

Partie IV - Algèbre linéaire

On considère les matrices $I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} p & 0 & p & 0 \\ q & q & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Soit $t \in \mathbb{R}$. On note χ_A le polynôme caractéristique de A , si bien que $\chi_A(t)$ est le déterminant de $A - tI_4$.

Q24. Montrer que 0 est valeur propre de A et donner un vecteur propre de A associé à la valeur propre 0.

Q25. Trouver les réels α , β et γ tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\chi_A(t) = t^4 - t^3 + \alpha t^2 + \beta t + \gamma$.

On dit que la matrice colonne $S = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}$ est solution de (E_t) lorsque $S = tAS + L$.

Q26. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, S est solution de (E_t) si et seulement si $(I_4 - tA)S = L$.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $\psi_A(t)$ le déterminant de la matrice $I_4 - tA$.

Q27. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $\psi_A(t) = t^4 \chi_A(1/t)$.

Q28. Vérifier que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\psi_A(t) = -p^2qt^3 + pqt^2 - t + 1$.

Q29. En déduire que, pour t au voisinage de 0, l'équation (E_t) possède une unique solution S .

Pour tout $k \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$, on note U_k la k -ième colonne de $I_4 - tA$. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de

$\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{C})$ et on suppose que la matrice colonne $S = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix}$ est solution de (E_t) .

Q30. Vérifier que $L = U_1S_0 + U_2S_1 + U_3S_2 + U_4S_3$.

Q31. En déduire que $\det_{\mathcal{B}}(U_1, U_2, U_3, L) = S_3 \cdot \det_{\mathcal{B}}(U_1, U_2, U_3, U_4) = S_3 \cdot \psi_A(t)$.

Q32. Montrer que, pour t au voisinage de 0, on a l'égalité :

$$S_3 = \frac{pq^2t^3}{-p^2qt^3 + pqt^2 - t + 1}.$$

On se propose de déterminer certaines propriétés des valeurs propres de A . On note λ une valeur propre complexe non nulle de A .

Q33. Montrer que λ est valeur propre de la matrice transposée de A .

Q34. En déduire qu'il existe trois complexes non tous nuls x_1, x_2 et x_3 tels que :

$$(\mathcal{H}) \quad \begin{cases} px_1 + qx_2 = \lambda x_1 \\ qx_2 + px_3 = \lambda x_2 \\ px_1 = \lambda x_3 \end{cases}.$$

On considère désormais trois complexes non tous nuls x_1, x_2 et x_3 qui vérifient le système $(\mathcal{H})$. On note alors $M = \max(|x_1|, |x_2|, |x_3|)$ et on remarque que l'on peut toujours se placer dans l'un des trois cas suivants :

i) $M = |x_3|$; **ii)** $M = |x_2|$ avec $M > |x_3|$; **iii)** $M = |x_1|$ avec $M > |x_2|$ et $M > |x_3|$.

Q35. Montrer, en distinguant ces trois cas, que $|\lambda| < 1$.

Q36. Montrer l'existence de nombres complexes λ_1, λ_2 et λ_3 tels que :

$$0 < |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_3| < 1 \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \chi_A(t) = t(t - \lambda_1)(t - \lambda_2)(t - \lambda_3).$$

Q37. Montrer l'existence de nombres complexes μ, a, b et c tels que :

$$\mu \neq 0, \quad 1 < |a| \leq |b| \leq |c| \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad \psi_A(t) = \mu(t - a)(t - b)(t - c).$$