

Comportement asymptotique de sommes de séries entières

Soit p un entier naturel non nul et r un nombre réel *strictement positif*. On considère la fonction

$$S_{r,p} : z \in \mathbf{C} \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(pn)^r}{(pn)!} z^{pn}.$$

L'objectif du problème est d'établir la validité de l'énoncé suivant :

$$S_{r,p}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{p} x^r e^x \quad (H_{r,p})$$

Cet objectif sera atteint dans la partie **II** pour le cas particulier $p = 1$, et dans la partie **III** pour le cas $p \geq 2$. Dans la partie **IV**, on étudie une application de ce résultat au comportement asymptotique d'une solution particulière d'une certaine équation différentielle d'ordre 2.

Dans tout le sujet, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière du nombre réel x , c'est-à-dire l'unique entier k tel que $k \leq x < k + 1$. On rappelle que par convention $0^0 = 1$, tandis que $0^r = 0$ pour tout réel $r > 0$.

I Généralités, cas particuliers

1. Soit $r \in \mathbf{R}_+^*$ et $p \in \mathbf{N}^*$. Justifier que la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{(pn)^r}{(pn)!} z^n$ a pour rayon de convergence $+\infty$, et faire de même pour la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{(pn)^r}{(pn)!} z^{np}$.
2. Pour x réel, expliciter $S_{0,1}(x)$ et $S_{0,2}(x)$, et en déduire la validité des énoncés $H_{0,1}$ et $H_{0,2}$.

III Démonstration de $H_{r,p}$ pour $p \geq 2$

On fixe dans cette partie un entier naturel $p \geq 2$ et un réel $r > 0$, et l'on se propose de déduire la validité de $H_{r,p}$ de celle de $H_{r,1}$.

Pour $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}_+^*$, on pose

$$u_n(x) := \frac{n^r}{n!} x^n.$$

10. On fixe un réel $x > 0$. Étudier le signe de la fonction

$$\varphi_x : t \in [1, +\infty[\mapsto t^{1-r}(t-1)^r - x.$$

On montrera en particulier que φ_x s'annule en un unique élément de $[1, +\infty[$ que l'on notera t_x . En déduire que la suite finie $(u_n(x))_{0 \leq n \leq \lfloor t_x \rfloor}$ est croissante et que la suite $(u_n(x))_{n \geq \lfloor t_x \rfloor}$ est décroissante.

L'ensemble $\{u_n(x) \mid n \in \mathbf{N}\}$ admet donc un maximum valant $u_{\lfloor t_x \rfloor}(x)$. Dans la suite de cette partie, ce maximum sera noté M_x .

11. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. Déterminer la limite de $\varphi_x(x + \alpha)$ quand x tend vers $+\infty$. En déduire que

$$t_x - x - r \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Pour établir ce dernier résultat, on pourra revenir à la définition d'une limite.

12. Montrer que pour tout entier relatif k ,

$$u_{\lfloor x \rfloor + k}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} u_{\lfloor x \rfloor}(x).$$

13. Soit $m \in \mathbf{N}^*$. Montrer que

$$\sum_{i=\lfloor x \rfloor - m}^{\lfloor x \rfloor} u_i(x) \geq m u_{\lfloor x \rfloor}(x) \quad \text{pour } x \text{ voisin de } +\infty.$$

En déduire que, pour x voisin de $+\infty$,

$$u_{\lfloor x \rfloor}(x) \leq \frac{x^r e^x}{m}.$$

14. En déduire que pour tout entier relatif k ,

$$u_{\lfloor x \rfloor + k}(x) = o_{x \rightarrow +\infty}(x^r e^x)$$

puis que

$$M_x = o_{x \rightarrow +\infty}(x^r e^x).$$

En vue de ce dernier résultat, on pourra commencer par démontrer que, pour x assez grand, $M_x = u_{\lfloor x \rfloor + i}(x)$ pour un entier i compris entre $\lfloor r \rfloor - 1$ et $\lfloor r \rfloor + 2$.

15. Dans cette question et la suivante, on fixe un nombre complexe z tel que $|z| = 1$ et $z \neq 1$. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose

$$D_n := \sum_{k=0}^{n-1} z^k.$$

Montrer que

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, |D_n| \leq \frac{2}{|1 - z|}$$

et que les séries $\sum_n D_n u_{n-1}(x)$ et $\sum_n D_n u_n(x)$ sont absolument convergentes.

16. On conserve le nombre complexe z introduit dans la question précédente. Montrer que

$$\forall x \in \mathbf{R}_+^*, \sum_{n=1}^{+\infty} D_n (u_{n-1}(x) - u_n(x)) = S_{r,1}(zx)$$

puis que, pour x voisin de $+\infty$,

$$|S_{r,1}(zx)| \leq \frac{4M_x}{|1 - z|},$$

et conclure à la relation

$$S_{r,1}(zx) = o_{x \rightarrow +\infty}(x^r e^x).$$

17. On pose $\xi := \exp\left(\frac{2i\pi}{p}\right)$. Pour tout réel x , montrer que

$$\sum_{k=0}^{p-1} S_{r,1}(\xi^k x) = p S_{r,p}(x)$$

et en déduire la validité de $H_{r,p}$.