

CCP Maths 1 PSI 2009 — Corrigé

II. ÉTUDE DE L'EXISTENCE DE J_m

II.1 Pour tout entier naturel m non nul, la fonction $t \mapsto \frac{(\sin t)^m}{t}$ est continue sur $]0; \frac{\pi}{2}]$ et prolongeable par continuité en 0 car

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\sin t)^m}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin t}{t} \times (\sin t)^{m-1} \right) = \begin{cases} 1 & \text{si } m = 1 \\ 0 & \text{si } m > 1 \end{cases}$$

L'intégrale généralisée $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin t)^m}{t} dt$ converge.

II.2 Si on choisit la fonction $t \mapsto 1 - \cos t$ pour primitive de la fonction sinus sur l'intervalle fermé $[\frac{\pi}{2}; a]$ avec $a > \frac{\pi}{2}$, on obtient en intégrant par parties

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^a \frac{\sin t}{t} dt &= \left[\frac{(1 - \cos t)}{t} \right]_{\frac{\pi}{2}}^a - \int_{\frac{\pi}{2}}^a (1 - \cos t) \times \frac{-1}{t^2} dt \\ &= \underbrace{\frac{(1 - \cos a)}{a}}_{\xrightarrow{a \rightarrow +\infty} -\frac{2}{\pi}} - \frac{2}{\pi} - \int_{\frac{\pi}{2}}^a (1 - \cos t) \times \frac{-1}{t^2} dt \end{aligned}$$

puisque $0 \leq 1 - \cos a \leq 2$ pour tout réel a . On a montré par ailleurs à la question I.2 la convergence de l'intégrale généralisée $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$.

On peut donc affirmer en faisant tendre a vers $+\infty$ et à l'aide du résultat de la question II.1 (qui assure que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t} dt$ est convergente) que

L'intégrale généralisée J_1 est convergente.

Reprenons le calcul de l'intégration par parties, mais cette fois sur un intervalle fermé $[a; b]$ avec $0 < a < b$:

$$\int_a^b \frac{\sin t}{t} dt = \left[\frac{(1 - \cos t)}{t} \right]_a^b + \int_a^b \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$$

La quantité $(1 - \cos b)/b$ de cette relation tend vers 0 quand b tend vers $+\infty$ comme on l'a expliqué plus haut. De même, la quantité $(1 - \cos a)/a$ tend vers 0 quand a tend vers 0, car $1 - \cos t \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^2/2$. En faisant tendre b vers $+\infty$ puis a vers 0, ce qui est possible d'après tout ce qui précède, on obtient

$$J_1 = \varphi(0)$$

II.3 Excluons le cas $k = 0$ car I_0 est l'intégrale généralisée divergente $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{dt}{t}$.

Pour tout réel $x > 0$ et tout entier relatif non nul k , on effectue une intégration par parties de $\int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{e^{ikt}}{t} dt$ en intégrant l'exponentielle complexe et en dérivant la fonction inverse. On obtient

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{e^{ikt}}{t} dt = \left[\frac{e^{ikt}}{ikt} \right]_{\frac{\pi}{2}}^x - \int_{\frac{\pi}{2}}^x -\frac{e^{ikt}}{ikt^2} dt \quad (1)$$

Comme $\left| \int_{\frac{\pi}{2}}^x -\frac{e^{ikt}}{ikt^2} dt \right| \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^x \left| -\frac{e^{ikt}}{ikt^2} \right| dt = \frac{1}{|k|} \int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{dt}{t^2}$

on sait que l'intégrale généralisée $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} -\frac{e^{ikt}}{ikt^2} dt$ est convergente. Par ailleurs

$$\left[\frac{e^{ikt}}{ikt} \right]_{\frac{\pi}{2}}^x = \frac{e^{ikx}}{ikx} - 2 \frac{e^{\frac{ik\pi}{2}}}{ik\pi} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left| \frac{e^{ikx}}{ikx} \right| = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{|k|x} = 0$$

En faisant tendre x vers $+\infty$ dans (1), on trouve

L'intégrale généralisée I_k converge si et seulement si l'entier relatif k est non nul.

II.4.1 Utilisons la formule d'Euler $\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{(\sin t)^m}{t} dt &= \int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{(e^{it} - e^{-it})^m}{(2i)^m t} dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} e^{i(m-2k)t}}{(2i)^m t} dt \\ &= \frac{1}{(2i)^m} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} \int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{e^{i(m-2k)t}}{t} dt \end{aligned}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^x \frac{(\sin t)^m}{t} dt = \frac{1}{(2i)^m} \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} I_{m-2k}(x)$$

II.4.2 Soit un entier naturel m supposé non nul. En notant $J_m(x) = \int_0^x \frac{(\sin t)^m}{t} dt$, le résultat de la question précédente se réécrit

$$J_m(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin t)^m}{t} dt + \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \frac{(-1)^k}{(2i)^m} I_{m-2k}(x) \quad (2)$$

L'intégrale généralisée $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin t)^m}{t} dt$ est convergente d'après la question II.1 car m est non nul ; si m diffère de $2k$, on a montré à la question II.3 que la fonction $x \mapsto I_{m-2k}(x)$ admet une limite finie en $+\infty$.

