[$. Justifier l'implication

$$\sum_{n \geq 0} a_n \text{ diverge} \implies \prod_{n=0}^{+\infty} (1 - a_n) = 0$$

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$. On note

$$\limsup (A_n)_{n \in \mathbb{N}} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \geq n} A_m$$

- (b). Vérifier que si la série $\sum_{n \geq 0} P(A_n)$ converge, alors $P(\limsup (A_n)_{n \in \mathbb{N}}) = 0$.
- (c). En déduire le **lemme de Borel-Cantelli** : la probabilité qu'une infinité des (A_n) se produise simultanément est nulle.
- (d). Démontrer que si la série $\sum_{n \geq 0} P(A_n)$ diverge, et si les événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendants, alors

$$P(\limsup (A_n)_{n \in \mathbb{N}}) = 1$$

- (a). Supposons $\sum_{n \geq 0} a_n$ divergente. Pour tout entier n , on note $b_n = \ln(1 - a_n)$. Alors, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de valeurs négatives donc la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n \geq 0} b_n$ est convergente ou de limite $-\infty$. De plus,

$$\ln \left[\prod_{k=0}^N (1 - a_k) \right] = \sum_{k=0}^N \ln(1 - a_k) = \sum_{k=0}^N b_k$$

Cette égalité montre donc que le produit tend vers 0 si et seulement si la série diverge. Il s'agit donc de démontrer que la série $\sum_{n \geq 0} b_n$ diverge.

Notons que si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de limite nulle si et seulement si $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de limite nulle et alors, $a_n \sim -b_n$. On distingue alors deux cas :

- Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, alors $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ également donc la série $\sum_{n \geq 0} b_n$ diverge grossièrement.
- Si $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0, les séries $\sum_{n \geq 0} a_n$ et $\sum_{n \geq 0} b_n$ sont de mêmes natures en vertu de l'équivalent précédent. En particulier, si la première diverge, la suivante également.

Par conséquent,

Si la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ diverge, alors $\prod_{n=0}^{+\infty} (1 - a_n) = 0$.

- (b). Pour tout entier n , on note

$$B_n = \bigcup_{m \geq n} A_m$$

Notons que B_n est un évènement car union dénombrable d'évènements, donc $\limsup(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ également comme intersection des $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$. De plus, $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante par construction donc d'après le théorème de continuité décroissante, on a

$$P(\limsup(A_n)_{n \in \mathbb{N}}) = P\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(B_n)$$

Or pour tout entier n , puisque la série $\sum_{n \geq 0} P(A_n)$ converge, on a

$$0 \leq P(B_n) \leq \sum_{m=n}^{+\infty} P(A_m)$$

La suite des restes d'une série convergente est de limite nulle donc par majoration, $P(B_n)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Finalement,

Si $\sum_{n \geq 0} P(A_n)$ converge, alors $P(\limsup(A_n)_{n \in \mathbb{N}}) = 0$

- (c). C'est une conséquence immédiate de l'interprétation de l'évènement $\limsup(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ obtenue à l'exercice 7.
 (d). Montrons que le complémentaire de $\limsup(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est négligeable. Par définition,

$$\overline{\limsup(A_n)_{n \in \mathbb{N}}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{m \geq n} \overline{A_m}$$

Notons pour tout entier n ,

$$C_n = \bigcap_{m \geq n} \overline{A_m}$$

La suite $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante donc par continuité croissante

$$P\left(\overline{\limsup(A_n)_{n \in \mathbb{N}}}\right) = P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(C_n) \quad (\star)$$

Montrons que $P(C_n) = 0$ pour tout entier n , ce qui permettra de conclure. Puisque les évènements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendants, il en est de même de leur complémentaire. Ainsi, pour tout $N \geq n \in \mathbb{N}$,

$$P\left(\bigcap_{m=n}^N \overline{A_m}\right) = \prod_{m=n}^N P(\overline{A_m}) = \prod_{m=n}^N (1 - P(A_m))$$

Par continuité décroissante, on en déduit que

$$P\left(\bigcap_{N \geq n} \bigcap_{m=n}^N \overline{A_m}\right) = P\left(\bigcap_{m \geq n} \overline{A_m}\right) = \prod_{m=n}^{+\infty} (1 - P(A_m))$$

Mais puisque la série $\sum_{n \geq 0} P(A_n)$ diverge, le produit ci-dessus est nul d'après la question (a). Cela valide l'égalité $P(C_n) = 0$ et donc d'après $(\star)$, le complémentaire de $\limsup (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est négligeable. Par conséquent,

$$P(\limsup (A_n)_{n \in \mathbb{N}}) = 1$$

13 $(**)$

On lance un dé traditionnel de manière répétée.

