

EXERCICE 2

Résolution d'une équation fonctionnelle

Dans cet exercice, on souhaite déterminer les fonctions $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les relations :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x+1) + f(x) = \frac{1}{x^2}. \quad (\text{P})$$

Partie I - Existence et unicité de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on démontre que le problème (P) admet une unique solution et on détermine une expression de celle-ci sous la forme d'une série de fonctions.

I.1 - Existence de la solution

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $\varphi_k :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \varphi_k(x) = \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}.$$

Q12. Montrer que la série de fonctions $\sum_{k \geq 0} \varphi_k$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

Dans tout le reste de cet exercice, on note $\varphi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la somme de la série $\sum_{k \geq 0} \varphi_k$.

Q13. Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a $\varphi(x+1) + \varphi(x) = \frac{1}{x^2}$.

Q14. En utilisant le théorème spécial des séries alternées, montrer que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k(x) \right| \leq \frac{1}{(x+n+1)^2}.$$

Q15. Montrer que la fonction φ est une solution de (P).

I.2 - Unicité de la solution

Q16. Montrer que si $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est une solution de (P), alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}.$$

Q17. En déduire que la fonction φ est l'unique solution de (P).

Partie II - Étude de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on étudie quelques propriétés de l'unique solution $\varphi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ du problème (P).

Q18. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que la série de fonctions $\sum_{k \geq 0} \varphi_k$ converge uniformément sur $[\varepsilon, +\infty[$.

Q19. Montrer que la fonction φ est continue sur $]0, +\infty[$. En utilisant le fait que φ est une solution du problème (P), en déduire un équivalent simple de φ au voisinage de 0^+ .

Q20. Justifier que la fonction φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que l'on a :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad \varphi'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}.$$

Q21. En déduire que la fonction φ est décroissante sur $]0, +\infty[$.

Q22. En utilisant le résultat de la question précédente et la relation (P), montrer que :

$$\forall x \in]1, +\infty[, \quad \frac{1}{x^2} \leq 2\varphi(x) \leq \frac{1}{(x-1)^2}.$$

En déduire un équivalent de φ en $+\infty$.

Partie III - Expression intégrale de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on détermine une expression de φ sous la forme d'une intégrale. On considère un élément $x \in]0, +\infty[$.

Q23. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer que la fonction $t \mapsto t^{x+k-1} \ln(t)$ est intégrable sur $]0, 1]$ et que l'on a :

$$\int_0^1 t^{x+k-1} \ln(t) dt = -\frac{1}{(x+k)^2}.$$

Q24. En déduire que la fonction $t \mapsto \frac{t^{x-1} \ln(t)}{1+t}$ est intégrable sur $]0, 1]$ et que :

$$\varphi(x) = - \int_0^1 \frac{t^{x-1} \ln(t)}{1+t} dt.$$

EXERCICE 3

Approximation d'une racine carrée par la méthode de Héron

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et on note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. De plus, si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on désigne par M^T la transposée de la matrice M et par $\text{Tr}(M)$ la trace de la matrice M .

Partie I - Approximation de la racine carrée d'un réel positif

On considère la suite de fonctions $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$f_0 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_0(x) = 1$$

et la relation de récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad f_k : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_k(x) = \frac{1}{2} \left(f_{k-1}(x) + \frac{x}{f_{k-1}(x)} \right).$$

On admet que la suite $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est correctement définie par les relations ci-dessus. Dans la suite, on pourra utiliser sans la démontrer l'inégalité :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_k(x) > 0.$$

I.1 - Convergence de la suite $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$

Q25. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. En calculant $(f_k(x))^2 - x$, montrer que $f_k(x) \geq \sqrt{x}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Q26. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que la suite $(f_k(x))_{k \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

Q27. Dédurre des deux questions précédentes que la suite de fonctions $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

I.2 - Majoration de l'erreur

Q28. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$f_{k+1}(x) - \sqrt{x} = \frac{f_k(x) - \sqrt{x}}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{x}}{f_k(x)} \right).$$

Q29. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$|f_k(x) - \sqrt{x}| \leq \frac{1+x}{2^k}.$$