

1 _____ (**) _____

Soient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et f des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f .

- Soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application quelconque. Montrer que $(f_n \circ \phi)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f \circ \phi$.
- La suite $(\phi \circ f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge-t-elle nécessairement uniformément vers $\phi \circ f$?
- Même question en supposant ϕ continue ? lipschitzienne ?

- Soit $\epsilon > 0$. Par définition de la convergence uniforme,

$$\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad |f_n(t) - f(t)| \leq \epsilon$$

$$\text{En particulier,} \quad \forall n \geq N, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f_n(\phi(x)) - f(\phi(x))| = |(f_n \circ \phi)(x) - (f \circ \phi)(x)| \leq \epsilon$$

Cette dernière majoration montre bien que

$$\boxed{\text{La suite } (f_n \circ \phi)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge uniformément vers } f \circ \phi.}$$

- Prenons $\phi : x \mapsto x^2$ et $f_n : x \mapsto x + 1/n$, définies sur $\mathbb{R}$. On vérifie facilement que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction identité sur $\mathbb{R}$ car $\|f_n - I_d\|_\infty = 1/n$. Cependant, pour tout entier n et tout réel x

$$(\phi \circ f_n)(x) = \left(x + \frac{1}{n}\right)^2 - x^2 = \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2}$$

qui n'est jamais borné sur $\mathbb{R}$. Ainsi, la convergence ne peut être uniforme.

$$\boxed{\text{La suite } (\phi \circ f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ne converge pas nécessairement uniformément vers } \phi \circ f.}$$

- L'hypothèse de continuité change rien, puisque le contre-exemple de la question précédente convient encore. Supposons maintenant ϕ lipschitzienne et montrons qu'alors, $(\phi \circ f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\phi \circ f$. Par hypothèse, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |\phi(x) - \phi(y)| \leq M |x - y|$$

et notamment pour tout entier n et tout réel x ,

$$|\phi(f_n(x)) - \phi(f(x))| = |(\phi \circ f_n)(x) - (\phi \circ f)(x)| \leq M |f_n(x) - f(x)| \leq M \|f_n - f\|_\infty$$

et en particulier,

$$\|\phi \circ f_n - \phi \circ f\|_\infty \leq M \|f_n - f\|_\infty$$

Puisque $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f , le terme de droite est de limite nulle quand n tend vers $+\infty$. Il en est donc de même pour celui de gauche, ce qui prouve que

$$\boxed{\text{Si } \phi \text{ est lipschitzienne, alors } (\phi \circ f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge uniformément vers } \phi \circ f.}$$

2 _____ (*) _____

Soit $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et telle que $f(1) = 0$. On pose $g_n : x \mapsto x^n f(x)$ pour tout entier n . Montrer que la suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0.

Soit $\epsilon > 0$. Par continuité de f en 1,

$$\exists \eta > 0, \quad \forall x \in [1 - \eta; 1], \quad |f(x)| < \epsilon$$

et en particulier $\forall x \in [1 - \eta; 1], \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |f_n(x)| < \epsilon \quad \text{d'où} \quad \|f_n\|_{\infty, [1-\eta; 1]} < \epsilon$

Reste à majorer f_n sur $[0; 1 - \eta]$. Notons que puisque f est continue sur le segment $[0; 1]$, elle est bornée. Dès lors, pour tout entier n , on peut écrire que

$$\|f_n\|_{\infty, [0; 1-\eta]} \leq \|f\|_\infty \cdot (1 - \eta)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Ainsi, $\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad \|f_n\|_{\infty, [0; 1-\eta]} \leq \epsilon$

Dès lors, pour $n \geq N$, $\|f_n\|_\infty = \max \left(\|f_n\|_{\infty, [0; 1-\eta]}, \|f_n\|_{\infty, [1-\eta; 1]} \right) < \epsilon$

ce qui établit donc que

$$\boxed{\text{La suite de fonctions } (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge uniformément vers 0.}}$$

3 _____ (*) _____

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues convergeant uniformément vers f sur un segment $[a; b]$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de points de $[a; b]$ convergeant vers $x \in [a; b]$. Montrer que $f_n(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$.

Donner un contre-exemple si la convergence n'est pas uniforme.

Soit $\epsilon > 0$. Par définition de la convergence uniforme,

$$\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N, \quad \forall x \in [a; b], \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

et en particulier $\forall n \geq N, \quad |f_n(x_n) - f(x_n)| < \epsilon$

Par ailleurs, f est continue puisque limite uniforme de fonctions continues, et par caractérisation séquentielle de la continuité, sachant que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers x ,

$$\exists N' \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geq N', \quad |f(x_n) - f(x)| < \epsilon$$

Dès lors, pour $n \geq \max(N, N')$,

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)| < 2\epsilon$$

Le réel ϵ ayant été pris arbitraire, on en déduit que

La suite $(f_n(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.

Pour trouver un contre-exemple lorsque la convergence n'est plus uniforme, considérons les suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par

$$x_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = 1 - \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^n$$

La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0; 1]$ vers la fonction nulle sur $[0; 1[$ et valant 1 en 1. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1, mais pour $n \geq 1$,

$$f_n(x_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left[n \cdot \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right] = \exp\left(-1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1} \neq f(1)$$

Le résultat n'est pas nécessairement conservé si la convergence n'est pas uniforme.

4 _____ (***) _____ **PC CCP 2003**

On définit la suite de fonctions $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par morceaux en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$

$$\forall x \in \left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right], \quad \chi_n(x) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \left(1 + x - \frac{k}{n}\right)$$

(a). Montrer que χ_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ pour tout entier n et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx-1} \leq \chi_n(x) \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx+1}$$

(b). En déduire que $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction exponentielle.

(c). Montrer que $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}_+$.

(d). Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n - \chi_n(n)$. En déduire que $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

(a). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il est clair que χ_n est continue sur $]k/n; (k+1)/n[$ pour tout entier k . Il reste donc à vérifier la continuité en k/n pour $k \in \mathbb{N}^*$. Mais par définition,

$$\lim_{x \rightarrow (k/n)^-} \chi_n(x) = \lim_{x \rightarrow (k/n)^-} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k-1} \left(1 + x - \frac{k-1}{n}\right) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k$$

et

$$\lim_{x \rightarrow (k/n)^+} \chi_n(x) = \lim_{x \rightarrow (k/n)^+} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \left(1 + x - \frac{k}{n}\right) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k$$

ce qui prouve la continuité en k/n . Ainsi,

La fonction χ_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ pour tout entier n .