- Soit A et B deux sous-ensembles de $\llbracket 1; 6 \rrbracket$. Quelle est la probabilité d'obtenir un résultat appartenant à A avant d'obtenir un résultat dans B ?
- On peut arrêter les lancers quand on le souhaite. Toutefois, si le dé donne 1, on est obligé de s'arrêter. Pour maximiser le score, on choisit un entier $n \in \llbracket 1; 6 \rrbracket$ et on décide de s'arrêter dès que le lancer est supérieur ou égal à n . Quelle est la valeur de n qui maximise l'espérance du score ?

- On se place dans l'univers $\llbracket 1; 6 \rrbracket^{\mathbb{N}}$ muni d'une probabilité qui assure l'indépendance des différents sans lancers. Pour tout entier $n \geq 1$, on note E_n l'évènement

E_n : « On tire un élément de A au n -ième lancer sans tirer d'éléments de $A \cup B$ avant. »

et

E : « On tire un élément de A avant un élément de B . »

Il est clair que les évènements $(E_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont deux à deux incompatibles, et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(E_n) = \left(1 - \frac{\text{Card}(A \cup B)}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{\text{Card}(A)}{6}$$

De plus

$$E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n \quad \text{d'où} \quad P(E) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(E_n)$$

En utilisant la formule donnant la somme des termes d'une suite géométrique, il vient

$$P(E) = \frac{\text{Card}(A)}{6} \frac{1}{1 - (\text{Card}(A \cup B)/6)} = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(A \cup B)}$$

Finalement,

La probabilité de tirer un élément de A avant un élément de B vaut $\text{Card}(A)/\text{Card}(A \cup B)$.

- Fixons $n \in \llbracket 1; 6 \rrbracket$, et considérons $k \in \llbracket n; 6 \rrbracket$. Alors, la probabilité d'obtenir k avec la stratégie de l'énoncé est celle d'obtenir un élément de $A = \{k\}$ avant un élément de $B = \{1\} \cup \llbracket n; 6 \rrbracket \setminus \{k\}$. D'après ce qui précède, elle vaut donc

$$P(\text{« on obtient } k \text{ avec la stratégie »}) = \frac{\text{Card}(\{k\})}{\text{Card}(\{1\} \cup \llbracket n; 6 \rrbracket \setminus \{k\})} = \frac{1}{8-n}$$

De la même manière, la probabilité d'obtenir 1 est celle d'obtenir un élément de $\{1\}$ avant un élément de $\llbracket n; 6 \rrbracket$, d'où

$$P(\text{« on obtient 1 avec la stratégie »}) = \frac{1}{8-n}$$

L'espérance de gain G_n de la méthode est donnée par définition par

$$G_n = \sum_{k \in \{1\} \cup \llbracket n; 6 \rrbracket} k \cdot P(\text{« on obtient } k \text{ avec la stratégie »})$$

Ici, on obtient donc

$$G_n = \frac{1}{8-n} \left(1 + \sum_{k=n}^6 k\right) = \frac{1}{8-n} \left(1 + \sum_{k=1}^6 k - \sum_{k=1}^{n-1} k\right) = \frac{1}{8-n} \left(22 - \frac{n(n-1)}{2}\right)$$

En calculant les valeurs de G_n pour $n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$, on constate alors que G_n est maximal pour $n = 4$ et $n = 5$, avec $G_4 = G_5 = 4$. Par suite,

La stratégie qui optimise le score est obtenue pour $n = 4$ et $n = 5$.

14

(**)

Une petite taupe entre dans son terrier par l'entrée A . A chaque intersection, elle a une chance sur deux de prendre à gauche, et une chance sur deux de prendre à droite. Quelle est la probabilité qu'elle sorte en B ?



