PSI E3A 1 2016

Exercice 1

1.1 La série $\sum_{n\geq 1}$ est une série géométrique de raison $1/2 < 1$ donc elle converge. De plus, d'après la formule donnant la somme des termes d'une telle suite, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{n} a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1-(1/2)^n}{1-1/2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$$

Ainsi, $\boxed{\text{La série } \sum_{n\geq 1} a_n \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 2.}$

1.3 Par définition, pour tout $n \geq 1$, $\quad b_n = n \cdot \left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n}\right) = n \cdot \frac{2-1}{2^n} = \frac{n}{2^n}$

Par croissances comparées $\quad n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n\right) \quad$ donc $\quad b_n \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)$

Ainsi, par comparaison à une série géométrique de raison $3/4 < 1$ donc convergente, la série $\sum_{n\geq 1} b_n$ converge.

> **Remarque 1**
>
> On pouvait aussi utiliser la règle de d'Alembert.

Pour calculer sa somme, remarquons que pour tout entier n,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} b_k &= \sum_{k=1}^{n} k\,(a_k - a_{k+1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\,a_k - \sum_{k=1}^{n} k\,a_{k+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\,a_k - \sum_{k=2}^{n+1} (k-1)\,a_k \\
&= a_1 + \sum_{k=2}^{n} [k-(k-1)]\,a_k - n\,a_{n+1} \\
\sum_{k=1}^{n} b_k &= \sum_{k=1}^{n} a_k - n\,a_{n+1}
\end{aligned}$$

Puisque $n\,a_{n+1} = n/2^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, en passant à la limite, on constate que les sommes $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ sont égales. Notamment,

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geq 1} b_n \text{ converge et } \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = 2.}$$

2.1 Notons

$$f : \begin{array}{rcl} [2;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x\ln x} \end{array}$$

L'application f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[2;+\infty[$ avec pour tout $x \geq 2$

$$f'(x) = -\frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}$$

Puisque f' est strictement négative, f est décroissante sur $[2;+\infty[$. De plus, il est clair que f est de limite nulle en $+\infty$. Par conséquent,

$$\boxed{\text{La suite } (a_n)_{n\geq 2} \text{ est décroissante à partir du rang 2 et de limite nulle.}}$$

2.2 Par décroissance de f, une comparaison série-intégrale donne l'encadrement

$$\forall n \geq 3, \qquad \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} \leq \frac{1}{n\ln n} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}$$

En sommant cette inégalité pour n allant de 3 à N, on obtient notamment

$$\int_3^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} \leq \sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n\ln n}$$

Or, $$\int_3^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} = [\ln(\ln t)]_3^{N+1} = \ln(\ln(N+1)) - \ln(\ln 3) \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$$

Par minoration, $$\sum_{n=3}^{N} \frac{1}{n\ln n} \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$$

et ainsi $$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geq 2} a_n \text{ diverge.}}$$

2.3 Par définition, $$\forall n \geq 2, \qquad n\,a_n = \frac{1}{\ln n}$$

donc immédiatement, $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} n\,a_n = 0}$$

2.4 Soit $n \geq 3$. Par définition,
$$\begin{aligned} b_n &= n \cdot \left(\frac{1}{n\ln n} - \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}\right) \\ &= \frac{1}{\ln n} \cdot \left(1 - \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\ln n}{\ln(n+1)}\right) \end{aligned}$$

Effectuons un développement limité pour obtenir un équivalent de b_n. D'une part,

$$\frac{n}{n+1} = \frac{1}{1+1/n} = 1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

D'autre part,
$$\begin{aligned} \frac{\ln n}{\ln(n+1)} &= \frac{\ln n}{\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} \\ &= \frac{1}{1 + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{\ln n}} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1}{n\ln n} + O\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right)} \\ \frac{\ln n}{\ln(n+1)} &= 1 - \frac{1}{n\ln n} + O\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right) \end{aligned}$$

Finalement,
$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\ln n} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{n\ln n} + O\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right)\right)\right] \\ &= \frac{1}{n\ln n} + O\left(\frac{1}{n(\ln n)^2}\right) \end{aligned}$$

d'où $$b_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n\ln n} = a_n$$

et par conséquent $$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geq 2} b_n \text{ diverge.}}$$

