

1 Suites réelles ou complexes

1.1 Généralités sur les suites

Rappels

- Une suite convergente est bornée. Une suite réelle convergente de limite $\ell > 0$ est minorée à partir d'un certain par $\ell/2$, ou plus généralement par α quel que soit le choix de $\alpha < \ell$.
- Si une suite est convergente et majorée par α (au sens strict ou large), sa limite est majorée au sens large par α .
- Une suite monotone est convergente ou de limite égale à $+\infty$ ou $-\infty$. On est dans le premier cas si et seulement si elle est bornée.
- Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont trois suites telles que $u_n \leq v_n \leq w_n$ pour tout entier n et si u et w convergent vers ℓ , alors v converge également vers ℓ .
- Rappeler le comportement de $(\lambda^n)_{n \in \mathbb{N}}$ en fonction de $\lambda \in \mathbb{R}$, puis $\lambda \in \mathbb{C}$.

Remarque 1

- On ne parle pas de passage à la limite pour justifier l'existence d'une limite. Le passage ne peut se faire qu'une fois que l'on a démontré que la limite existe.
- le quatrième point se généralise pour montrer l'existence de limites infinies.

Exercice 1 (Lemme de Cesaro ♡)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente de limite ℓ . Montrer que

$$\frac{u_0 + \cdots + u_{n-1}}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$$

Exemple 1

Pour les familles de suites suivantes, le terme général u_n peut s'exprimer directement en fonction de n : suites arithmétiques, géométriques et arithmético-géométriques, suites récurrentes linéaires d'ordre 2.

Exercice 2

Etudier la suite définie par la relation de récurrence

$$u_0, u_1 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$$

1.2 Suites récurrentes d'ordre 1

On s'intéresse aux suites définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout entier n , où f est une application de I dans lui-même.

Rappels

- Si l'on représente sur un même graphe la fonction f et la droite d'équation $y = x$, on peut anticiper graphiquement le comportement de la suite dans de nombreux cas (voir l'exemple $x \mapsto (x^2 + 1)/2$).
- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut converger que vers un point fixe de f .
- Si $f(x) - x$ est de signe constant sur I , alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone.
- Si f est croissante sur I , alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante si $u_0 \leq u_1$, décroissante si $u_0 \geq u_1$.
- Si f est décroissante sur I , alors les suites extraites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont monotones et de sens contraires.

Remarque 2

Si f ne vérifie aucune de ces trois propriétés, il faut rechercher des intervalles I stables par f et essayer de justifier que la suite a un terme u_p qui appartient à l'un de ces intervalles. On peut alors étudier la suite à partir du rang p et restreindre f à l'intervalle I stable trouvé.

Exercice 3

Etudier la suite définie par récurrence par

$$u_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sin u_n$$

En cas de convergence, déterminer sa limite u_n , puis un équivalent de $u_n - \ell$.

1.3 Suites implicites

Il s'agit de suites définies par une relation de la forme $f_n(u_n) = 0$ où la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions définies sur un intervalle I sur lequel l'équation a une unique solution. Il n'y a guère de méthode générale pour étudier ce type de suites, mis à part l'idée assez classique suivante (qui fait souvent l'objet d'une première question) :

- si la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions (ie $f_n \leq f_{n+1}$ pour tout entier n) et que f_n est croissante pour tout entier n , alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Exercice 4 (X)

- Montrer l'existence et l'unicité pour tout entier n d'un réel x_n solution de l'équation $x \exp(x) = n$ d'inconnue x . Déterminer la limite de x_n , puis un équivalent de x_n .
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe un unique $x_n \in [0; 1]$ solution de $x^n + x - 1 = 0$. Déterminer la limite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

2 Séries de nombres réels ou complexes

2.1 Séries à termes positifs et absolue convergence

Rappels

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à termes quelconques et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à termes **positifs**.

- Si $\sum u_n$ converge, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de limite nulle.
- Si $u_n \sim v_n$, alors u_n est positif à partir d'un certain rang et les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de mêmes natures.
- Si $u_n = O(v_n)$ et si la série $\sum v_n$ est convergente, alors $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.
- Si $u_n \geq v_n$ à partir d'un certain rang, et si la série $\sum v_n$ est divergente, alors $\sum u_n$ est divergente.