Soit maintenant $x \in \mathbb{R}_+$ et k l'unique entier tel que $x \in [k/n; (k+1)/n[$ (précisément, $k = \lfloor nx \rfloor$). Par définition de χ_n et de k , on a

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \leq \chi_n(x) \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{k+1} \quad \text{et} \quad k \leq nx < k+1 \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} k+1 \leq nx+1 \\ nx-1 \leq k \end{cases}$$

Sachant que pour tout $\alpha > 1$, l'application $t \mapsto \alpha^t$ est croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit aussitôt le résultat avec $\alpha = 1+1/n$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx-1} \leq \chi_n(x) \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx+1}$$

(b). Fixons $x \in \mathbb{R}_+$ et $\epsilon \in \{-1, 1\}$. Alors,

$$\ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx+\epsilon} = (nx+\epsilon) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = (nx+\epsilon) \left(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = x + O\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$$

et donc
$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx+\epsilon} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp(x)$$

Cette limite étant valable pour $\epsilon = 1$ et $\epsilon = -1$, l'encadrement précédent assure que $(\chi_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\exp(x)$. Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

La suite $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction exponentielle.

(c). Fixons $n \in \mathbb{N}^*$, un segment $I = [a; b]$ de $\mathbb{R}_+$ et notons

$$f_n : x \mapsto (nx+1) \ln(1+1/n) \quad \text{et} \quad g_n : x \mapsto (nx-1) \ln(1+1/n)$$

de sorte que

$$\exp \circ g_n \leq \chi_n \leq \exp \circ f_n$$

Pour établir la convergence uniforme de $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers $\exp$ sur tout segment, il suffit de montrer celle de $(\exp \circ g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\exp \circ f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers $\exp$. On se contente de la première, la seconde étant similaire. Pour tout $x \in I$,

$$f_n(x) - x = \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) + x \left(n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1\right)$$

d'où
$$|f_n(x) - x| \leq \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) + b \left|n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1\right|$$

Le terme de droite est de limite nulle lorsque n tend vers $+\infty$ et est indépendant de x , ce qui prouve la convergence uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers la fonction identité sur tout segment de $\mathbb{R}_+$.

L'inégalité des accroissements finis appliquée à la fonction exponentielle donne maintenant pour tout réel x

$$|\exp(f_n(x)) - \exp x| \leq |f_n(x) - x| \left(\sup_{t \in [f_n(x); x]} \exp(t) \right)$$

On majore à nouveau les quantités de droite indépendamment de $x \in [a; b]$ grossièrement :

$$|x| \leq b \quad |f_n(x)| \leq u_n = (nb+1) \ln(1+1/n)$$

puis par croissance de $\exp$,

$$\sup_{t \in [f_n(x); x]} \exp(t) \leq \exp[\max(b, u_n)]$$

Finalement,

$$\|\chi_n - \exp\|_{\infty, [a; b]} \leq \|f_n - I_d\|_{\infty, [a; b]} \exp[\max(b, u_n)]$$

Notons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers b donc est bornée. Ainsi, $(\exp \max(b, u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, ce qui conjuguée à la convergence uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers l'identité sur $[a; b]$ implique celle de $(\exp \circ f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers $\exp$ sur ce même segment. D'après tout ce qui précède, on peut donc conclure :

La suite $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}_+$ vers la fonction exponentielle.

(d). Pour tout entier $n \geq 1$, $n \in [n^2/n; (n^2+1)/n]$ donc par définition,

$$\chi_n(n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} = \exp \left[n^2 \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right] = \exp \left[n - \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right] \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-1/2} \cdot e^n$$

Par conséquent,
$$e^n - \chi_n(n) \sim (1 - e^{-1/2}) \cdot e^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

Dès lors,
$$\|\chi_n - \exp\|_{\infty} \geq |e^n - \chi_n(n)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

et ainsi

La convergence de $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

5

(**)

PC CCP 2003

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_0(x) = x$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1}(x) = \sin u_n(x)$$

Etudier les différents modes de convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On peut commencer par remarquer que $u_1(x) = \sin x \in [-1; 1]$ qui est stable par $\sin$. Par conséquent, la suite $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[-1; 1]$ à partir du rang 1. Or, sur cet intervalle, la fonction $\sin$ est strictement croissante donc $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone. Elle est donc convergente car bornée et sa limite est un point fixe de $\sin$ sur cet intervalle. Puisque 0 est le seul point fixe de $\sin$ sur $[-1; 1]$ (et même sur $\mathbb{R}$, par une étude de fonction élémentaire), il vient que $(u_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. Ceci étant vrai pour tout réel x ,

La suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

Montrons maintenant que la convergence est uniforme. Par croissance de $\sin$ sur $[-1; 1]$, on a pour tout réel x

$$-1 \leq u_1(x) \leq 1 \quad \text{donc} \quad -\sin(1) = u_1(-1) \leq u_2(x) \leq \sin 1 = u_1(1)$$

Une récurrence immédiate sur n avec les mêmes arguments prouve que

$$\forall n \geq 1, \quad u_{n-1}(-1) \leq u_n(x) \leq u_{n-1}(1) \quad \text{d'où} \quad \|u_n\|_\infty \leq u_{n-1}(1)$$

D'après la convergence simple de la suite, la suite $(u_n(1))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0, ce qui assure compte tenu de la majoration précédente que

La suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

6

(**)

MP TPE 2001

On définit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $P_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_{n+1} = P_n + \frac{1}{2}(X - P_n^2)$

(a). Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P_{n+1}(x) - \sqrt{x} = (P_n(x) - \sqrt{x}) \left[1 - \frac{1}{2}(P_n(x) + \sqrt{x}) \right]$$

Etablir une formule similaire pour $P_{n+1}(x) + \sqrt{x}$.