Remarque 2

Une autre solution (peut être davantage attendue par l'énoncé) consiste à réutiliser l'égalité de la question **1.3**

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k - n\, a_{n+1}$$

qui n'est autre qu'une transformée d'Abel. Sachant que $(na_n)_{n\geq 2}$ et donc $(na_{n+1})_{n\geq 2}$ est de limite nulle, cette égalité montre que $\sum\limits_{n\geq 2} a_n$ et $\sum\limits_{n\geq 2} b_n$ sont de mêmes natures, donc divergentes ici.

3.1 Par décroissance de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$,

$$\forall p \in [\![n+1\,;2n]\!]\,, \qquad a_p \geq a_{2n}$$

En sommant ces inégalités, on obtient directement le résultat souhaité :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n \geq n\, a_{2n}}$$

3.2 La série $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ étant convergente, on peut définir pour tout $n \in \mathbb{N}$ le reste R_n de cette série par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad R_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} a_p$$

La suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors une suite de limite nulle. Or, pour tout entier $n \geq 1$,

$$u_n = \sum_{p=n+1}^{2n} a_p = R_n - R_{2n}$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc également de limite nulle. En vertu de la majoration de la question précédente, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} n\, a_{2n} = 0}$$

3.3 D'après le résultat de la question précédente,

$$(2n)\, a_{2n} = 2 \cdot (n\, a_{2n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

La suite $(n\, a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ a donc sa suite extraite des termes d'indices pairs de limite nulle. Par ailleurs, puisque $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est supposée positive, décroissante et de limite nulle,

$$0 \leq (2n+1)a_{2n+1} \leq (2n+1)a_{2n} = (2n\, a_n) + a_{2n}$$

ce qui prouve par majoration que $\qquad (2n+1)\, a_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

La suite $(n\, a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ a donc également sa suite extraite des termes d'indices impairs de limite nulle. Par conséquent,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} n\, a_n = 0}$$

3.4 D'après le calcul (transformée d'Abel) effectué à la question **1.3** pour tout entier n,

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k - n\, a_{n+1}$$

La série $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ converge donc la quantité $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ a une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$. De plus,

$$n\, a_{n+1} = \frac{n}{n+1} \cdot ((n+1)a_{n+1}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Par somme de quantité convergentes, $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k$ a une limite finie lorsque n tend vers $+\infty$. Autrement dit,

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geq 1} b_n \text{ converge.}}$$

3.5 Il suffit de passer à la limite dans l'égalité de la question **1.3** pour obtenir la réponse.

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n}$$

4.1 Pour tout entier $m \in \mathbb{N}^*$,
$$A_m - m\, a_{n+1} = \sum_{k=1}^{m} (a_k - a_{n+1})$$

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ étant décroissante, la quantité $a_k - a_{n+1}$ est positive pour tout $k \leq n+1$. Par somme de termes positifs, on a donc pour $n \geq m$,

$$\sum_{k=1}^{m} (a_k - a_{n+1}) \leq \sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n} a_k - n\, a_{n+1}$$

Or, ce dernier terme est égal à B_n d'après **1.3**. Finalement,

$$\boxed{\forall 1 \leq m \leq n \in \mathbb{N}^*, \qquad B_n \geq A_m - m\, a_{n+1}}$$

4.2 Puisque la série à termes positifs $\sum_{n\geq 1} b_n$ est convergente, elle est majorée. Il existe donc un réel K tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad B_n \leq K$$

En particulier, avec le résultat de la question précédente, pour tout entier $m \in \mathbb{N}^*$, et tout $n \geq m$,

$$A_m - m\, a_{n+1} \leq K$$

En fixant m et en faisant tendre n vers $+\infty$, il vient donc puisque a est de limite nulle

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \qquad A_m \leq K$$

ce qui montre que la série à termes positifs $\sum_{n\geq 1} a_n$ a ses sommes partielles majorées. Par suite,

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geq 1} a_n \text{ converge.}}$$