Remarquons que si la taupe tourne à gauche (resp. droite) à son entrée dans le terrier, alors elle tourne dans le terrier tant qu'elle bifurque à droite (resp. à gauche) à chaque intersection, avant de sortir dès qu'elle se décide à prendre à droite (resp. à gauche) une nouvelle fois. La sortie en A ou en B est uniquement déterminée par la parité du nombre de choix de directions de l'animal. On peut donc considérer l'univers suivant :

$$\Omega = \{DG^n D, n \in \mathbb{N}\} \cup \{GD^n G, n \in \mathbb{N}\} \cup \{G^\infty\} \cup \{D^\infty\}$$

les deux dernières issues représentant le cas où la taupe tourne indéfiniment dans le terrier. On le munit de la probabilité qui rend les choix de directions mutuellement indépendant. Dès lors,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(\{DG^n D\}) = P(\{GD^n G\}) = \frac{1}{2^{n+2}} \quad \text{et} \quad P(\{G^\infty\}) = P(\{D^\infty\}) = 0$$

Remarquons maintenant que si l'on note B l'évènement « la taupe sort en B », alors

$$B = \{DG^{2n} D, n \in \mathbb{N}\} \cup \{GD^{2n} G, n \in \mathbb{N}\}$$

et donc

$$P(B) = 2 \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n+2}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-1/4} = \frac{2}{3}$$

Ainsi,

La taupe sort en B avec probabilité $2/3$.

15

(*)

Mines PC 2016

- (a). Soit P une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Montrer que $P(\{n\}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
- (b). Soit (E, τ, P) un espace probabilisé et $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'évènements incompatibles. Montrer que $P(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

- (a). Par définition,

$$\mathbb{N} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{n\}$$

L'union étant disjointe, on en déduit que $P(\mathbb{N}) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(\{n\})$

avec notamment

La série $\sum_{n \geq 0} P(\{n\})$ est convergente.

- (b). L'argument est le même que le précédent. Par définition d'une probabilité P , on a par incompatibilité des évènements

$$P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

avec notamment

La série $\sum_{n \geq 0} P(A_n)$ est convergente.

16

(**)

Mines PC 2016

Un panier contient r pommes rouges et v pommes vertes. On mange les pommes une par une, en choisissant une pomme au hasard à chaque étape. On s'arrête lorsqu'il ne reste que des pommes rouges dans le panier. Quelle est la probabilité que l'on ait mangé toutes les pommes ?

On modélise une issue de l'expérience par une suite finie à valeurs dans $\{V, R\}$ qui représente les différentes couleurs des pommes mangées. Puisque l'on s'arrête lorsqu'il n'y a que des pommes rouges restantes, une suite représentant une issue a les propriétés suivantes :

- elle contient exactement v fois la valeur V ;
- sa dernière valeur est un V ;
- elle contient au plus r fois la valeur R .

Calculons maintenant la probabilité d'une telle issue. Notons $k \in \llbracket 0; r \rrbracket$ le nombre de pommes rouges restantes à la fin de l'expérience. Dans un premier temps, on traite le cas de l'issue consistant à manger d'abord k pommes rouges, puis les v pommes vertes. Par définition de l'expérience aléatoire, on a d'abord une probabilité de $r/(r+v)$ de manger une première pomme rouge, puis $(r-1)/(r+v-1)$ de manger une seconde pomme rouge après la première, et ainsi de suite jusqu'au k pommes rouges mangées. Après quoi, on a une probabilité de $v/(v+r-k)$ de manger une verte, puis $(v-1)/(v+r-k-1)$ pour la seconde verte et ainsi de suite. Finalement,

$$P(\{R^k V^v\}) = \frac{r}{v+r} \cdot \frac{r-1}{v+r-1} \cdots \frac{r-k+1}{v+r-k+1} \frac{v}{v+r-k} \frac{v-1}{v+r-k-1} \cdots \frac{1}{r-k+1} \quad (*)$$

En multipliant en haut et en bas par $(r-k)!$, on trouve alors tout simplement

$$P(\{R^k V^v\}) = \frac{v! \cdot r!}{(v+r)!}$$

Si maintenant on considère une issue ω quelconque pendant laquelle on mange k pommes rouges, on peut exprimer $P(\{\omega\})$ de la même manière que pour l'exemple ci-dessus et constater que **la seule chose qui change est l'ordre des termes apparaissant dans les produits du numérateur!** En particulier, la probabilité de l'issue est inchangée, ce qui signifie que toutes les issues sont équiprobables, en d'autres termes que l'univers est muni d'une **probabilité uniforme**.