Considérons maintenant un entier naturel impair $m = 2p + 1$. La relation (2) montre que $x \mapsto J_{2p+1}(x)$ est somme d'une intégrale généralisée convergente et d'une combinaison linéaire finie de fonctions admettant toutes des limites finies en $+\infty$. Ainsi l'intégrale généralisée $J_{2p+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} J_{2p+1}(x)$ est convergente. Par suite,

J_{2p+1} existe pour tout entier naturel p .

II.4.3 Pour $p = 0$, les intégrales généralisées $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{t}$ et $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{dt}{t}$ divergent toutes deux vers $+\infty$ ce qui constitue une obstruction à l'existence de $J_0 = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t}$.

Pour un entier naturel non nul p , on reconsidère l'expression **(2)** décrite à la question précédente. On obtient

$$J_{2p}(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin t)^{2p}}{t} dt + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq p}}^{2p} \binom{2p}{k} \frac{(-1)^k}{(2i)^{2p}} I_{2p-2k}(x) + \binom{2p}{p} \frac{(-1)^p}{(2i)^{2p}} I_0(x)$$

Cette fois, la fonction $x \mapsto J_m(x)$ est somme d'une intégrale généralisée convergente, d'une combinaison linéaire finie de fonctions admettant toutes des limites finies en $+\infty$ et de la fonction $x \mapsto I_0(x)$ qui diverge en $+\infty$ d'après la question II.3. La fonction $x \mapsto J_m(x)$ diverge donc en $+\infty$, et

L'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{(\sin t)^{2p}}{t} dt$ diverge pour tout entier naturel p .

PARTIE II

II.1 Comme la fonction f est continue sur le compact $[-1; 1]$, elle y est bornée. Soit $\|f\|_\infty$ la borne supérieure de f sur $[-1; 1]$.

$$\forall x \in]-1; 1[\quad \left| \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} \right| \leq \frac{\|f\|_\infty}{\sqrt{1-x^2}}$$

Or, la fonction $h : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est intégrable sur $] -1; 1 [$ (démonstration ci-dessous) donc, d'après le critère de domination, $x \mapsto \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ est intégrable sur $] -1; 1 [$.

Donnons deux méthodes pour montrer que h est intégrable sur $] -1; 1 [$. Remarquons tout d'abord que cette fonction est paire, et qu'il nous suffit de montrer qu'elle est intégrable sur $[0; 1[$.

- **Première méthode :** h étant positive, elle est intégrable si et seulement si la fonction $x \mapsto \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ est bornée sur $[0; 1[$. Or c'est bien le cas, puisque cette dernière fonction est en fait égale à $x \mapsto \text{Arcsin } x$, qui est bornée.
- **Seconde méthode :** la fonction h est positive et elle est équivalente en 1 à la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-t}}$, fonction positive et intégrable d'après le cours. La fonction h est donc intégrable.

II.2.1 Calculons I_0 :

$$I_0 = \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{\substack{a \rightarrow -1 \\ b \rightarrow 1}} [\text{Arcsin } x]_a^b = \pi$$

Pour I_1 , remarquons que $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ est impaire, donc que son intégrale entre -1 et 1 est nulle.

$I_0 = \pi \quad \text{et} \quad I_1 = 0$

II.2.2 Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Faisons le changement de variable suggéré par l'énoncé (si $\theta = \text{Arccos } x$, alors $x = \cos \theta$ et $dx = -\sin \theta d\theta$) :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_{-1}^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int_{-\pi}^0 \frac{-\cos^n \theta \sin \theta}{\sqrt{1-\cos^2 \theta}} d\theta \\ I_n &= \int_0^\pi \frac{\cos^n \theta \sin \theta}{|\sin \theta|} d\theta \end{aligned}$$

Remarquons alors que $\sin \theta$ est positif si $\theta \in [0; \pi]$, d'où

$$I_n = \int_0^\pi \frac{\cos^n \theta \sin \theta}{\sin \theta} d\theta = \int_0^\pi \cos^n \theta d\theta$$

On reconnaît des intégrales de Wallis. Appliquons alors la méthode habituelle de l'intégration par parties, en posant d'une part

$$u(\theta) = \cos^{n-1} \theta \quad \text{et} \quad u'(\theta) = (n-1) \sin \theta \cos^{n-2} \theta$$

et d'autre part $v(\theta) = \sin \theta \quad \text{et} \quad v'(\theta) = \cos \theta$