4.3 Il suffit de remarquer qu'on est maintenant ramené au cas de la question 3. Par conséquent,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n}$$

PSI E3A 2 2012

Exercice 3

1 Remarquons que lorsque n tend vers $+\infty$,

$$v_n = \ln(n+1) - \ln = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} = u_n$$

De plus, la série $\sum\limits_{n\geq 1} 1/n$ est divergente d'après Riemann. Le résultat admis assure alors que

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln k)$$

Le série de droite est une série téléscopique. Par conséquent,

$$\sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln k) = \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$$

Finalement $\boxed{H_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n}$

2.1 Posons pour tout $n \geq 2$, $v_n = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln n)$

Par téléscopage, pour tout entier $n \geq 2$

$$\sum_{k=2}^{n} v_k = \ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln 2) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

ce qui prouve que la série $\sum\limits_{n\geq 2} v_k$ diverge.

Par ailleurs, lorsque n tend vers $+\infty$,

$$v_n = \ln\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right) = \ln\left(\frac{\ln(n) + \ln(1+1/n)}{\ln n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{\ln n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$$

puis $$v_n = \ln\left(1+\frac{1}{\ln n}\left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n\ln n} + O\left(\frac{1}{n^2 \ln n}\right)\right)$$

et finalement $$v_n = \frac{1}{n\ln n} + O\left(\frac{1}{n^2\ln n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n\ln n}$$

La propriété (R) assure aussitôt le résultat.

$$\boxed{\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln n)}$$

2.2 D'après le résultat de la question précédente,

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

Ainsi, $\boxed{\text{La série } \sum\limits_{k\geq 2} \frac{1}{k\ln k} \text{ diverge.}}$

2.3 C'est une application classique de la comparaison série intégrale qui a déjà fait l'objet de l'exercice précédent (voir question 2.2). On ne la rédige pas une nouvelle fois.

3.1 Il est clair que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée (car constante) et puisqu'elle ne tend pas vers 0, la série $\sum_{n\geq 1} a_n$ diverge grossièrement. Ainsi,

$$\boxed{\text{La suite } (a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ vérifie } (P).}$$

Par définition, $$\forall n \geq 1, \qquad A_k = \sum_{k=1}^{n} 1 = n \qquad \text{d'où} \qquad \forall n \geq 2, \qquad b_n = \frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

Compte tenu de l'équivalent obtenu à la question 1,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} b_n = 1}$$

3.2 Par Riemann, $\sum_{n\geq 1} 1/n$ diverge ce qui suffit à justifier que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifie (P) (les autres vérifications sont triviales). Par ailleurs, avec ce choix de suite,

$$\forall n \geq 1, \qquad A_k = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n \qquad \text{d'où} \qquad \frac{a_n}{A_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n\ln n}$$

Le résultat de la question 2.2 permet d'appliquer la propriété (R) et ainsi, combiné à l'équivalent de la question 2.1 d'obtenir

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{A_k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln n)$$

Pour finir, puisque $A_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$, on peut écrire

$$A_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln n(1+o(1)) \qquad \text{d'où} \qquad \ln A_n = \ln(\ln n) + \ln(1+o(1)) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(\ln n)$$

et finalement, une nouvelle fois $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} b_n = 1}$$

4.1 Il suffit de remarquer que $A_n \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \frac{A_{n-1}}{A_n} = \frac{A_n - a_n}{A_n} = 1 - \frac{a_n}{A_n}$$

La série étant divergente et à termes positifs, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est de limite $+\infty$ tandis que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée par hypothèse. Par suite,

$$\frac{a_n}{A_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad \text{puis} \qquad \frac{A_{n-1}}{A_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

soit $$\boxed{A_{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} A_n}$$

4.2 Par définition, pour tout $n \geq 2$,

$$\ln\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right) = -\ln\left(\frac{A_{n-1}}{A_n}\right) = -\ln\left(1 - \frac{a_n}{A_n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a_n}{A_n}$$

et puisque l'on a justifié que a_n/A_n tend vers 0,

$$\boxed{\ln\left(\frac{A_n}{A_{n-1}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{a_n}{A_n}}$$