Sommes des termes d'une suite géométrique : ♥

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{1\}, \quad \sum_{k=0}^n \lambda^k = \frac{1 - \lambda^{n+1}}{1 - \lambda}$$

Exercice 5 (X, Centrale)

- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = x^{1/n} - 1$.
- Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ défini pour tout $n \geq 1$ par $u_n = 1/n$ si n est un carré d'entier, et $u_n = 1/n^2$ sinon. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.

Remarque 3

Le premier réflexe lors de l'étude d'une série est donc de chercher un équivalent, une domination ou une minoration simple par le terme général d'une série convergente. On compare de préférence aux séries de Riemann de la forme $\sum 1/n^\alpha$ dont on connaît la nature.

Cependant, un équivalent peut être plus généralement de la forme $u_n \sim (\ln n)^\alpha n^\beta \gamma^n$ ce qui n'admet pas de simplification ultérieure. Il est donc primordial de savoir traiter les exemples suivants.

Exemple 2 (Séries de Bertrand)

Déterminer la nature des séries de termes généraux suivants :

$$\frac{\sqrt{\ln n}}{n} \quad \frac{1}{\sqrt{n} \ln n} \quad \frac{(\ln n)^2}{n^2} \quad \frac{1}{n^2 (\ln n)^2}$$

Exercice 6 (CCP)

Soient a, b et c trois réels, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = a \ln n + b \ln(n+1) + c \ln(n+2)$$

Nature et somme éventuelle de la série de terme général u_n .

Remarque 4

Il n'existe aucune technique générale pour calculer la valeur exacte de la somme S d'une série $\sum_{n \geq 0} u_n$. A l'heure actuelle, plus précisément en attendant le cours sur les séries entières, on ne peut calculer que les sommes des séries géométriques et des séries télescopiques.

On peut cependant utiliser les outils numériques (le terme est à la mode) pour calculer une valeur approchée de la somme en calculant une somme partielle. Pour s'assurer que $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ est une valeur approchée de S à 10^{-p} près (c'est-à-dire que S_n et S partagent les mêmes p premières décimales), il faut être capable de justifier que le reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est majoré par 10^{-p} .

Exemple 3 (Constante d'Euler)

Il existe un réel γ appelé **constante d'Euler** tel que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$$

Jusqu'à présent, on ne connaît pas la valeur de ce réel et on sait seulement qu'il s'agit d'un irrationnel.

Proposition 1 (Formule de Stirling)

Lorsque n tend vers $+\infty$,

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

2.2 Règle de d'Alembert

Proposition 2 (Règle de d'Alembert)

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série de complexes non nuls. On suppose qu'il existe $\ell \in \overline{\mathbb{R}_+}$ tel que $|u_{n+1}| / |u_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$. Alors

- Si $\ell < 1$, la série converge.
- Si $\ell > 1$, la série diverge.

Remarque 5

Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure sur la nature de la série comme le montre les exemples de Riemann.

Exemple 4

- Pour tout complexe z , la série $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$ est convergente.
- Soit $x \in \mathbb{R}_+$. La série $\sum_{n \geq 0} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)}{1 \cdot 4 \cdots (3n+1)} x^{2n}$ converge si et seulement si $x < \sqrt{3/2}$.

Exercice 7 (Règle de Raab-Duhamel)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à termes réels et strictement positifs. On suppose qu'il existe un réel λ tel que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\lambda}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right)^2$$

Montrer qu'il existe un réel $c > 0$ tel que $u_n \sim C/n^\lambda$ et en déduire la nature de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$.

2.3 Critère spécial de convergence des séries alternées**Définition 1**

On appelle série alternée une série de la forme $\sum_{n \geq 0} (-1)^n u_n$ où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à termes réels et de signe constant.

Théorème 1 (Critère de convergence des séries alternées)

Soit $\sum_{n \geq 0} (-1)^n u_n$ une série alternée telle que la suite $(|u_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ soit décroissante et de limite nulle. Alors,

- La série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n u_n$ converge.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, R_n est du signe de son premier terme $(-1)^{n+1} u_{n+1}$ et $|R_n| \leq |u_{n+1}|$.

Exemple 5

Pour $\alpha > 0$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est une série convergente.

Remarque 6

Le théorème s'applique à nouveau si les hypothèses sur la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne sont vraies qu'à partir d'un certain rang.