Il ne reste donc plus qu'à compter les issues pendant lesquelles on mange les r boules rouges. Pour construire une telle issue, il faut manger les $r+v$ pommes en choisissant les instants où une pomme rouge a été mangée, sachant qu'il ne peut s'agir de la dernière. On a donc r choix possibles parmi $r+v-1$. Finalement,

$$\text{card}(\text{« Toutes les pommes rouges sont mangées »}) = \binom{r+v-1}{r}$$

puis
$$P(\text{« Toutes les pommes rouges sont mangées »}) = \frac{v! \cdot r!}{(r+v)!} \binom{r+v-1}{r}$$

En ré-écrivant le coefficient binomial à l'aide de factorielles, on trouve toutes simplifications effectuées

$$P(\text{« Toutes les pommes rouges sont mangées »}) = \frac{r}{r+v}$$

17 _____ (**) _____ **Centrale PC 2016**

On lance deux pièces équilibrées. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note E_n l'évènement « les deux pièces ont donné le même nombre de pile et de face dans les n premiers lancers ».

- Déterminer $P(E_n)$.
- Sur les n premiers lancers, combien de fois cet évènement est-il réalisé en moyenne?

(a). On suppose que les lancers des deux pièces sont indépendants. Soit $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Alors,

$$P(\text{« les deux pièces font } k \text{ piles »}) = P(\text{« la première pièce fait } k \text{ piles »}) \cdot P(\text{« la deuxième pièce fait } k \text{ piles »})$$

Or pour une pièce équilibrée, la probabilité de faire k piles sur n lancers est égale à $\binom{n}{k}/2^n$. On a donc

$$P(\text{« les deux pièces font } k \text{ piles »}) = \frac{1}{4^n} \binom{n}{k}^2$$

puis
$$P(E_n) = \sum_{k=0}^n P(\text{« les deux pièces font } k \text{ piles »}) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{4^n} \binom{n}{k}^2$$

Un exercice classique de combinatoire montre que

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

On le justifie par exemple en considérant le coefficient du terme x^n dans l'égalité $(1+x)^{2n} = (1+x)^n \cdot (1+x)^n$ ou en comptant de deux manières différentes les parties à n éléments dans un ensemble C à $2n$ éléments en décomposant $C = A \cup B$ où A et B sont quelconques de cardinal n . Dès lors, on peut conclure que

$$P(E_n) = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}$$

- (b). Pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, notons X_k la variable aléatoire qui renvoie 1 si E_k est réalisé, et 0 sinon. Notons également X le nombre de fois où l'on a obtenu le même nombre de piles et de faces sur les n lancers. Alors,

$$X = X_1 + \cdots + X_n \quad \text{d'où} \quad E(X) = E(X_1) + \cdots + E(X_n)$$

De plus, $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \quad E(X_i) = 1 \cdot P(X_i = 1) = P(E_i) = \frac{1}{4^i} \binom{2i}{i}$

et ainsi,

$$E(X) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{4^k} \binom{2k}{k}$$

Remarque : On peut en fait calculer cette somme grâce à un télescopage en remarquant qu'en posant

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_k = \frac{1}{4^k} \binom{2k}{k} \quad \text{et} \quad v_k = \frac{2k}{4^k} \binom{2k}{k}$$

Alors

$$\begin{aligned} v_{k+1} - v_k &= \frac{2(2k+1)}{4^{k+1}} \binom{2k+2}{k+1} - \frac{2k}{4^k} \binom{2k}{k} \\ &= \frac{2}{4^k} \left[(k+1) \frac{(2k+2)(2k+1)}{4(k+1)^2} - k \right] \binom{2k}{k} \\ &= \frac{2}{4^k} \left[\frac{2k+1}{2} - k \right] \binom{2k}{k} \\ v_{k+1} - v_k &= u_k \end{aligned}$$

et donc

$$E(X) = \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^n (v_{k+1} - v_k) = v_{n+1} - v_1$$

Finalement

$$E(X) = \frac{2(n+1)}{4^{n+1}} \binom{2n+2}{n+1} - 1$$

Il paraît cependant difficile d'imaginer demander cela à un candidat sans indication supplémentaire (je n'ai trouvé le télescopage que grâce à un logiciel de calcul formel, je n'y aurais jamais pensé sinon).