4.3 La positivité de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ prouve que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante. Ainsi, $\sum_{n\geq 2}\ln(A_n/A_{n-1})$ est une série à termes positifs. De plus, par téléscopage,

$$\sum_{k=2}^{n}\ln(A_k/A_{k-1}) = \sum_{k=2}^{n}(\ln A_k - \ln A_{k-1}) = \ln A_n - \ln A_1$$

Comme $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$, on peut conclure que $\sum_{n\geq 2}\ln(A_n/A_{n-1})$ diverge et conclure par théorème de comparaison de séries à termes positifs à l'aide de l'équivalent de la question 4/2.

$$\boxed{\text{La série } \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{A_n} \text{ diverge.}}$$

Remarque 3

Plus généralement, on peut démontrer que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{{A_n}^{\alpha}}$ diverge si et seulement si $\alpha > 1$ ce qui généralise le critère de Riemann.

4.4 La propriété (R) s'applique immédiatement et prouve que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{A_k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln A_n$$

ce qui prouve une dernière fois que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 1}$

5 D'après ce qui précède, il sufit de poser $\qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad v_n = \dfrac{u_n}{S_n}$

où $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ désigne la suite des sommes partielles de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$.

- La divergence de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ assure que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$, donc que $u_n/S_n = o(u_n)$.
- Le résultat de la question 4.3 assure que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} v_n$ est toujours une série convergente.

Pour toute série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ à termes positifs divergente, il existe une série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} v_n$ à termes positifs et divergente telle que $v_n = o(u_n)$.

Quatrième partie

4.1 Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un rang N tel que :

$$\forall n \geqslant \mathrm{N} \qquad |a_n| \leqslant \varepsilon$$

Posons $\mathrm{M} = \sum\limits_{k=0}^{\mathrm{N}-1} \lambda_k\, a_k$. Alors, pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$, on a

$$\left| \frac{\sum\limits_{k=0}^{\mathrm{N}-1} \lambda_k\, a_k + \sum\limits_{k=\mathrm{N}}^{n} \lambda_k\, a_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k} \right| \leqslant \frac{\mathrm{M}}{\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k} + \varepsilon\, \frac{\sum\limits_{k=\mathrm{N}}^{n} \lambda_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k} \leqslant \frac{\mathrm{M}}{\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k} + \varepsilon$$

Puisque la série $\sum \lambda_k$ diverge vers $+\infty$, il existe un entier N' tel que, pour tout $n \geqslant \mathrm{N}'$,

$$\frac{\mathrm{M}}{\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k} \leqslant \varepsilon$$

Ainsi, pour tout $n \geqslant \max(\mathrm{N}, \mathrm{N}')$, la fraction étudiée est inférieure à 2ε en valeur absolue. On a donc prouvé

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} \lambda_k\, a_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k} = 0}$$

> Cette propriété est une généralisation d'un théorème de Cesàro bien connu. Elle permet par exemple de prouver que, si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers une limite ℓ, alors la suite de terme général
>
> $$v_n = \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k}$$
>
> converge également vers ℓ. De nombreux exercices sont basés sur ce résultat.

4.2 Prouvons la propriété demandée par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons

$$\mathscr{P}(n) \quad : \qquad \forall k \in \mathbb{N} \quad (\Delta^n u)_k = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} u_{k+i}$$

- $\underline{\mathscr{P}(0)}$ est vraie par définition de Δ^0.
- $\underline{\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)}$: supposons la propriété vraie à un rang n. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} (\Delta^{n+1}u)_k &= (\Delta^n u)_k - (\Delta^n u)_{k+1} \\ &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} u_{k+i} - \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} u_{k+i+1} \\ (\Delta^{n+1}u)_k &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} u_{k+i} + \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i \binom{n}{i-1} u_{k+i} \end{aligned}$$

On utilise alors la formule classique de combinatoire, pour $1 < i \leqslant n$:

$$\binom{n}{i} + \binom{n}{i-1} = \binom{n+1}{i}$$

pour regrouper les termes communs aux deux sommes. Quant au premier terme de la première somme et au dernier terme de la seconde, on utilise les valeurs

$$\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} = 1 \qquad \text{et} \qquad \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} = 1$$

pour les intégrer dans la même somme :

$$(\Delta^{n+1}u)_k = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \binom{n+1}{i} u_{k+i}$$

ce qui prouve $\mathscr{P}(n+1)$.