(b). En déduire que pour tout $x \in [0; 1]$ et tout entier n

$$\sqrt{x} \leq P_{n+1}(x) \leq P_n(x) \leq 1$$

puis la convergence simple de $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0; 1]$.

(c). En étudiant le sens de variation de $x \mapsto P_n(x) - \sqrt{x}$ et celui de $x \mapsto P_n(x) + \sqrt{x}$ sur $[0; 1]$, déterminer $\|P_n - \sqrt{\cdot}\|_{\infty, [0; 1]}$.

(d). En déduire que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0; 1]$.

(a) Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors, $x - P_n(x)^2 = (\sqrt{x} - P_n(x))(\sqrt{x} + P_n(x))$

d'où
$$P_{n+1}(x) - \sqrt{x} = (P_n(x) - \sqrt{x}) + \frac{1}{2}(\sqrt{x} - P_n(x))(\sqrt{x} + P_n(x))$$

soit bien après factorisation

$$P_{n+1}(x) - \sqrt{x} = (P_n(x) - \sqrt{x}) \left[1 - \frac{1}{2}(P_n(x) + \sqrt{x}) \right]$$

De la même manière, on établit que

$$P_{n+1}(x) + \sqrt{x} = (P_n(x) + \sqrt{x}) \left[1 - \frac{1}{2}(P_n(x) - \sqrt{x}) \right]$$

(b) Soit $x \in [0; 1]$ et n un entier quelconque. On suppose que $\sqrt{x} \leq P_n(x) \leq 1$. D'après la question précédente,

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \underbrace{\frac{1}{2}(x - P_n(x)^2)}_{\leq 0} \leq P_n(x)$$

De plus, on a $P_n(x) + \sqrt{x} \leq 2$ sur $[0; 1]$ donc

$$P_{n+1}(x) - \sqrt{x} = \underbrace{(P_n(x) - \sqrt{x})}_{\geq 0} \left[1 - \underbrace{\frac{P_n(x) + \sqrt{x}}{2}}_{\leq 1} \right] \geq 0$$

On peut alors conclure par une récurrence puisque $\sqrt{x} \leq P_0(x) \leq 1$ pour tout entier $x \in [0; 1]$.

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in [0; 1], \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, \sqrt{x} \leq P_{n+1}(x) \leq P_n(x) \leq 1.}$$

Pour tout $x \in [0; 1]$ fixé, la suite $(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante et minorée donc convergente. Notons $\ell(x)$ sa limite. Pour tout entier n , on a

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x - P_n(x))^2$$

donc en passant à la limite, il vient

$$\ell(x) = \ell(x) + \frac{1}{2}(x - \ell(x)^2) \quad \text{soit} \quad \ell(x)^2 = x \quad \text{d'où} \quad \ell(x) = \sqrt{x}$$

car $\ell(x)$ est positif car limite d'une suite de réels positifs. Finalement, $P_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \sqrt{x}$ pour tout x soit

$$\boxed{\text{La suite } (P_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge simplement sur } [0; 1] \text{ vers la fonction racine.}}$$

(c) Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_n : x \mapsto P_n(x) - \sqrt{x}$ et $\psi_n : x \mapsto P_n(x) + \sqrt{x}$

Pour $n = 0$, on a clairement φ_n et ψ_n respectivement décroissante et croissante. Si l'on suppose ce résultat vrai au rang n , la formule de la question (a) montre que φ_{n+1} est un produit de fonctions décroissantes positives, donc est décroissante positive. On démontre de même que ψ_n est croissante. Par récurrence,

$$\boxed{\text{Pour tout entier } n, x \mapsto P_n(x) - \sqrt{x} \text{ est décroissante et } x \mapsto P_n(x) + \sqrt{x} \text{ est croissante.}}$$

D'après la question (b), la fonction $x \mapsto P_n(x) - \sqrt{x}$ est positive. On vient maintenant de montrer qu'elle est décroissante. Par conséquent, elle atteint sa borne supérieure en 0 et

$$\boxed{\|P_n - \sqrt{\cdot}\|_{\infty, [0; 1]} = P_n(0)}$$

(d) Par convergence simple de $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a $(P_n(0))_{n \in \mathbb{N}}$ de limite nulle lorsque n tend vers $+\infty$. D'après l'égalité précédente,

$$\boxed{\text{La suite } (P_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge uniformément sur } [0; 1] \text{ vers la fonction racine.}}$$

7 ————— (**) ————— **TPE MP 2001**

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de polynômes de $\mathbb{R}_m[X]$, convergeant simplement sur $[a; b]$ vers une fonction f . En utilisant l'interpolation de Lagrange en $(m + 1)$ points distincts de $[a; b]$, montrer que f est une fonction polynomiale de degré au plus m et que la convergence est uniforme.

Soient $x_0, \dots, x_m$ une famille de points de $[a; b]$ deux à deux distincts. Notons

$$\forall i \in \llbracket 0; m \rrbracket, \quad L_i = \prod_{j \neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$$

les polynômes interpolateurs de Lagrange aux points $x_0, x_1, \dots, x_m$, pour lesquels on a $P_i(x_j) = \delta_{i,j}$ pour tous $i, j \in \llbracket 0; m \rrbracket$. On sait alors que pour tout $P \in \mathbb{R}_m[X]$,

$$P = \sum_{i=0}^m P(x_i) L_i$$

car la différence admet les $m + 1$ points $x_0, \dots, x_m$ pour racines donc est le polynôme nul. En particulier, on en déduit que pour tout entier n et tout réel $x \in [a; b]$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^m P_n(x_i) L_i(x)$$

Par hypothèse de convergence simple, la suite $(P_n(x_i))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, de limite $f(x_i)$ et ce pour tout $i \in \llbracket 0; m \rrbracket$. On en déduit donc que

$$P_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^m f(x_i) L_i(x) \quad \text{d'où} \quad f(x) = \sum_{i=0}^m f(x_i) L_i(x)$$

Dès lors, puisque $f(x_i)$ ne dépend pas de x et que L_i est un polynôme,

La fonction f est une application polynomiale de degré au plus m .