Pour terminer, on peut justifier grâce à la formule de Stirling,

$$E(X) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2\sqrt{\frac{n}{\pi}}$$

18

(*)

X PC 2016

Une urne contient 3 boules vertes et 3 boules rouges. Une boule est enlevée de l'urne au hasard. Anatole tire 6 fois une boule avec remise et obtient 6 fois une boule rouge. Barnabé tire 600 fois une boule avec remise et obtient 303 fois une rouge et 297 fois une verte. Lequel des deux peut s'attendre le plus à ce qu'une boule verte ait été enlevée ?

Notons V (resp. R) l'évènement « on a enlevé une boule verte » (resp. rouge), A l'évènement « on tire 6 rouges sur 6 tirages », et enfin B l'évènement « on tire 303 rouges sur 600 tirages ». Alors $P(V) = P(R) = 1/2$ tandis que d'une part

$$P(A|V) = \left(\frac{3}{5}\right)^6 \quad \text{et} \quad P(A|R) = \left(\frac{2}{5}\right)^6$$

puis d'autre part $P(B|V) = \binom{600}{303} \left(\frac{3}{5}\right)^{303} \left(\frac{2}{5}\right)^{297} \quad \text{et} \quad P(B|R) = \binom{600}{303} \left(\frac{2}{5}\right)^{303} \left(\frac{3}{5}\right)^{297}$

On peut alors déterminer la probabilité conditionnelle de V sachant A (resp. B). On obtient alors puisque $\{V, R\}$ est un système complet d'évènements

$$P(V|A) = \frac{P(A \cap V)}{P(V)} = \frac{P(V) \cdot P(A|V)}{P(V) \cdot P(A|V) + P(R) \cdot P(A|R)}$$

En simplifiant tant que possible le quotient, il vient

$$P(V|A) = \frac{3^6}{3^6 + 2^6}$$

Mais de la même manière,

$$P(V|B) = \frac{P(V) \cdot P(B|V)}{P(V) \cdot P(B|V) + P(R) \cdot P(B|R)} = \frac{3^6}{3^6 + 2^6}$$

là encore après simplifications. Finalement, les deux probabilités conditionnelles sont égales. On peut donc en conclure que

Anatole n'a pas plus de raison que Barnabé de penser qu'une boule verte a été enlevée.

19

(**)

X PC 2016

On dispose de deux dés équilibrés, un bleu et un rouge. On note A l'évènement « la somme des deux dés est égale à 9 ». Trouver deux évènements B et C relatifs au dé rouge tels que

$$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C) \quad \text{et} \quad \forall X, Y \in \{A, B, C\}, \quad P(X \cap Y) \neq P(X)P(Y)$$

On modélise l'expérience par $\Omega = \llbracket 1; 6 \rrbracket^2$ muni de sa probabilité uniforme où le premier élément du couple représente le résultat du dé bleu (resp. rouge). Notons qu'alors

$$A = \{(6, 3), (5, 4), (4, 5), (3, 6)\} \quad \text{d'où} \quad P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

On va raisonner par une sorte d'analyse-synthèse pour trouver deux évènements B et C convenables.

- Commençons par remarquer que puisqu'on cherche des évènements B et C relatifs au dé rouge uniquement, ils ont une probabilité de la forme $k/6$ pour $k \in \llbracket 0; 6 \rrbracket$. On ne peut pas avoir une probabilité 0 ou 1 pour B (resp. C) car alors $B = \emptyset$ ou $B = \Omega$ et B et C seraient indépendants, ce que l'on ne veut pas. On doit donc prendre des évènements tels que

$$P(B) \text{ et } P(C) \in \left\{ \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6} \right\} \quad (1)$$

- De manière similaire, $A \cap B \cap C$ étant un sous-ensemble de A , il comporte entre 0 et 4 éléments, et est ainsi de probabilité nulle, $1/36$, $1/18$, $1/12$ ou $1/9$. Si $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$, cela impose donc que $P(B)P(C)$ vaut 0, $1/4$, $1/2$, $3/4$ ou 1. La seule manière de concilier ces contraintes avec (1) est de prendre

$$P(B) = P(C) = \frac{1}{2} \quad \text{puis} \quad P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{36} \quad (2)$$

On cherche donc B et C de cardinal 3, tels que $A \cap B \cap C$ soit réduit à un seul élément.