- Conclusion : $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \qquad (\Delta^n u)_k = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} u_{k+i}}$$

4.3 Comme toute suite convergente, la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée. Notons M un majorant de la suite des valeurs absolues : pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a donc $|a_k| \leqslant \mathrm{M}$.

Fixons un entier n. On a $(\Delta^n a)_k = \sum\limits_{i=0}^{n} (-1)^i \dbinom{n}{i} a_{k+i}$. Or, dans cette somme finie (à $n+1$ termes), chaque terme tend vers 0 quand k tend vers l'infini. On a donc

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \qquad \lim_{k\to\infty} (\Delta^n a)_k = 0}$$

Fixons maintenant un entier k. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\big|(\Delta^n a)_k\big| \leqslant \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} |a_{k+i}|$$

> On ne peut malheureusement pas utiliser le résultat de la question 4.1, puisque les coefficients de la somme dépendent à la fois de i et de n. Il semble donc qu'il y ait eu une petite erreur dans la conception du sujet, puisque cette question 4.1 ne sert nulle part...

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier N tel que, pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$, on ait $|a_n| \leqslant \varepsilon$. Alors, pour tout $n \geqslant \mathrm{N}$, on a

$$\frac{1}{2^n}\big|(\Delta^n a)_k\big| \leqslant \frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{\mathrm{N}-k-1} \binom{n}{i} |a_{k+1}| + \frac{1}{2^n}\sum_{i=\mathrm{N}-k}^{n} \binom{n}{i} |a_{k+1}|$$

Dans la première somme, on peut majorer très grossièrement chaque $\dbinom{n}{i}$ par $n^{\mathrm{N}-k}$. On se souvient qu'elle possède $\mathrm{N}-k$ termes. Dans la seconde somme, chaque $|a_{k+1}|$ est majoré par ε. Par ailleurs, la somme des coefficients binomiaux est majorée par 2^n. Ainsi, on a

$$\frac{1}{2^n}\big|(\Delta^n a)_k\big| \leqslant \frac{\mathrm{M}}{2^n}(\mathrm{N}-k)n^{\mathrm{N}-k} + \varepsilon$$

Enfin, $n^{\mathrm{N}-k}/2^n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Il existe donc un rang N′ tel que, pour tout $n \geqslant \mathrm{N}'$, on ait $\mathrm{M}(\mathrm{N}-k)n^{\mathrm{N}-k}/2^n \leqslant \varepsilon$. Alors, pour tout $n \geqslant \max(\mathrm{N},\mathrm{N}')$, on a $\left|(\Delta^n a)_k\right| \leqslant 2\varepsilon$.

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{(\Delta^n a)_k}{2^n} = 0}$$

4.4 Fixons un entier k. Alors, pour tout entier N, on a

$$\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} a_n^{(k)} = (-1)^k \left[\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \frac{(\Delta^n a)_k}{2^n} - \sum_{n=1}^{\mathrm{N}+1} \frac{(\Delta^n a)_k}{2^n}\right] = (-1)^k \left[(\Delta^0 a)_k - \frac{(\Delta^{\mathrm{N}+1} a)_k}{2^{\mathrm{N}+1}}\right]$$

et, d'après la question 4.3, cette quantité tend vers $(-1)^k(\Delta^0 a)_k = (-1)^k a_k$ quand N tend vers l'infini.

$$\boxed{\text{La série } \sum_n a_n^{(k)} \text{ converge et } \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)} = (-1)^k\, a_k.}$$