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^\pi \cos^{n-1} \theta \cos \theta \, d\theta \\ &= [\cos^{n-1} \theta \sin \theta]_0^\pi + (n-1) \int_0^\pi \cos^{n-2} \theta \sin^2 \theta \, d\theta \\ &= 0 + (n-1) \int_0^\pi \cos^{n-2} \theta (1 - \cos^2 \theta) \, d\theta \\ I_n &= (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n \end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{n I_n = (n-1) I_{n-2}}$$

II.2.3 En appliquant la relation trouvée à la question précédente, on trouve

$$\boxed{I_2 = \frac{1}{2}\pi \quad \text{et} \quad I_4 = \frac{3}{8}\pi}$$

Si $p \in \mathbb{N}$, alors la fonction $x \mapsto \frac{x^{2p+1}}{\sqrt{1-x^2}}$ est impaire : son intégrale entre -1 et 1 est nulle, donc

$$\boxed{I_{2p+1} = 0}$$

II.4.1 Réécrivons l'égalité (1) avec le polynôme P défini par $P(x) = 1$ et en utilisant le résultat de la question II.2.1. Comme $I_0 = \pi$, on trouve $a_0 + a_1 + a_2 = \pi$.

De même, avec le polynôme P défini par $P(x) = x$, et sachant que $I_1 = 0$, on obtient

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} a_0 + \frac{\sqrt{3}}{2} a_2 = 0$$

Enfin, avec P défini par $P(x) = x^2$ et $I_2 = \frac{2}{3}\pi$, il vient $\frac{3}{4} a_0 + \frac{3}{4} a_2 = \frac{\pi}{2}$.

Ces équations forment un système de trois équations linéaires à trois inconnues, dont la résolution ne pose pas de difficultés particulières.

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a_0 + a_1 + a_2 & = & \pi \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} a_0 + \frac{\sqrt{3}}{2} a_2 & = & 0 \\ \frac{3}{4} a_0 + \frac{3}{4} a_2 & = & \frac{2}{3} \pi \end{array} \right. \iff \boxed{(a_0, a_1, a_2) = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)}$$

II.4.2 D'après la question II.2.3, $I_4 = \frac{3\pi}{8}$. Or,

$$a_0 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 + a_2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4 = 2 \times \frac{\pi}{3} \frac{9}{16} = \frac{3\pi}{8}$$

La relation (1) est vérifiée pour le polynôme P défini par $P(x) = x^4$.

De même, $I_5 = 0$ et $a_0 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5 + a_2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5 = 0$.

La relation (1) est vérifiée pour le polynôme P défini par $P(x) = x^5$.

On vérifie de même que la relation (1) est vraie pour le polynôme P défini par $P(x) = x^3$.

Soit la fonction

$$\phi: \begin{cases} \mathcal{R}_5 \longrightarrow \mathbb{R} \\ P \longmapsto a_0 P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + a_1 P(0) + a_2 P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \int_{-1}^1 \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \end{cases}$$

Cette fonction est une forme linéaire de $\mathcal{R}_5$. Or, d'après la question II.4.1 et les calculs précédents, cette forme linéaire est nulle sur la base canonique de $\mathcal{R}_5$. Elle est donc nulle sur tout l'espace, et on en déduit que

$$\forall P \in \mathcal{R}_5 \quad \int_{-1}^1 \frac{P(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = a_0 P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + a_1 P(0) + a_2 P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

II.5.1 La fonction $x \mapsto \frac{x^4}{\sqrt{x(1-x)}}$ admet 0 comme limite en 0 : elle est donc prolongeable par continuité en 0.

En outre, cette fonction est positive sur $]0; 1[$ et elle est équivalente en 1 à la fonction intégrable $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ (dont une primitive est $x \mapsto \sqrt{1-x}$). On peut donc en déduire que

$$x \mapsto \frac{x^4}{\sqrt{x(1-x)}} \text{ est intégrable sur }]0; 1[.$$

II.5.2 Utilisons le changement de variable suggéré dans l'énoncé (si $t = 2x - 1$, alors $x = \frac{1}{2}(t+1)$ et $dt = 2 dx$) :

$$\begin{aligned} J &= \int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{x(1-x)}} dx = \int_{-1}^1 \frac{(t+1)^4}{2^4 \sqrt{\frac{1}{2}(t+1)\frac{1}{2}(1-t)}} \frac{dt}{2} \\ &= \int_{-1}^1 \frac{(t+1)^4}{2^4 \sqrt{t^2-1}} dt = \frac{1}{2^4} \int_{-1}^1 \frac{(t+1)^4}{\sqrt{t^2-1}} dt \\ J &= \frac{1}{2^4} \left[a_0 \left[1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right]^4 + a_1 + a_2 \left[1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right]^4 \right] \quad (\text{d'après II.4}) \end{aligned}$$

On calcule alors $\left[1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right]^4$ et $\left[1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right]^4$ à l'aide du binôme de Newton (noter que les termes en $\sqrt{3}$ s'annulent), et tous calculs faits, on trouve

$$J = \frac{35\pi}{128}$$