Pour établir que la fonction est uniforme, notons que L_i est continue donc bornée sur $[a; b]$ pour tout i . Par suite, pour tout entier n et tout réel x ,

$$\begin{aligned} |P_n(x) - f(x)| &= \left| \sum_{i=0}^m P_n(x_i) L_i(x) - \sum_{i=0}^m f(x_i) L_i(x) \right| \\ &\leq \sum_{i=0}^m |P_n(x_i) - f(x_i)| |L_i(x)| \\ |P_n(x) - f(x)| &\leq \sum_{i=0}^m |P_n(x_i) - f(x_i)| \|L_i\|_{\infty, [a; b]} \end{aligned}$$

et donc

$$\|P_n - f\|_{\infty} \leq \sum_{i=0}^m |P_n(x_i) - f(x_i)| \|L_i\|_{\infty, [a; b]}$$

Le terme de droite est une somme finie de quantité de limite nulle (car $P_n(x_i) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x_i)$) donc de limite nulle. Par conséquent,

La suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a; b]$.

8 _____ (*) _____

Etudier suivant l'intervalle de définition les différents types de convergence des sommes

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^2 x} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} x e^{-n^2 x}$$

Déterminer ensuite leurs limites en 0^+ .

Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$ $f_n : x \mapsto e^{-n^2 x}$ et $g_n : x \mapsto x f_n(x)$

La suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend vers 0 que si $x > 0$, auquel cas elle est dominée par $1/n^2$ lorsque n tend vers $+\infty$. En ce qui concerne $(g_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$, il en va de même à l'exception du cas $x = 0$ pour lequel la suite est nulle. Par suite,

Les séries $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ et $\sum_{n \geq 0} g_n(x)$ sont convergentes respectivement pour $x > 0$ et $x \geq 0$.

L'étude des variations de g_n montrent que celle-ci est positive et atteint son maximum en $x = 1/n^2$ d'où $\|g_n\|_{\infty, \mathbb{R}_+} = 1/(en^2)$.

On a donc convergence normale de $\sum_{n \geq 0} g_n$ sur $\mathbb{R}_+$, et la somme est continue sur $\mathbb{R}_+$. Par suite, comme $\sum_{n=0}^{+\infty} g_n(0) = 0$,

La fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} g_n$ est de limite nulle en 0.

On va maintenant chercher un équivalent de $F = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ en 0 par comparaison-série intégrale. Fixons $x > 0$. Pour tout entier n ,

$$e^{-(n+1)^2 x} \leq \int_n^{n+1} e^{-t^2 x} dt \leq e^{-n^2 x}$$

En sommant pour n allant de 0 à $+\infty$ (toutes les séries convergent, le terme général étant dominé par $1/n^2$), on obtient l'encadrement

$$F(x) - 1 \leq \int_0^{+\infty} e^{-t^2 x} dt \leq F(x) \quad \text{soit} \quad \int_0^{+\infty} e^{-t^2 x} dt \leq F(x) \leq 1 + \int_0^{+\infty} e^{-t^2 x} dt$$

Or, par changement de variable affine $u = \sqrt{x}t$, on a

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2 x} dt = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$$

et donc, par encadrement

$$F(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}$$

En particulier,

$$\text{La fonction } \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \text{ est de limite } +\infty \text{ en } 0^+.$$

9 _____ (**) _____

Soit $\alpha > 0$. On note $I =]-\alpha; \alpha[$ et on considère $f \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$ et $\lambda \in]0; 1[$. Déterminer les fonctions φ continues sur I et telles que

$$\forall x \in I, \quad \varphi(x) - \varphi(\lambda x) = f(x) \quad (\star)$$

Raisonnons par analyse-synthèse en considérant φ continue sur I vérifiant $(\star)$. Soit $x \in I$. Alors, pour tout entier n , $\lambda^n x \in I$ et ainsi

$$\varphi(\lambda^n x) - \varphi(\lambda^{n+1} x) = f(\lambda^n x)$$

En sommant ces égalités pour n allant de 0 à $N \in \mathbb{N}$, il vient par télescopage

$$\varphi(x) - \varphi(\lambda^{N+1} x) = \sum_{n=0}^N f(\lambda^n x)$$

La fonction f étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, la quantité $f(x)/x$ admet $f'(0)$ pour limite en 0, donc est bornée au voisinage de ce point. Par conséquent,

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} O(x) \quad \text{d'où} \quad f(\lambda^N x) = O(\lambda^N)$$

Cette domination assure que la série $\sum_{n \geq 0} f(\lambda^n x)$ est convergente. Par continuité de φ en 0, on a de plus $\varphi(\lambda^N x)$ qui tend vers $\varphi(0)$ lorsque N tend vers $+\infty$. En passant à la limite, on obtient finalement

$$\forall x \in I, \quad \varphi(x) = \varphi(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} f(\lambda^n x) \quad (\star\star)$$

Réciproquement, vérifions que les fonctions de la forme $(\star\star)$ sont bien continues et solutions de $(\star)$. Pour établir la continuité, on utilise le théorème de continuité des séries de fonctions à $\sum_{n \geq 0} f_n$ avec

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_n : I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(\lambda^n x)$$

Notons $J = [-\alpha/2; \alpha/2]$. La fonction f' est continue donc bornée sur J . Soit donc $m = \|f'\|_{\infty, J}$. En appliquant l'inégalité des accroissements finis entre 0 et x , on obtient

$$\forall x \in J, \quad |f(x)| \leq m|x|$$

Soit maintenant $[a; b]$ un segment de I . Pour n suffisamment grand (le rang ne dépend que de a et b), on a $[\lambda^n a; \lambda^n b] \subset J$ et donc

$$\forall x \in [a; b], \quad \lambda^n x \in J \quad \text{d'où} \quad |f_n(x)| \leq m|x|\lambda^n \leq m \max(|a|, |b|)\lambda^n$$

On a donc justifié que

$$\|f_n\|_{\infty, [a; b]} = O(\lambda^n)$$

ce qui assure la convergence normale sur tout segment de la série $\sum_{n \geq 0} f_n$, et donc la continuité de la somme. Les éléments de la forme $(\star\star)$ sont donc des applications continues. Pour finir, quelle que soit la valeur de $\varphi(0)$, on a par changement d'indice

$$\varphi(x) - \varphi(\lambda x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(\lambda^n x) - \sum_{n=0}^{+\infty} f(\lambda^{n+1} x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(\lambda^n x) - \sum_{n=1}^{+\infty} f(\lambda^n x) = f(x)$$

On peut donc conclure.