Fixons maintenant un entier n. Pour tout entier K, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\mathrm{K}} a_n^{(k)} &= \sum_{k=0}^{\mathrm{K}} (-1)^k \left[\frac{(\Delta^n a)_k}{2^n} - \frac{(\Delta^n a)_k - (\Delta^n a)_{k+1}}{2^{n+1}}\right]\\
&= \sum_{k=0}^{\mathrm{K}} (-1)^k \left[\frac{(\Delta^n a)_k}{2^n}\left(1-\frac{1}{2}\right) + \frac{(\Delta^n a)_{k+1}}{2^{n+1}}\right]\\
&= \sum_{k=0}^{\mathrm{K}} (-1)^k \left[\frac{(\Delta^n a)_k}{2^{n+1}} + \frac{(\Delta^n a)_{k+1}}{2^{n+1}}\right]\\
&= \sum_{k=0}^{\mathrm{K}} (-1)^k \frac{(\Delta^n a)_k}{2^{n+1}} - \sum_{k=1}^{\mathrm{K}+1} (-1)^k \frac{(\Delta^n a)_k}{2^{n+1}}\\
\sum_{k=0}^{\mathrm{K}} a_n^{(k)} &= \frac{(\Delta^n a)_0}{2^{n+1}} + (-1)^{\mathrm{K}} \frac{(\Delta^n a)_{\mathrm{K}+1}}{2^{n+1}}
\end{aligned}$$

Or, d'après la question 4.3, le dernier terme tend vers 0 lorsque K tend vers l'infini. Cela prouve que

$$\boxed{\text{La série } \sum_k a_n^{(k)} \text{ converge et } \sum_{k=0}^{\infty} a_n^{(k)} = \frac{(\Delta^n a)_0}{2^{n+1}}.}$$

4.5 Montrons par récurrence sur m la propriété

$$\mathscr{P}(m): \qquad \text{la série } \sum_k r_m^{(k)} \text{ converge.}$$

- $\mathscr{P}(0)$: Par définition, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a, d'après la question 4.4 :

$$r_0^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)} = (-1)^k\, a_k$$

La série $\sum r_0^{(k)} = \sum (-1)^k\, a_k$ converge donc d'après le critère de Leibniz.

- $\underline{\mathscr{P}(m) \Longrightarrow \mathscr{P}(m+1)}$: soit m un entier et supposons la propriété $\mathscr{P}(m)$ vraie. Par définition,

$$r_{m+1}^{(k)} = r_m^{(k)} - a_m^{(k)}$$

Or, d'après la question 4.4, la série $\sum\limits_k a_m^{(k)}$ converge, et la série $\sum\limits_k r_m^{(k)}$ converge d'après $\mathscr{P}(m)$. On en déduit la convergence de la série $\sum\limits_k r_{m+1}^{(k)}$, ce qui montre $\mathscr{P}(m+1)$.

- Conclusion : La propriété $\mathscr{P}(m)$ est vraie pour tout $m \in \mathbb{N}$.

$$\boxed{\text{La série } \sum_k r_m^{(k)} \text{ converge pour tout } m \in \mathbb{N}.}$$

4.6 Soit m un entier naturel. Puisque, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $r_{m+1}^{(k)} = r_m^{(k)} - a_m^{(k)}$, on en déduit que $\mathrm{R}_{m+1} = \mathrm{R}_m - \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_m^{(k)}$. D'après le dernier résultat de la question 4.4, cette dernière relation peut également s'écrire

$$\mathrm{R}_m - \mathrm{R}_{m+1} = \frac{(\Delta^m a)_0}{2^{m+1}}$$

Si l'on somme ces égalités pour m variant de 0 à n, les termes en R_m se télescopent et il reste

$$\boxed{\sum_{m=0}^{n} \frac{(\Delta^m a)_0}{2^{m+1}} = \mathrm{R}_0 - \mathrm{R}_{n+1}}$$

Il reste à montrer maintenant la convergence vers 0 de la suite $(\mathrm{R}_m)_{m\in\mathbb{N}}$. Tout d'abord, notons que, pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, il nous est possible d'évaluer $r_m^{(k)}$ selon la même technique que dans la question 4.4 : les termes se télescopent, et ne restent que

$$r_m^{(k)} = \sum_{n=m}^{\infty} a_n^{(k)} = (-1)^k \frac{(\Delta^m a)_k}{2^m}$$

