Concours Centrale - Supélec 2009

Épreuve : MATHÉMATIQUES I Filière PC

*Les calculatrices sont autorisées.*

Le problème porte sur l'étude des séries factorielles, séries de fonctions de la forme

$$\sum_{n \geq 0} a_n \frac{n!}{x(x+1)(x+2)\dots(x+n)}.$$

Les parties I et II traitent d'un exemple. Les parties III, IV et V, indépendantes des deux premières, ont pour objet l'étude de propriétés de la somme d'une série factorielle convergente sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

## *Partie I - Préliminaires*

**I.A -** Pour tout entier $p$ naturel non nul, on pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u(n, p) = \frac{1}{n(n+1)\dots(n+p)}$$

I.A.1) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u(n, p)$ est convergente.

I.A.2) On pose :

$$\sigma(p) = \sum_{n=1}^{+\infty} u(n, p)$$

Calculer $\sigma(1)$.

I.A.3) Pour $p \geq 2$, et pour $n$ quelconque dans $\mathbb{N}^*$, exprimer $u(n, p-1) - u(n+1, p-1)$ en fonction de $p$ et $u(n, p)$.

I.A.4) En déduire la valeur de $\sigma(p)$ en fonction de $p$, pour $p \geq 2$.

**I.B -** Soient $q$ un entier $\geq 2$ et $N$ un entier naturel $\geq 1$.

Donner une majoration du reste

$$R(N, q) = \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^q}$$

en le comparant à une intégrale.

## Partie II - Un exemple d'accélération de la convergence

**II.A -**

II.A.1) Montrer par récurrence l'existence de trois suites $(a_p)$, $(b_p)$ et $(c_p)$ d'entiers naturels définies pour $p \geq 2$ telles que, pour tout réel $x$ strictement positif et pour tout entier $p$ on ait :

$$\frac{1}{x^3} = \sum_{k=2}^{p} \frac{a_k}{x(x+1)\dots(x+k)} + \frac{b_p x + c_p}{x^3(x+1)(x+2)\dots(x+p)}$$

II.A.2) Exprimer $a_{p+1}$, $b_{p+1}$ et $c_{p+1}$ à l'aide de $p$, $b_p$ et $c_p$.

II.A.3) Montrer que : $\forall p \geq 2$, $b_p \geq c_p \geq 0$.

II.A.4) Calculer $a_p$, $b_p$, $c_p$ pour $p = 2, 3$ et $4$.

**II.B -** On désire calculer une valeur décimale approchée de

$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$$

avec une erreur inférieure ou égale à $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-5}$.

II.B.1) En utilisant I.B, déterminer un entier naturel $N$ suffisant pour que

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} \text{ soit inférieur à } \varepsilon .$$

II.B.2) Donner un majorant simple de :

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{b_4 n + c_4}{n^3(n+1)\dots(n+4)}$$

et montrer, à l'aide de tout ce qui précède, comment calculer $\zeta(3)$ pour la même valeur de $\varepsilon$ avec une valeur de $N$ moins grande que celle trouvée à la question II.B.1.

II.B.3) Donner une valeur décimale approchée à $\varepsilon$ près (par défaut) de $\zeta(3)$ en utilisant ce qui précède.