Les fonctions φ continues vérifiant $(\star)$ sont celles de la forme

$$\forall x \in I, \quad \varphi(x) = \varphi(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} f(\lambda^n x)$$

avec $\varphi(0)$ arbitraire dans $\mathbb{R}$.

10 _____ (**) _____

Soit f définie par

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{\operatorname{ch}(nx)}$$

Préciser le domaine de définition de f , étudier la continuité de f et donner enfin la limite en $+\infty$ de cette fonction.

Notons pour tout entier n

$$f_n : x \mapsto \frac{\sin(x^2)}{\operatorname{ch}(nx)}$$

La fonction f_n est définie sur $\mathbb{R}$, paire et pour tout $x \geq 0$, on a

$$|\sin(x^2)| \leq x^2 \quad \text{et} \quad \operatorname{ch}(nx) \geq \frac{e^{nx}}{2} \quad \text{d'où} \quad |f_n(x)| \leq 2x^2 e^{-nx}$$

Une étude rapide de fonctions montre que $x \mapsto 2x^2 e^{-nx}$ atteint son maximum sur $\mathbb{R}_+$ en $2/n$ et que ce dernier vaut $8e^{-2}/n^2$. On en déduit via la majoration précédente que $\|f_n\|_\infty = O(1/n^2)$ et la convergence normale de la série de fonction $\sum_{n \geq 0} f_n$ sur $\mathbb{R}_+$, puis sur $\mathbb{R}$ par parité. Par suite,

La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Fixons maintenant $x > 0$ et notons $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch}(nx)}$. Pour tout entier n , on a

$$\frac{1}{\operatorname{ch}((n+1)x)} \leq \int_n^{n+1} \frac{dt}{\operatorname{ch}(tx)} \leq \frac{1}{\operatorname{ch}(nx)}$$

En sommant ces inégalités pour n allant de 0 à $+\infty$ (chaque série converge car le terme général est négligeable devant $1/n^2$), il vient

$$g(x) - \frac{1}{\operatorname{ch}x} \leq \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{ch}(tx)} \leq g(x) \quad \text{soit} \quad \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{ch}(tx)} \leq g(x) \leq \frac{1}{\operatorname{ch}x} + \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{ch}(tx)}$$

L'intégrale se calcule alors facilement

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{ch}(xt)} = \int_0^{+\infty} \frac{2e^{xt}}{(e^{xt})^2 + 1} dt = \left[\frac{2}{x} \arctan(e^{xt}) \right]_0^{+\infty} = \frac{2}{x} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{2x}$$

et par encadrement, compte tenu du fait que $1/\operatorname{ch}(x) = o(1/x)$ en $+\infty$,

$$g(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi}{2x}$$

et ainsi

$$f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\pi \sin(x^2)}{2x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

11

(*)

Pour tout réel x , on pose

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n^2 + x^2}}$$

Étudier le domaine de définition, la continuité et enfin la limite en $+\infty$ de f .

Pour tout entier $n \geq 1$, on note

$$f_n : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{n^2 + x^2}}$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est positive, décroissante et de limite nulle. En vertu du critère spécial de convergence des séries alternées, la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} f_n(x)$ converge et

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il est clair que f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f'_n(x) = \frac{-x}{(n^2 + x^2)^{3/2}} \quad \text{et} \quad f''_n(x) = \frac{2x^2 - n^2}{(n^2 + x^2)^{5/2}}$$

On en déduit les variations de f'_n et notamment le fait que $|f'_n|$ soit maximal en $x = n/\sqrt{2}$ et ainsi que

$$\|(-1)^{n-1} f'_n\|_\infty = \|f'_n\|_\infty = \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{1}{n^2} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

On peut donc appliquer le théorème de dérivation terme à terme des séries de fonctions puisque

- La série $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
- La série $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} f'_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

En vertu du théorème,

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ et donc continue sur $\mathbb{R}$.

Pour déterminer la limite en $+\infty$, il suffit d'appliquer la majoration du reste d'une série alternée. On en déduit aussitôt que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x)| \leq |f_1(x)| = \frac{1}{1+x^2}$$

Par majoration directe,

La fonction f est limite nulle en $+\infty$.

12

(**)

PC X 2009

Soit

$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{x^2 + n^2}$$

- Déterminer le domaine de définition de f .
- Montrer que f est lipschitzienne.
- Donner un équivalent simple de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

- Notons pour tout $n \geq 1$

$$f_n : x \mapsto \frac{x}{x^2 + n^2}$$

Pour tout x non nul, on a $f_n(x) \sim x/n^2$ lorsque n tend vers $+\infty$ donc le critère de Riemann prouve que $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge. Par ailleurs, $f_n(0) = 0$ la série $\sum_{n \geq 1} f_n(0)$ est également convergente. Par conséquent,

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

- Soient x, y appartenant à $\mathbb{R}$ et $n \geq 1$. On peut remarquer que

$$f_n(x) - f_n(y) = \frac{x(y^2 + n^2) - y(x^2 + n^2)}{(x^2 + n^2)(y^2 + n^2)} = (x - y) \frac{n^2 - xy}{(x^2 + n^2)(y^2 + n^2)}$$

Par symétrie des rôles, on peut supposer $|x| \geq |y|$ et alors,

$$|n^2 - xy| \leq n^2 + |xy| \leq n^2 + x^2 \quad \text{et} \quad \left| \frac{n^2 - xy}{(x^2 + n^2)(y^2 + n^2)} \right| \leq \frac{1}{y^2 + n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

Par suite,

$$|f_n(x) - f_n(y)| \leq \frac{1}{n^2} |x - y|$$

En sommant pour $n \geq 1$, on obtient l'encadrement

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f(y)| \leq \frac{\pi^2}{6} |x - y|$$

et donc

La fonction f est lipschitzienne.

Remarque : On pouvait aussi montrer que f était dérivable grâce au théorème de dérivation sous le signe somme, puis que sa dérivée est bornée sur $\mathbb{R}$.