- Quel que soit le choix de B et C vérifiant (2), on aura donc $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$. De plus, $B \cap C$ est relatif au dé rouge uniquement, donc a une probabilité de la forme $k/6$ avec $k \in \llbracket 0; 6 \rrbracket$ donc dans tous les cas distincte de $P(B)P(C) = 1/4$. Il ne reste donc qu'à s'assurer que $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$ soit $P(A \cap B) \neq 1/18$ et de même $P(A \cap C) \neq 1/18$. En d'autres termes, on veut que $A \cap B$ et $A \cap C$ soient tous deux de cardinal différent de 2.
- Pour conclure, on cherche deux parties B et C de $\llbracket 1; 6 \rrbracket$ telles que
 - B et C comportent 3 éléments;
 - $A \cap B$ et $A \cap C$ ne comportent pas 2 éléments;
 - $A \cap B \cap C$ comporte un seul élément.

On vérifie alors immédiatement que les deux ensembles B et C suivants conviennent.

On peut prendre pour B l'évènement « le dé rouge fait 1, 2 ou 3 » et pour C l'évènement « le dé rouge fait 3, 4 ou 5 ».

20

(**)

X PC 2016

On place aléatoirement $n \geq 3$ boules dans n urnes. Calculer la probabilité qu'une seule urne soit vide.

On modélise l'expérience par l'univers Ω des applications de $\llbracket 1; n \rrbracket$ dans $\llbracket 1; n \rrbracket$. A une distribution aléatoire, on fait correspondre l'application qui à i associe le numéro de l'urne dans laquelle a été placée la i -ième boule. L'ensemble Ω , de cardinal n^n est muni de la probabilité uniforme. L'évènement « Une seule urne est vide » correspond au sous-ensemble de Ω constitué des fonctions dont l'image est de cardinal $n - 1$ et on est donc ramené à compter le nombre de telles fonctions.

Pour construire une fonction f dont l'image est de cardinal $n - 1$, on procède de la manière suivante :

- On choisit l'élément de $\llbracket 1; n \rrbracket$ qui n'a pas d'antécédent (n possibilités). Les autres appartiendront à l'image de f .
- Parmi les $n - 1$ éléments de $\llbracket 1; n \rrbracket$ de l'image de f , l'un doit nécessairement avoir deux antécédents, tandis que les autres en auront un et un seul. On commence donc par choisir l'élément à 2 antécédents ($n - 1$ possibilités), puis ses deux antécédents (2 parmi n possibilités).
- Enfin, il ne reste plus qu'à choisir une permutation entre les $n - 2$ éléments de $\llbracket 1; n \rrbracket$ au départ restants, et les $n - 2$ points avec un seul antécédent à l'arrivée (parmi $(n - 2)!$ choix possibles).

Le nombre de fonctions cherchées vaut donc $n(n - 1) \binom{n}{2} (n - 2)! = \frac{n! \cdot n(n - 1)}{2}$

et puisque Ω est muni d'une probabilité uniforme,

$$\text{La probabilité qu'une seule urne soit vide vaut } \frac{n! \cdot n(n - 1)}{2 \cdot n^n}.$$

21

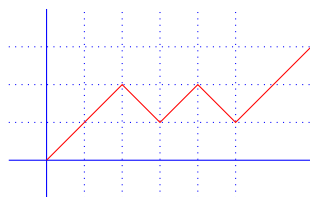
(***)

X PC 2016

Lors d'une élection, 700 électeurs votent pour A et 300 pour B . Quelle est la probabilité que, pendant le dépouillement, A soit toujours strictement en tête ?

Ce problème porte le nom du **problème du scrutin** et s'énonce plus généralement de la manière suivante : dans une élection où le vainqueur a recueilli p voix et la vaincu q voix, quelle est la probabilité pour que le vainqueur soit toujours strictement en tête lors du dépouillement ? La première démonstration officielle est due au mathématicien français Désiré André. La preuve ci-dessous, plus élégante est fondée sur une interprétation géométrique.

On associe le déroulement du dépouillement par un chemin dans $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}$. On part du point $(0, 0)$ et à chaque fois que l'on dépouille un bulletin pour A , on fait un pas $(+1, +1)$, tandis que si l'on dépouille un bulletin pour B , on fait un pas $(+1, -1)$. Si par exemple le dépouillement donne $(A, A, B, A, B, A, A, \dots)$, on obtient le chemin



On notera donc que l'ordonnée du point d'abscisse k du chemin est donc la différence entre le nombre de votants pour A et le nombre de votants pour B après k dépouillements. Si l'on considère tous les dépouillements équiprobables, on est donc ramené à compter le nombre de chemins de cette nature se situant, à part au point $(0, 0)$, strictement au dessus de l'axe des abscisses, et terminant au point de coordonnées $(p + q, p - q)$. Notons donc