Exercice 8 (Mines, X)

Déterminer la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{(-1)^n + \sqrt{n+1}} \quad u_n = \cos(\pi\sqrt{n^2 + n + 1})$$

Remarque 7

- Une série $\sum_{n \geq 0} u_n$ convergente telle que $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ diverge est dite semi-convergente. A titre d'exemple donc, la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n / n^\alpha$ est semi-convergente lorsque $\alpha \in]0; 1[$.
- Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne sont pas à termes positifs, alors l'hypothèse $u_n \sim v_n$ n'assure pas nécessairement que les deux suites sont de même nature. Par exemple,
 - La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente d'après le CSA.
 - La série $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right)$ est divergente car c'est la somme d'une série convergente et d'une série divergente.

Les deux séries ne sont pas de mêmes natures bien que leurs termes généraux soient équivalents.

2.4 Comparaison série-intégrale

Remarque 8

Le but d'une comparaison série-intégrale est d'étudier la convergence d'une série à partir d'une intégrale. Il arrive également que l'on fasse le travail inverse.

Définition 2

Si f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; +\infty[$, on dit que f est intégrable sur $[a; +\infty[$ si l'intégrale

$$\int_a^x f(t) dt$$

a une limite lorsque x tend vers $+\infty$. On la note alors $\int_a^{+\infty} f(t) dt$.

Proposition 3

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue, positive et décroissante. Alors, la série $\sum_{n \geq 0} f(n)$ converge si et seulement si la fonction f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Remarque 9

- Le programme officiel mentionne seulement « technique de comparaison série intégrale », il n'y a pas à proprement parler de résultat de cours et il faut notamment redétailler l'encadrement utilisé dans la preuve à chaque utilisation.
- Le résultat reste valable pour f seulement continue par morceaux, une fois que l'on aura vu cette définition.

Remarque 10

Reprenons l'encadrement valable pour tout entier n ,

$$\int_n^{n+1} f(t) dt \leq f(n) \leq \int_{n-1}^n f(t) dt \quad (*)$$

En sommant, il vient $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_1^{n+1} f(t) dt \leq S_n - f(0) \leq \int_0^n f(t) dt$

et en cas de convergence de la série, en sommant (*) de $n+1$ à $+\infty$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_{n+1}^{+\infty} f(t) dt \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} f(t) dt$$

Ces deux encadrements assurent régulièrement (mais pas toujours) les équivalents suivants, le premier en cas de divergence, le second en cas de convergence

$$S_n \sim \int_0^n f(t) dt \quad \text{ou} \quad R_n \sim \int_n^{+\infty} f(t) dt$$

Exemple 6

Cas des intégrales de Riemann :

- Si $\alpha > 1$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge et $R_n \sim \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$.
- Si $\alpha < 1$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge et $S_n \sim \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}$.
- La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge et on retrouve le fait que $S_n \sim \ln n$.

Remarque 11

L'encadrement précédent peut bien entendu être utilisé lorsque la fonction f est positive et croissante (sachant que dans ce cas la série et l'intégrale divergent !). Par exemple, pour tout $\alpha > 0$, on obtient

$$\sum_{k=0}^n k^\alpha \sim \frac{1}{\alpha+1} n^{\alpha+1}$$

2.5 Complément : Transformée d'Abel

Exemple 7

On fixe $\theta \in \mathbb{R}$. On cherche la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$:

- Pour $\alpha > 1$, la série est absolument convergente donc convergente.
- Pour $\alpha \leq 0$, le terme général ne tend pas vers 0 donc la série diverge.
- Pour $\alpha \in]0; 1]$,
 - Si $\theta \equiv 0[2\pi]$, la série diverge par Riemann.
 - Si $\theta \equiv \pi[2\pi]$, la série converge par CSA.
 - Lorsque $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, on va montrer que la série est semi-convergente grâce à une transformation d'Abel.

Exercice 9 (Formule de la transformée d'Abel)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux éléments de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On note $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum_{n \geq 0} v_n$. Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n u_k v_k = \sum_{k=0}^{n-1} (u_k - u_{k+1}) V_k + u_n V_n$$

En déduire la nature de $\sum e^{in\theta}/n^\alpha$ pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $\alpha > 0$.

Remarque 12

- Les opérateurs $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (u_n - u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont les équivalents respectifs de la dérivation et de l'intégration sur $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. La formule ci-dessus peut alors s'interpréter comme une intégration par parties dans $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
- Une transformation d'Abel permet systématiquement de prouver la convergence d'une série de la forme $\sum_{n \geq 0} u_n v_n$ dès lors que
 - $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est réelle, décroissante de limite nulle (et donc positive).
 - Les sommes partielles $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont bornées.