- Fixons $x > 0$ et posons

$$h : t \mapsto \frac{x}{x^2 + t^2}$$

La fonction h est continue, décroissante et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_n^{n+1} h(t) dt \leq h(n) \leq \int_{n-1}^n h(t) dt$$

puis en sommant de 1 à $+\infty$,

$$\int_1^{+\infty} h(t) dt \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} h(t) dt$$

Or pour $a \in \{0, 1\}$,
$$\int_a^{+\infty} h(t) dt = \int_a^{+\infty} \frac{dt/x}{1 + (t/x)^2} = [\arctan(t/x)]_a^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \arctan(a/x)$$

et notamment
$$\int_a^{+\infty} h(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$$

Par encadrement, on a donc

$$\boxed{f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}}$$

13 _____ (**) _____ **PC Mines 2009**

Soit

$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n+x}$$

- (a) Déterminer le domaine de définition de f et la continuité de f sur ce domaine.
 (b) Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0^+ .

- (a) Notons pour tout $n \geq 1$

$$f_n : x \mapsto \frac{e^{-nx}}{n+x}$$

Pour tout réel x , on a $f_n(x) \sim e^{-nx}/n$ lorsque n tend vers 0 . On en déduit immédiatement par croissances comparées que la série $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ diverge grossièrement pour $x < 0$ et converge pour $x > 0$. Pour $x = 0$, le critère de Riemann assure la divergence de la série $\sum_{n \geq 1} f_n(0)$. Ainsi,

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit maintenant $[a; b]$ un segment inclus dans $\mathbb{R}_+^*$. Alors, pour tout $n \geq 1$, $\|f_n\|_{\infty, [a; n]} = f_n(a)$ qui est le terme général d'une série convergente. On a donc convergence normale sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$ de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$. Le théorème de continuité prouve alors que

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

- (b) Pour tout $x > 0$, remarquons que
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n} = -\ln(1 - e^{-x})$$

Considérons donc

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= f(x) + \ln(1 - e^{-x}) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n+x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n} \\ \Delta(x) &= -x \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n(n+x)} \end{aligned}$$

Si l'on définit sur $\mathbb{R}_+^*$ l'application $g_n : x \mapsto e^{-nx}/(n(n+x))$ pour tout $n \geq 1$, on peut remarquer que $\|g_n\|_{\infty} = 1/n^2$ qui est le terme général d'une série convergence. On a donc convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} g_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$, ce qui permet d'appliquer le théorème d'interversion limite/somme et de conclure que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n(n+x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{d'où} \quad \Delta(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$$

De plus, lorsque x tend vers 0 ,

$$\ln(1 - e^{-x}) = \ln(1 - (1 - x + O(x^2))) = \ln(x + O(x^2)) = \ln x + \ln(1 + O(x)) \sim \ln x$$

Avec ce qui précède, on peut donc conclure que

$$\boxed{f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} -\ln x}$$

14

(*)

PC Mines 2016

Soit

$$f : t \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-t\sqrt{n}}$$

- Donner le domaine de définition D de f . Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D .
- Déterminer la limite de f en $+\infty$.
- Déterminer un équivalent lorsque t tend vers 0^+ de $f(t)$.

Fixons $t > 0$. L'application $g_t : u \mapsto e^{-t\sqrt{u}}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_n^{n+1} g_t(u) du \leq g_t(n) \leq \int_{n-1}^n g_t(u) du$$

Notons que g_t est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car dominée par $t \mapsto 1/t^2$ au voisinage de $+\infty$. L'encadrement ci-dessus ne concerne donc que des termes généraux de séries convergentes. Cela permet d'obtenir, en sommant pour n allant de 1 à $+\infty$,

$$\int_1^{+\infty} g_t(u) du \leq f(t) \leq \int_0^{+\infty} g_t(u) du$$

Soit $a \in \{0, 1\}$. En posant $s = t\sqrt{u}$, d'où $u = s^2/t^2$ et $du = 2s ds/t^2$, il vient

$$\int_a^{+\infty} g_t(u) du = \frac{2}{t^2} \int_{t\sqrt{a}}^{+\infty} s e^{-s} ds \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{2}{t^2} \int_0^{+\infty} s e^{-s} ds \quad \text{avec} \quad \int_0^{+\infty} s e^{-s} ds = \Gamma(2) = (2-1)! = 1$$

Finalement, par encadrement

$$f(t) \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{2}{t^2}$$

15

(**)

PC Centrale 2009

Soit

$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{1 + \sqrt{n}}$$

- Déterminer le domaine de définition de f et justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur ce domaine.
- Déterminer la limite de f en $+\infty$ et un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0^+ .

- Notons pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$f_n : x \mapsto \frac{e^{-nx}}{1 + \sqrt{n}}$$

Pour tout réel x , on a $f_n(x) \sim e^{-nx}/\sqrt{n}$ lorsque n tend vers 0. On en déduit immédiatement par croissances comparées que la série $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ diverge grossièrement pour $x < 0$ et converge pour $x > 0$. Pour $x = 0$, le critère de Riemann assure la divergence de la série $\sum_{n \geq 1} f_n(0)$. Ainsi,

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Il est clair que f_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ pour tout entier n , avec pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\forall x > 0, \quad f_n^{(p)}(x) = \frac{(-n)^p e^{-nx}}{1 + \sqrt{n}} \quad \text{puis} \quad \forall [a; b] \subset \mathbb{R}_+^*, \quad \|f_n^{(p)}\|_{\infty, [a; b]} = \frac{n^p e^{-na}}{1 + \sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Appliquons le théorème de dérivabilité de la somme d'une série de fonctions.

- la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$.
- pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, la série $\sum_{n \geq 0} f_n^{(p)}$ converge normalement sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$.

Le théorème peut donc s'appliquer et prouve que

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Appliquons le théorème d'interversion limite/somme en se plaçant sur $[1; +\infty[$. Alors,

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n a une limite en $+\infty$, qui est égale à 1 si $n = 0$ et 0 sinon.
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\|f_n\|_{\infty, [1; +\infty[} = e^{-n}/(1 + \sqrt{n}) = o(1/n^2)$ d'où la convergence normale de la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ sur $[1; +\infty[$.