On récrit alors, en utilisant le résultat de la question 4.2

$$\mathrm{R}_m = \frac{1}{2^m} \sum_{k=0}^{\infty} \left((-1)^k \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} a_{k+i} \right)$$

Nous allons maintenant intervertir les deux sommes. Cela ne pose pas de difficulté de principe, puisque la somme intérieure est finie et à nombre fixe de termes. Cependant, on se souvient que l'on ne peut écrire

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\alpha_k^{(1)} + \alpha_k^{(2)} + \cdots + \alpha_k^{(m)} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^{(1)} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^{(2)} + \cdots + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^{(m)}$$

que si les $m+1$ séries du membre de droite sont *convergentes*. Ainsi, l'interversion

$$\mathrm{R}_m = \frac{1}{2^m} \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \binom{m}{i} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_{k+i}$$

est-elle justifiée par le fait que, pour tout $i \in [\![0\,; m]\!]$, la série $\sum (-1)^k a_{k+1}$ converge en vertu du critère de Leibniz.

Par ailleurs, ce même critère permet de majorer la somme de ces séries :

$$\forall i \in [\![\, 0\,;\, m\,]\!] \qquad \left| \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_{k+i} \right| \leqslant |a_i|$$

ce qui permet de majorer ainsi $|\mathrm{R}_m|$:

$$|\mathrm{R}_m| \leqslant \frac{1}{2^m} \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} \; |a_i|$$

Enfin, le fait que la suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tende vers 0 et la même technique que celle employée à la question 4.3 montre que

$$\boxed{\lim_{m\to\infty} \mathrm{R}_m = 0}$$

4.7 Les résultats de la question précédente montrent que la série $\sum\limits_m \dfrac{(\Delta^m a)_0}{2^{m+1}}$ est convergente et que sa somme est R_0. Or, par définition,

$$\mathrm{R}_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \, a_k = \mathrm{S}$$

d'après la question 4.4, ce qui permet de conclure :

$$\boxed{\text{La série } \sum_m \frac{(\Delta^m a)_0}{2^{m+1}} \text{ est convergente et de somme S.}}$$

4.8 Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$(\Delta a)_k = f(k) - f(k+1) = \Delta f(k)$$

en posant
$$\Delta f : x \longmapsto f(x) - f(x+1)$$

De la même façon, on a $(\Delta^2 a)_k = \Delta f(k) - \Delta f(k+1) = (\Delta^2 f)(k)$ en posant

$$\Delta^2 f : x \longmapsto \Delta f(x) - \Delta f(x+1)$$

On définit ainsi par récurrence la fonction $\Delta^{n+1} f : x \mapsto (\Delta^n f)(x) - (\Delta^n f)(x+1)$ et on a, pour tous entiers k et n :

$$(\Delta^n a)_k = (\Delta^n f)(k)$$

> Il suffit maintenant de prouver que chaque fonction $\Delta^n f$ est positive. Malheureusement, chaque fonction $\Delta^n f$ est donnée par une différence de fonction $\Delta^{n-1} f$, dont le comportement dépend de $(\Delta^{n-1} f)'$. Il faut donc démontrer également par récurrence la négativité de chaque fonction $(\Delta^n f)'$. Par le même raisonnement, il faut prouver la positivité de chaque $(\Delta^n f)''$ et ainsi de suite.
>
> Au final, la propriété à établir par récurrence fait intervenir l'ensemble de toutes les dérivées des fonctions $\Delta^n f$.

Montrons par récurrence sur n la propriété $\mathscr{P}(n)$: $\forall k \in \mathbb{N} \quad (-1)^k\,(\Delta^n f)^{(k)} \geqslant 0$.

- $\underline{\mathscr{P}(0)}$ est vraie par hypothèse.
- $\underline{\mathscr{P}(n) \Longrightarrow \mathscr{P}(n+1)}$: soit n un entier et supposons la propriété $\mathscr{P}(n)$ vraie. Soit $k \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, le théorème des accroissements finis assure de l'existence d'un réel $\xi \in \left]\,x\,;x+1\,\right[$ tel que

  $$(\Delta^{n+1} f)^{(k)}(x) = (\Delta^n f)^{(k)}(x) - (\Delta^n f)^{(k)}(x+1) = -(\Delta^n f)^{(k+1)}(\xi)$$

  Si k est pair, alors $(\Delta^n f)^{(k+1)(\xi)}$ est négatif et donc $(\Delta^{n+1} f)^{(k)}(x) \geqslant 0$. Si k est impair, c'est le contraire.