- Ω l'ensemble des chemins possibles de $(0, 0)$ vers $(p + q, p - q)$ à pas $(+1, +1)$ et $(+1, -1)$;
- Ω^+ l'ensemble de ces chemins qui restent strictement au dessus de l'axe des abscisses et Ω^- ceux qui touchent cet axe au moins une fois.
- Ω_B l'ensemble des chemins de Ω qui commencent par un pas $(+1, -1)$. On notera qu'un tel chemin intersecte nécessairement l'axe des abscisses. On définit de même Ω_A l'ensemble des chemins de Ω qui commencent par un pas $(+1, +1)$

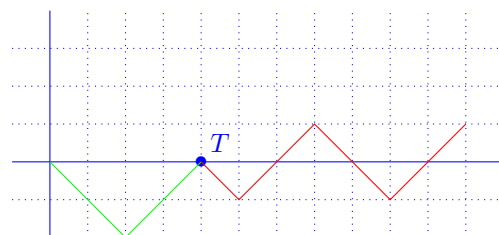
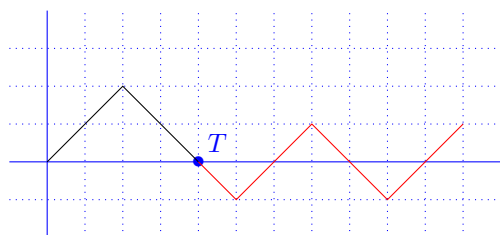
Avec ces notations, on cherche donc à calculer le cardinal de Ω_+ . On a clairement $\Omega = \Omega_+ \cup \Omega_-$ et l'union étant disjointe,

$$\text{Card}(\Omega) = \text{Card}(\Omega_+) + \text{Card}(\Omega_-) \quad \text{d'où} \quad \text{Card}(\Omega_+) = \text{Card}(\Omega) - \text{Card}(\Omega_-)$$

Pour construire un chemin de Ω (resp. Ω_B), il suffit de choisir les positions des p pas montants parmi les $p + q$ positions possibles (resp. $p + q - 1$). Ainsi,

$$\text{card}(\Omega) = \binom{p + q}{p} \quad \text{et} \quad \text{card}(\Omega_B) = \binom{p + q - 1}{p}$$

L'étape suivante consiste alors à établir une bijection entre $\Omega_- \cap \Omega_A$ et $\Omega_- \cap \Omega_B = \Omega_B$. La construction passe par une astuce géométrique. Si C est un chemin qui va de $(0, 0)$ vers $(p + q, p - q)$ en touchant au moins une fois l'axe des abscisses, on note T le point d'abscisse minimale parmi les points du chemin d'ordonnée 0 (hormis l'origine). On construit alors un chemin C' en remplaçant le chemin de $(0, 0)$ à T de C par son symétrique par rapport à l'axe des abscisses (on conserve le reste inchangé). La figure suivante représente un exemple de cette construction.



L'application $\varphi : C \longrightarrow C'$ est involutive ($\varphi \circ \varphi = I_d$) donc bijective. Elle envoie $\Omega_- \cap \Omega_A$ sur $\Omega_- \cap \Omega_B$ qui est égal à Ω_B tout entier. Par conséquent,

$$\text{card}(\Omega_-) = \text{card}(\Omega_- \cap \Omega_A) + \text{card}(\Omega_- \cap \Omega_B) = 2 \cdot \text{card}(\Omega_B) = 2 \cdot \binom{p+q-1}{p}$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \text{Card}(\Omega_+) &= \text{Card}(\Omega) - \text{Card}(\Omega_-) \\ &= \binom{p+q}{p} - 2 \cdot \binom{p+q-1}{p} \\ &= \binom{p+q}{p} - \frac{2q}{p+q} \binom{p+q}{p} \\ \text{Card}(\Omega_+) &= \frac{p-q}{p+q} \binom{p+q}{p} \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à diviser par le cardinal de Ω pour obtenir la probabilité cherchée. On peut donc conclure que

Si deux candidats A et B reçoivent p et q voix avec $p > q$, la probabilité que A reste strictement en tête des sondages pendant tout le dépouillement du scrutin vaut $(p-q)/(p+q)$. En particulier, pour $p = 700$ et $q = 300$, elle est de $2/5$.