Le théorème s'applique et prouve que

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est de limite 1 en } +\infty.}$$

Pour obtenir l'équivalent de f en 0^+ , commençons par déterminer un équivalent en 0^+ de

$$g : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}$$

On procède par comparaison série-intégrale. Soit $x \in]0; 1[$. Pour tout entier $n \geq 1$,

$$\int_n^{n+1} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}} dt \leq \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}} \leq \int_{n-1}^n \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}} dt$$

On somme pour n allant de 1 à $+\infty$ (la preuve de la convergence est laissée au lecteur) et il vient

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}} dt \leq g(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{\sqrt{t}} dt$$

Par changement de variable $u = xt$, puis en utilisant l'égalité $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = 2 \int_0^{+\infty} e^{-v^2} dv = \sqrt{\pi}$, il vient

$$g(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}}$$

Majorons maintenant la quantité $\Delta(x) = f(x) - g(x)$. Pour tout $x \in]0; 1[$,

$$\Delta(x) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} \left(\frac{1}{1 + \sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}(1 + \sqrt{n})}$$

et donc

$$|\Delta(x)| \leq 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n} = 1 - \ln(1 - e^{-x})$$

On vérifie facilement que $-\ln(1 - e^{-x}) \sim -\ln x$ lorsque x tend vers 0^+ . Cette quantité étant négligeable devant $1/\sqrt{x}$ au voisinage de 0, on en déduit que $\Delta(x) = o(g(x))$ et donc $f(x) \sim g(x)$. Ainsi,

$$\boxed{f(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}}}$$

16

(***)

PC X 2011

Etudier $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{inx}}{(1 + n^2)(1 + \ln n)}$.

Soit $n \geq 1$. On note

$$f_n : x \mapsto \frac{e^{inx}}{(1 + n^2)(1 + \ln n)}$$

La fonction f_n ainsi définie est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ avec pour tout entier $p \in \mathbb{N}$ et tout réel x

$$f_n^{(p)}(x) = \frac{(in)^p e^{inx}}{(1 + n^2)(1 + \ln n)} \quad \text{d'où} \quad \|f_n^{(p)}\|_\infty = \frac{n^p}{(1 + n^2)(1 + \ln n)} \sim \frac{n^{p-2}}{\ln n}$$

On en déduit que la série $\sum_{n \geq 1} f_n^{(p)}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $p = 0$ car la série de Bertrand $\sum_{n \geq 2} 1/(n \ln n)$ diverge (preuve par comparaison série-intégrale). Cela assure néanmoins que

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est définie et continue sur } \mathbb{R}.}$$

Étudions maintenant le caractère dérivable de f , voire $\mathcal{C}^k$ de f . D'après ce qui précède, le théorème de dérivation terme à terme ne permet pas de conclure sur une quelconque dérivabilité de f . Pour conclure, il faut donc exprimer f d'une autre manière, ce qui va se faire via une transformée d'Abel. Fixons $x \in \mathbb{R}$, et notons

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{(1 + n^2)(1 + \ln n)} \quad \text{et} \quad S_n(x) = \sum_{k=0}^n e^{ikx}$$

Alors,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} u_n (S_n(x) - S_{n-1}(x)) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} u_n S_n(x) - \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} S_n(x) \\ f(x) &= u_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} S_n(x) (u_n - u_{n+1}) \end{aligned}$$

La suite $(S_n(0))_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas bornée. En revanche, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, on a

$$|S_n(x)| = \left| \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} \right| \leq \frac{2}{|1 - e^{ix}|}$$

De la même manière,

$$|S'_n(x)| = \left| \frac{-i(n+1)e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} + e^{ix} \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{(1 - e^{ix})^2} \right| \leq \frac{n+1}{|1 - e^{ix}|} + \frac{2}{|1 - e^{ix}|^2}$$

On en déduit notamment que pour tout segment I_δ de la forme $[\delta; 2\pi - \delta]$ avec $0 < \delta < \pi$,

$$\|S_n\|_{\infty, I_\delta} \leq \frac{2}{|1 - e^{i\delta}|} = O(1) \quad \text{et} \quad \|S'_n\|_{\infty, I_\delta} \leq \frac{n+1}{|1 - e^{i\delta}|} + \frac{2}{|1 - e^{i\delta}|^2} = O(n)$$

et enfin $\|S_n(u_n - u_{n+1})\|_{\infty, I_\delta} = O(u_n - u_{n+1})$ et $\|S'_n(u_n - u_{n+1})\|_{\infty, I_\delta} = O(n(u_n - u_{n+1}))$

Les séries $\sum_{n \geq 1} (u_n - u_{n+1})$ et $\sum_{n \geq 1} n(u_n - u_{n+1})$ convergent : la première convergence s'obtient par télescopage, la seconde par une transformée d'Abel dans l'autre sens. On en déduit que $\sum_{n \geq 1} S_n(u_n - u_{n+1})$ et $\sum_{n \geq 1} S'_n(u_n - u_{n+1})$ convergent normalement sur tout segment de $]0; 2\pi[$. Dès lors, le théorème de dérivation terme à terme s'applique avec la nouvelle expression de f , et ainsi, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; 2\pi[$. Par 2π -périodicité,

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

Remarque : Il semble difficile d'obtenir des réponses quand à la dérivabilité en 0, ou sur une éventuelle dérivée seconde de f . La question est suffisamment vague pour qu'on envisage que ces réponses ne soient pas attendues.