  Ceci étant vrai pour tout choix de $x \geqslant 0$ et de $k \in \mathbb{N}$, on a bien prouvé la propriété $\mathscr{P}(n+1)$.
- Conclusion : la propriété $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La positivité de chaque fonction $\Delta^n f$ montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{(\Delta^n a)_k = (\Delta^n f)(k) \geqslant 0}$$

Enfin, pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a, par positivité de $(\Delta^m a)_1$:

$$(\Delta^{m+1} a)_0 = (\Delta^m a)_0 - (\Delta^m a)_1 \leqslant (\Delta^m a)_0$$

ce qui prouve que la suite $\big((\Delta^m a)_0\big)$ est décroissante. Chaque terme de cette suite est donc plus petit que le premier terme $(\Delta^0 a)_0 = a_0$. En divisant par 2^{m+1},

$$\boxed{\forall m \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant \frac{(\Delta^m a)_0}{2^{m+1}} \leqslant \frac{a_0}{2^{m+1}}}$$

$\boxed{\textbf{4.9}}$ Tout d'abord, notons que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$ vérifie bien les hypothèses de la question 4.8, puisque ses dérivées successives sont de signe alterné. D'après la question 4.7, la série $\sum\limits_m \dfrac{(\Delta^m a)_0}{2^{m+1}}$ converge et a pour somme

$$\boxed{\mathrm{S} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2)}$$

On retrouve donc l'expression de $\ln(2)$ que l'on avait établie dans la question 1.1.

Pour tout entier M, notons $\mathrm{R_M}$ le reste de la série étudiée :

$$\mathrm{R_M} = \sum_{m=\mathrm{M}+1}^{\infty} \frac{(\Delta^m a)_0}{2^{m+1}}$$

La majoration de la question 4.8 permet ici d'écrire

$$\forall m \in \mathbb{N} \qquad 0 \leqslant \frac{(\Delta^m a)_0}{2^{m+1}} \leqslant \frac{1}{2^{m+1}}$$

ce qui conduit à la majoration du reste :

$$|\mathrm{R_M}| \leqslant \sum_{m=\mathrm{M}+1}^{\infty} \frac{1}{2^{m+1}} = \frac{1}{2^{\mathrm{M}+1}}$$

Ainsi, on aura une approximation de $\ln(2)$ à un réel $\varepsilon > 0$ près dès que l'on calculera une somme partielle d'ordre M tel que $2^{-(\mathrm{M}+1)} \leqslant \varepsilon$, c'est-à-dire pour

$$\mathrm{M} = \mathrm{E}\left(\frac{-\ln(\varepsilon)}{\ln(2)}\right) + 2$$

Pour calculer les quantités $(\Delta^i a)_0$ pour $i = 0, \ldots, \mathrm{M}$, il est nécessaire d'effectuer $\mathrm{M}(\mathrm{M}+1)/2$ soustractions. Cependant, c'est un prix à payer qui est bien petit lorsqu'on le compare au fait que le nombre de termes à sommer ne croît que *logarithmiquement* avec la précision. (Pour mémoire, la méthode de la question 1.8 nous donnait un nombre de termes à évaluer et sommer qui croissait comme la racine de la précision.)

On a donc encore, avec cette méthode, un réel accroissement d'efficacité.

Ainsi, pour $\varepsilon = 10^{-10}$, il fallait environ 50 000 termes dans la méthode la question 1.8. Dans cette méthode, il n'en faut que 31 ; notons que ces termes nécessitent cependant 465 soustractions pour être calculés, ainsi que le calcul des coefficients binomiaux, qui est assez long si l'on n'opère pas astucieusement, ainsi que cela sera présenté à la fin de la dernière partie.