17 _____ (***) _____ **MP Mines 2011**

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue, décroissante et intégrable. Montrer que

$$h \sum_{n=1}^{+\infty} f(nh) \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} f(t) dt$$

En déduire un équivalent de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n x^n}{1 - x^n}$ lorsque x tend vers 1^- .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $h > 0$, on a par décroissance et positivité de f

$$\int_{nh}^{(n+1)h} f(t) dt \leq h f(nh) \leq \int_{(n-1)h}^{nh} f(t) dt$$

Notons que les intégrales sont les termes généraux d'une série positive convergente, par positivité de f . Cela assure la convergence de $\sum_{n \geq 0} f(nh)$, et en sommant pour n allant de 1 à $+\infty$ l'encadrement précédent, on obtient

$$\int_h^{+\infty} f(t) dt \leq h \sum_{n=1}^{+\infty} f(nh) \leq \int_0^{+\infty} f(t) dt$$

Cette encadrement prouve aussitôt que

$$h \sum_{n=1}^{+\infty} f(nh) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} f(t) dt$$

Soit maintenant $x \in]0; 1[$. On remarque immédiatement que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n / (1 - x^n)$ converge car c'est une série à termes positifs dont le terme général est équivalent à $n x^n$, terme général d'une série convergente car dominé par $1/n^2$ lorsque n tend vers $+\infty$. Ensuite, pour tout entier n , on a

$$\frac{x^n}{1 - x^n} = \frac{e^{n \ln x}}{1 - e^{n \ln x}} = \frac{e^{-nh}}{1 - e^{-nh}} \quad \text{avec} \quad h = -\ln x$$

Lorsque x tend vers 1^- , h tend vers 0^+ ce qui amène à utiliser ce qui précède avec $f : t \mapsto t e^{-t} / (1 - e^{-t})$. Ainsi,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{1-x^n} = \frac{1}{h} \sum_{n=1}^{+\infty} f(nh)$$

La fonction f se prolonge par continuité en 0 par 1, et est intégrable en $+\infty$ car équivalente à $te^{-t} = o(1/t^2)$. Il faut encore vérifier la décroissance sur $\mathbb{R}_+$. Cette fonction est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ avec pour tout $t > 0$,

$$f(t) = \frac{t}{e^t - 1} \quad \text{d'où} \quad f'(t) = \frac{1}{e^t - 1} - \frac{te^t}{(e^t - 1)^2} = \frac{e^t(1 - t - e^{-t})}{(e^t - 1)^2}$$

La convexité de $t \mapsto e^{-t}$ montre que $1 - t - e^{-t} \leq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et donc que f' est bien négative sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi, f est décroissante.

Le résultat établi précédemment assure maintenant que

$$h \sum_{n=1}^{+\infty} f(nh) \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} f(t) dt = \int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{1 - e^{-t}} dt$$

d'où
$$\frac{1}{h} \sum_{n=1}^{+\infty} f(nh) \underset{h \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{h^2} \int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{1 - e^{-t}} dt \quad \text{soit} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{1 - x^n} \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{1}{(\ln x)^2} \int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{1 - e^{-t}} dt$$

L'équivalent se simplifie en remarquant qu'au voisinage de 1, $\ln x \sim (x - 1)$. De plus, l'intégrale se calcule grâce au théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle quelconque. En effet, Pour tout $t > 0$,

$$\frac{te^{-t}}{1 - e^{-t}} = te^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nt} = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(t) \quad \text{avec} \quad g_n : t \mapsto te^{-(n+1)t}$$

Vérifions les hypothèses du théorème :

- Pour tout entier n , la fonction g_n est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, car prolongeable par continuité en 0, et dominée par $t \mapsto 1/t^2$ en $+\infty$.
- Par construction, la série $\sum_{n \geq 0} g_n$ converge simplement vers g qui est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Enfin, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,
$$\int_0^{+\infty} |g_n(t)| dt = \int_0^{+\infty} te^{-(n+1)t} dt = \frac{1}{(n+1)^2}$$

qui est le terme général d'une série convergente.

Le théorème s'applique et ainsi

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} g_n(t) dt \right)$$

soit
$$\int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{1 - e^{-t}} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Pour conclure

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{1 - x^n} \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{(x-1)^2}}$$

18 _____ (**) _____ **PC Mines 2011**

Soit

$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1 + x^n}$$

- Déterminer le domaine de définition de f . La fonction f est-elle continue sur ce domaine ? de classe $\mathcal{C}^1$?
- Donner un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 1^- .

(a) Notons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
$$f_n : x \mapsto \frac{x^n}{1 + x^n}$$

La fonction f_1 n'est pas définie en -1 . Pour tout $x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$, la quantité $f_n(x)$ tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$ donc la série $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ diverge grossièrement. Il en est de même si $x = 1$. Enfin, pour $|x| < 1$, on a $|f_n(x)| \sim |x|^n$ qui est le terme général d'une série convergente. Le théorème de comparaison prouve alors que $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ converge absolument donc converge. Finalement,

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est définie sur }]-1; 1[.}$$

Notons que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -1; 1[$ avec

$$\forall x \in] -1; 1[, \quad f'_n(x) = \frac{nx^{n-1}}{(1+x^n)^2}$$

Si $[-a; a]$ est un segment inclus dans $] -1; 1[$, on en déduit que pour tout $n \geq 1$,

$$\|f_n\|_{\infty, [-a; a]} \leq \frac{na^{n-1}}{(1-a^n)^2} = O(a^n)$$

On en déduit donc que

- la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge simplement sur $] -1; 1[$.
- la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} f'_n$ converge normalement sur tout segment de $] -1; 1[$.

Le théorème s'applique et prouve que

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -1; 1[$.

(b) Fixons $x \in]0; 1[$ et notons

$$h : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \frac{x^t}{1+x^t} = \frac{e^{t \ln x}}{1+e^{t \ln x}}$$

On vérifie facilement que f est continue, décroissante et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ (car négligable par croissance comparées devant $t \mapsto 1/t^2$ en $+\infty$). Pour tout $n \geq 1$,

$$\int_n^{n+1} h(t) dt \leq h(n) \leq \int_{n-1}^n h(t) dt$$

d'où en sommant pour n allant de 1 à $+\infty$ (la convergence est assurée par l'intégrabilité de h)

$$\int_1^{+\infty} h(t) dt \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} h(t) dt$$

En effectuant le changement de variable affine $u = -t \ln x$ dans l'intégrale, il s'ensuit que

$$\frac{1}{-\ln x} \int_{-\ln x}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1+e^{-u}} du \leq f(x) \leq \frac{1}{-\ln x} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1+e^{-u}} du$$

Notons que $-\ln x \sim 1-x$ lorsque x tend vers 1. De plus,

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{1+e^{-u}} du = [-\ln(1+e^{-u})]_0^{+\infty} = \ln 2$$

L'encadrement précédent permet de conclure que

$$f(x) \underset{x \rightarrow 1^-}{\sim} \frac{\ln 2}{1-x}$$